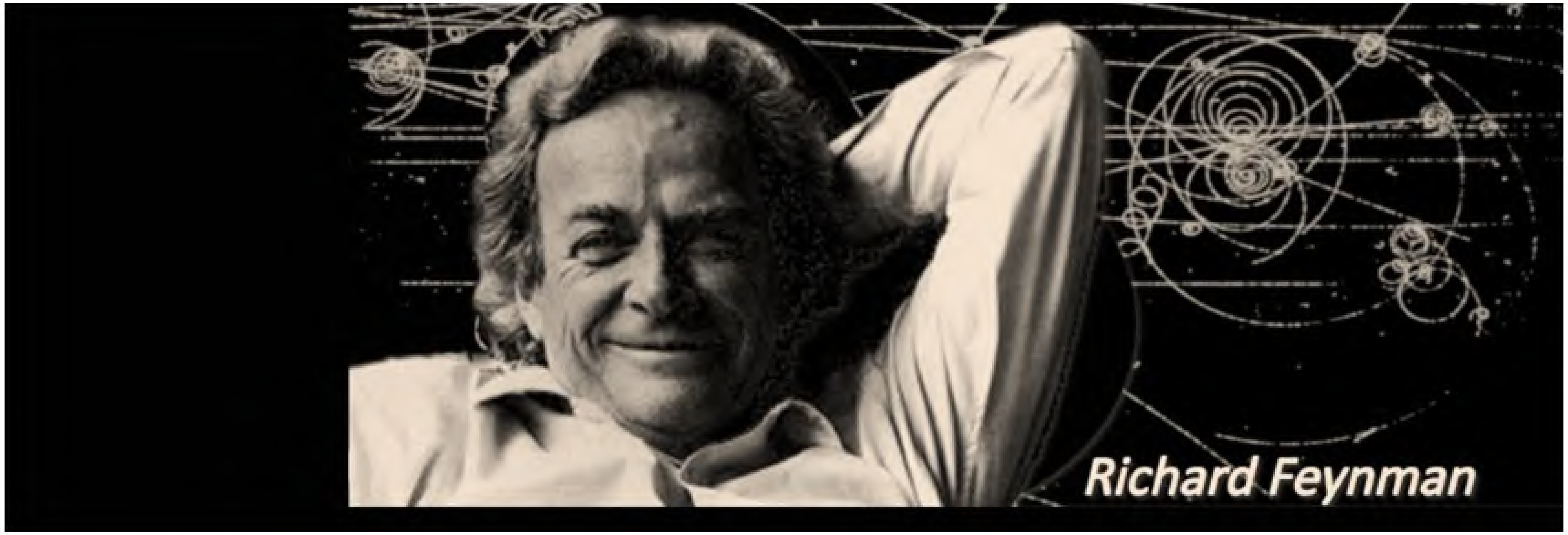
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس دهم

انرژی الکتروستاتیک

Electrostatic Energy

دانشگاه خوارزمی

حاصل‌ضربِ بار الکتریکی در پتانسیلِ الکتریکی را به عنوان انرژیِ پتانسیل تعبیر کردیم. در این‌جا می‌خواهیم کار لازم برای گردهم‌آییِ مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی را حساب کنیم. این کار را انرژی الکتروستاتیکیِ آن مجموعه بار می‌نامیم.

فرض کنید می‌خواهیم چند بار نقطه‌ای $q_1, q_2, \cdots, q_N$ را از بی‌نهایت (مرجعِ پتانسیل) به مکان‌های $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$ منتقل کنیم.

$$\boxed{W_1 = 0} \quad \boxed{W_2 = q_2\Phi_1(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}}$$

$$\boxed{W_3 = q_3\Big(\Phi_1(\mathbf{x}_3) + \Phi_2(\mathbf{x}_3)\Big) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_3}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} + \frac{q_2q_3}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|}\right)}$$

$$\boxed{W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_4}{|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1|} + \frac{q_2q_4}{|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2|} + \frac{q_3q_4}{|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3|}\right)}$$

واضح است که ترتیبِ انتقالِ بارها در کار انجام شده تأثیری ندارد. به بیان دیگر اگر در روابط فوق جای اندیس‌ها را عوض کنیم تغییری ایجاد نخواهد شد. بدین ترتیب می‌توانیم روابطِ فوق را به شکلِ زیر بنویسیم:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{q_1 q_2 + q_2 q_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q_1 q_3 + q_3 q_1}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} + \frac{q_2 q_3 + q_3 q_2}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|}\right)$$

برای انتقالِ Nامین بار می‌توان نوشت:

$$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q_1 q_N + q_N q_1}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1|} + \frac{q_2 q_N + q_N q_2}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_2|} + \frac{q_3 q_N + q_N q_3}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_3|} + \cdots + \frac{q_{N-1} q_N + q_N q_{N-1}}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N-1}|}\right)$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_N$$

دانشگاه خوارزمی

الف) انرژیِ الکتروستاتیک بر حسبِ توزیع‌های بار

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|}+\frac{q_3}{|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|}+\frac{q_4}{|\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_1|}+\cdots\frac{q_N}{|\mathbf{x}_N-\mathbf{x}_1|}\right)\right.$$
$$+q_2\left(\frac{q_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}+\frac{q_3}{|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2|}+\frac{q_4}{|\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_2|}+\cdots+\frac{q_N}{|\mathbf{x}_N-\mathbf{x}_2|}\right)$$
$$+q_3\left(\frac{q_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3|}+\frac{q_2}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3|}+\frac{q_4}{|\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_3|}+\cdots+\frac{q_N}{|\mathbf{x}_N-\mathbf{x}_3|}\right)$$
$$+\cdots+q_{N-1}\left(\frac{q_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_{N-1}|}+\frac{q_2}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_{N-1}|}+\cdots\frac{q_N}{|\mathbf{x}_N-\mathbf{x}_{N-1}|}\right)$$
$$\left.+q_N\left(\frac{q_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_N|}+\frac{q_2}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_N|}+\cdots\frac{q_{N-1}}{|\mathbf{x}_{N-1}-\mathbf{x}_N|}\right)\right]$$

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i|}}$$

دانشگاه خوارزمی

با توجه به این که $j \neq i$ ، در این مجموع هرگز جمله‌ی (N,N) ظاهر نخواهد شد.

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}$$

رابطه‌ی فوق را به شکل زیر نیز می‌توان بر حسبِ پتانسیل نوشت:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{x}_i)$$

$\Phi(\mathbf{x}_i)$ پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی $\mathbf{x}_i$ ناشی از همه‌ی بارها به غیر از بارِ q_i است.

توجه کنید که رابطه‌ی فوق فقط در مورد سیستم‌های بسته صادق است. در صورتی که بارهای الکتریکی در ناحیه‌ای قرار داشته باشند که یک میدان خارجی وجود داشته باشد، انرژیِ کل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$W = \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{x}_i)$$

کارِ لازم برای ایجادِ یک توزیعِ پیوسته‌ی بار، با تعمیمِ روابط فوق به شکل زیر به دست می‌آید

$$W = \frac{1}{2}\int \rho_v(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, d^3\mathbf{x}$$

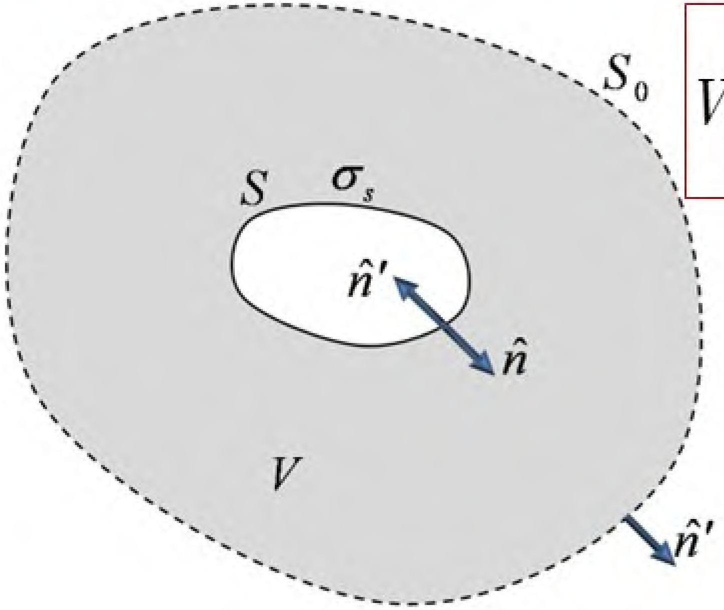
$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{x})\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_v(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\right)d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int \frac{\rho_v(\mathbf{x})\rho_v(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

و اگر یک توزیع سطحی بار داشته باشیم:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int \frac{\sigma_s(\mathbf{x})\sigma_s(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, da'da \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

ب) انرژیِ الکتروستاتیک بر حسبِ شدت میدانِ الکتریکی



حجمِ V ناحیه‌ای است که همه‌یِ بارها را در بر می‌گیرد.

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho_v(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da$$

$$\rho_v(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})$$

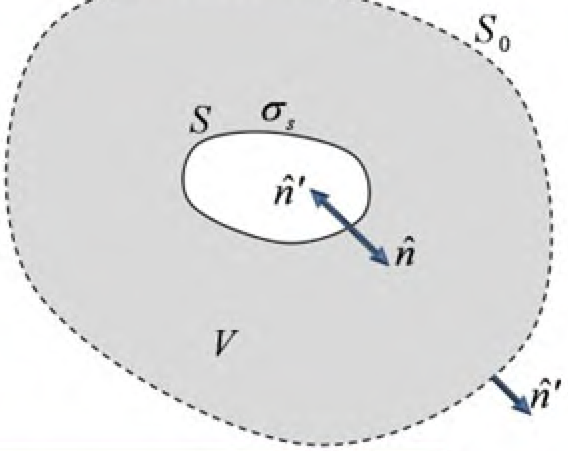
$$W = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0\big(\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})\big)\Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da$$

$$\nabla\cdot(\Phi\,\mathbf{E}) = (\nabla\Phi)\cdot\mathbf{E} + \Phi\nabla\cdot\mathbf{E}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0\big[\nabla\cdot(\Phi\mathbf{E}) - (\nabla\Phi)\cdot\mathbf{E}\big] d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da$$

$$W = \frac{1}{2}\oint_{S+S_0} \epsilon_0(\Phi\mathbf{E})\cdot\hat{n}'da + \frac{1}{2}\epsilon_0\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da$$

ب) انرژیِ الکتروستاتیک بر حسبِ شدت میدانِ الکتریکی



$$W = \frac{1}{2}\oint_{S+S_0} \epsilon_0 (\Phi \mathbf{E}) \cdot \hat{n}' da + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da$$

$$W = \frac{1}{2}\oint_{S} \epsilon_0 (\Phi \mathbf{E}) \cdot \hat{n}' da + \frac{1}{2}\oint_{S_0} \epsilon_0 (\Phi \mathbf{E}) \cdot \hat{n}' da + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da$$

$$\mathbf{E}\cdot\hat{n}' = -\mathbf{E}\cdot\hat{n} = -\frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

$$W = \frac{1}{2}\oint_{S_0} \epsilon_0 (\Phi \mathbf{E}) \cdot \hat{n}' da + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x}$$

اگر مرزهای سطحِ S_0 را در فواصلِ بزرگِ R در نظر بگیریم، انتگرالِ سطحیِ رابطه‌ی فوق با سرعتِ $1/R$ و یا سریع‌تر، به صفر میل می‌کند. بنابر این اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را به کل فضا گسترش دهیم، می‌توان نوشت:

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x}$$

دانشگاه خوارزمی

انرژی الکتروستاتیکی دو بارِ نقطه‌ای q_1 و q_2 در مکان‌های $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ قرار دارند، برابر است با

$$\boxed{W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \left|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\right|}}$$

واضح است که اگر بارها ناهمنام باشند، این انرژی منفی است.

اما اگر از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم، واضح است که انرژی همواره مقدار مثبتی به دست می‌آید. ریشه‌ی این تناقض کجاست؟

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x}}$$

دانشگاه خوارزمی

قبلا دیدیم که:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{x}_i)}$$

در رابطه‌ی فوق ما جمله‌ی $j = i$ را به وضوح کنار گذاشته‌ایم. یعنی در واقع q_i درپتانسیل $\Phi(\mathbf{x}_i)$ سهمی ندارد. این جمله در حقیقت انرژیِ لازم برای ساخت بار q_i است که آن را خود-انرژی *self-energy* می‌نامیم.

خود-انرژیِ بارِ نقطه‌ای بی‌نهایت است و در رابطه‌ی فوق این مقدارِ بی‌نهایت کنار گذاشته شده است .

اما در رابطه‌ی $W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x}$ جمله‌ی خود-انرژی منظور شده است.

دانشگاه خوارزمی

میدان الکتریکی دو بارِ نقطه‌ای برابر است با:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_1}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\,|^3}+\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_2}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_2\,|^3}$$

$$u(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\epsilon_0\frac{1}{16\pi^2{\epsilon_0}^2}\left[\frac{q_1^2}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\,|^4}+\frac{q_2^2}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_2\,|^4}+\frac{2q_1q_2\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\right)\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2\right)}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\,|^3|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_2\,|^3}\right]$$

دو جمله‌ی اول همان خود- انرژی بارهای q_1 و q_2 هستند و جمله‌ی سوم جمله‌ی برهم‌کنشِ دو بار است.

نشان خواهیم داد که انرژی سیستم دو ذره‌ای از همین جمله‌ی سوم به دست می‌آید:

$$W_{\text{int}}=\frac{q_1q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\right)\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2\right)}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\,|^3|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_2\,|^3}$$

دانشگاه خوارزمی

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3}$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \Rightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\xi}\,|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|; \quad d^3\mathbf{x} = d^3\boldsymbol{\xi}\,|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}-\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}-\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\\ &= \boldsymbol{\xi}\,|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2| + |\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\,\hat{\mathbf{u}}\\ &= |\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\,(\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}})\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}$$

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}\int d^3\boldsymbol{\xi}\,\frac{\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}})}{|\boldsymbol{\xi}|^3|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|^3}$$

$$\frac{(\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}})}{|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|^3} = -\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|}$$

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}\int d^3\boldsymbol{\xi}\,\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\cdot\left[-\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|}\right]$$

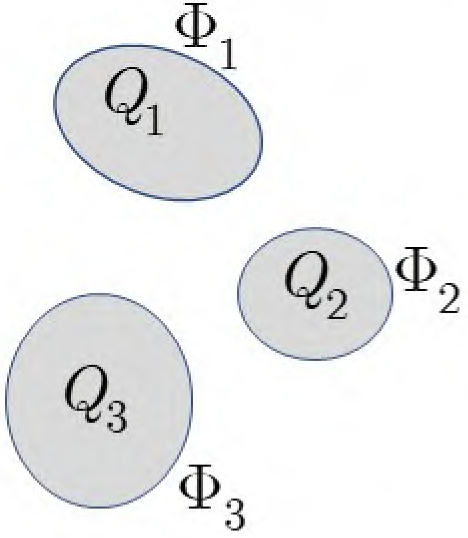
$$\boxed{\nabla\cdot\left(f\mathbf{F}\right) = \left(\nabla f\right)\cdot\mathbf{F} + f\nabla\cdot\mathbf{F}}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}\left\{-\underbrace{\cancel{\int\nabla\cdot\left(\left[\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|}\right]\right)d^3\boldsymbol{\xi}}}_{0} + \int\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|}\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\right)d^3\boldsymbol{\xi}\right\}$$

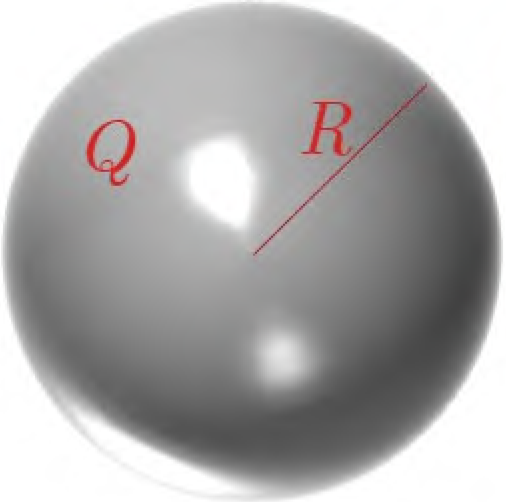
$$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\right) = -\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) = 4\pi\delta(\boldsymbol{\xi})}$$

$$\boxed{W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}\int d^3\boldsymbol{\xi}\,\frac{4\pi\delta(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}+\hat{\mathbf{u}}|} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}$$

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\, da \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} \sigma_s(\mathbf{x})\Phi_i\, da \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i\int_{S_i} \sigma_s(\mathbf{x})\, da \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i Q_i
\end{aligned}
$$



بار الکتریکیِ Q به طورِ یکنواخت بر سطحِ یک کره‌ی رسانا به شعاعِ R توزیع شده است. انرژیِ الکتروستاتیکی این دستگاه را محاسبه کنید.



$$\sigma_s = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

روش اول

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_S \sigma_s \Phi \, da \\ &= \frac{1}{2}\int_S \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} R^2 d\Omega \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

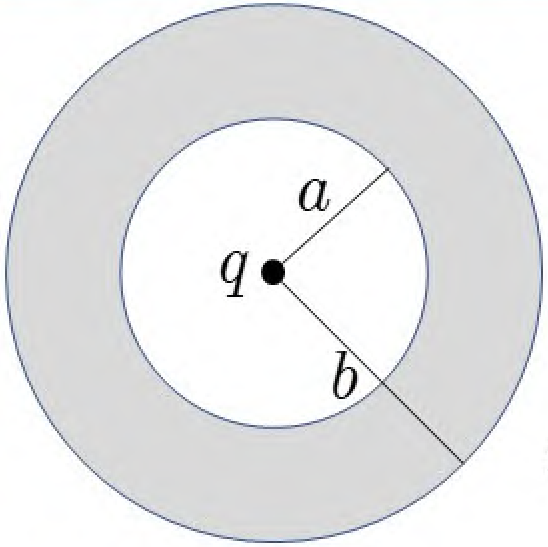
روش دوم

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} & r > R \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d^3\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \left[\int_{r<R} E^2 dv + \int_{r>R} E^2 dv\right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{r>R} E^2 dv \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{Q^2}{16\pi^2{\epsilon_0}^2 r^4} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی



بار نقطه‌ای q در مرکز یک پوسته‌ی کروی رسانا قرار دارد. شعاعِ داخلی پوسته a و شعاعِ خارجیِ آن b است. انرژی الکتروستاتیکی را محاسبه کنید.

حل:

با استفاده از قانون گوس، میدان الکتریکی در همه‌ی نقاط فضا به سادگی به دست می‌آید:

$$\left|\mathbf{E}\right| = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < a \\ 0 & a < r < b \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > b \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{کل فضا}} \left|\mathbf{E}\right|^2 d^3\mathbf{x} - \text{خود-انرژی بارنقطه‌ای}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_0^a\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0\int_b^\infty\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr - \frac{1}{2}\epsilon_0\int_0^\infty\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_b^\infty\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr - \frac{1}{2}\epsilon_0\int_a^\infty\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr}$$

$$\boxed{U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

دانشگاه خوارزمی

در بسیاری موارد محاسبه‌ی نیروی وارد بر توزیع‌های بار، با استفاده از قانونِ کولن، چندان ساده نیست. گاهی مناسب‌تر است که انرژیِ سیستم را بر حسبِ پارامترهای فیزیکی محاسبه کنیم و با استفاده از آن نیرو یا گشتاورِ نیروی وارد بر توزیع‌های بار را حساب کنیم.

دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: وقتی که سیستم، ایزوله (منفرد) است. یعنی بار کلِ سیستم ثابت می‌ماند.

حالتِ دوم: وقتی که پتانسیل ثابت باشد.

حالت اول: بارِ سیستم ثابت است

فرض کنید $\mathbf{F}$ نیروی الکتروستاتیکی باشد. کار این نیرو برای جابجایی $d\mathbf{l}$ برابر است با $\mathbf{F}.d\mathbf{l}$

این کار، انرژی سیستم را به اندازه‌ی dU تغییر می‌دهد

پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که: (توجه کنید که سیستم ایزوله است)

$$\boxed{dU = -dW = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz}$$

$$\boxed{dU = \nabla U \cdot d\mathbf{l}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U\Big|_Q}$$

$$\boxed{F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q \;;\quad F_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_Q \;;\quad F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q}$$

اندیس Q در روابط فوق بدین معنی است که بارِ کلِ سیستم ثابت است

حالت دوم: پتانسیل ثابت است

فرض کنید سیستم ایزوله نیست و بار الکتریکی مجاز است که به سیستم وارد یا از آن خارج شود، به گونه‌ای که پتانسیل ثابت بماند. مثلاً، مجموعه‌ای از رساناها که توسطِ باتری‌هایی در پتانسیل ثابت قرار دارند، توصیف کننده‌ی چنین حالتی هستند. در صورتی که جابجایی‌ای در سیستم ایجاد شود، پایستگی انرژی ایجاب می کند که:

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + dW_{bat}$$

که در آن dW_{bat} کاری است که باتری‌ها به منظورِ ثابت نگه‌داشتنِ پتانسیل انجام می‌دهند. باتری با تغییر بارِ رسانای i ام به اندازه‌ی dQ_i پتانسیل آن را ثابت نگه می دارد. بنابر این، کارِ باتری را می‌توان به شکلِ زیر نوشت:

$$dW_{bat} = \sum_{i=1} dQ_i\Phi_i$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}\Phi_i Q_i \Rightarrow dU = \frac{1}{2}\sum_{i=1}\Phi_i dQ_i$$

$$dW_{bat} = 2dU$$

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + 2dU$$

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\Phi ;\quad F_y = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_\Phi ;\quad F_z = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_\Phi$$

دانشگاه خوارزمی

در صورتی که سیستم مقید باشد که حولِ محوری بچرخد، کار نیروی الکتروستاتیکی را می‌توان به شکل $dW = \tau d\theta$ نوشت؛ که $d\theta$ جابجایی زاویه‌ای و τ گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول آن محور است.

حالت اول: بارِ سیستم ثابت است

$$\boxed{dU = -\tau d\theta}$$

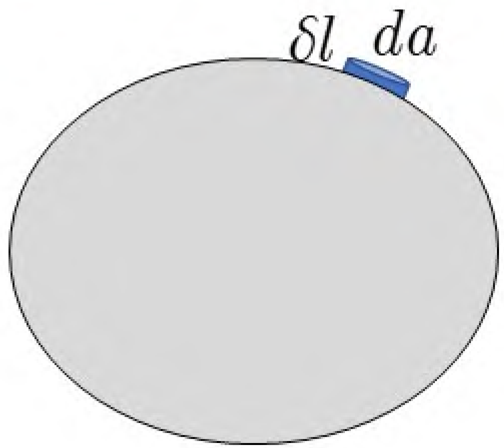
$$\boxed{\tau = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_Q}$$

حالت دوم: پتانسیل ثابت است

$$\boxed{dU = -\tau d\theta + dW_{bat}}$$

$$\boxed{\tau = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_\Phi}$$

دانشگاه خوارزمی



در نزدیکی سطحِ رسانا، چگالی انرژی برابر است با

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{{\sigma_s}^2}{2\epsilon_0}$$

اگر یک عنصر سطحِ کوچک da را به اندازه‌ی جزییِ δl جابه‌جا کنیم، کاهش انرژی انرژی الکتروستاتیکی سیستم برابر است با

$$\boxed{\delta U = -u\delta V = -\frac{{\sigma_s}^2}{2\epsilon_0} da\delta l}$$

این نیرو در هر نقطه بر سطحِ رسانا عمود است

$$\boxed{dF = -\frac{\delta U}{\delta l} = \frac{{\sigma_s}^2}{2\epsilon_0} da}$$

نیروی وارد بر هر نقطه از سطحِ رسانا در واحد سطح (فشار) برابر است با

$$\boxed{\frac{dF}{da} = \frac{{\sigma_s}^2}{2\epsilon_0}}$$

شاد و مهربان باشید