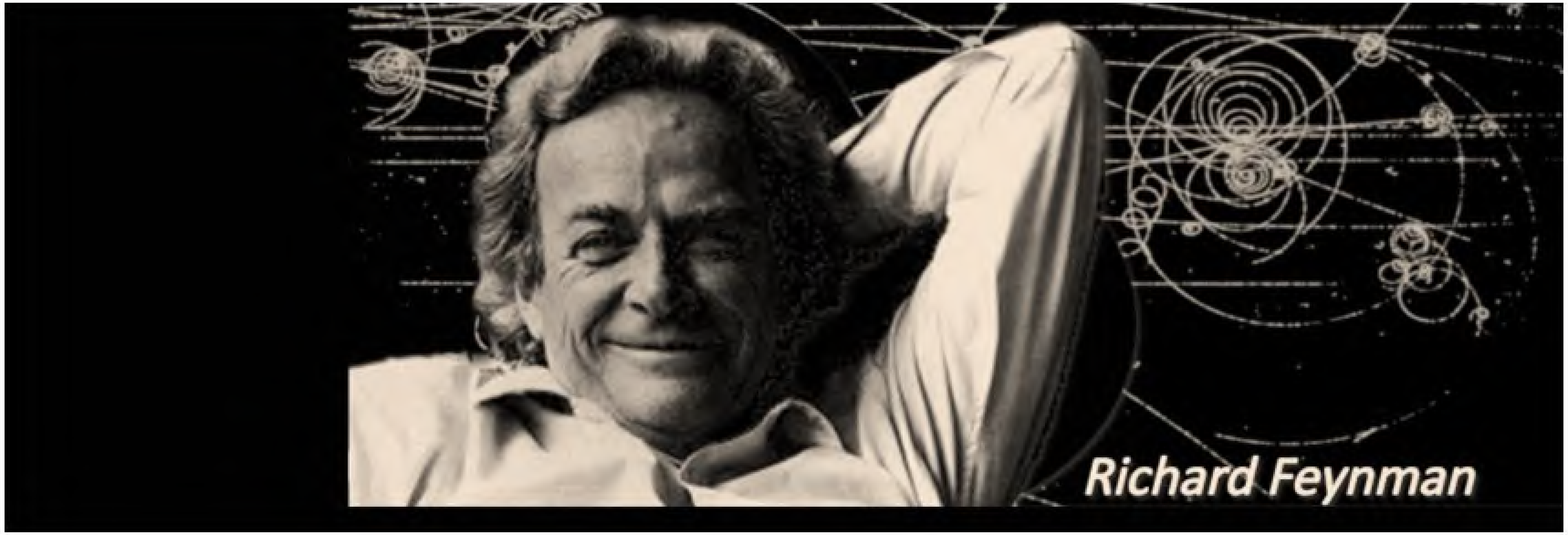
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس یازدهم
خازن و ظرفیت

Capacitor and Capacitance

دانشگاه خوارزمی

Q

Φ

$$\frac{Q}{\Phi} = C; \qquad Q = C\Phi$$

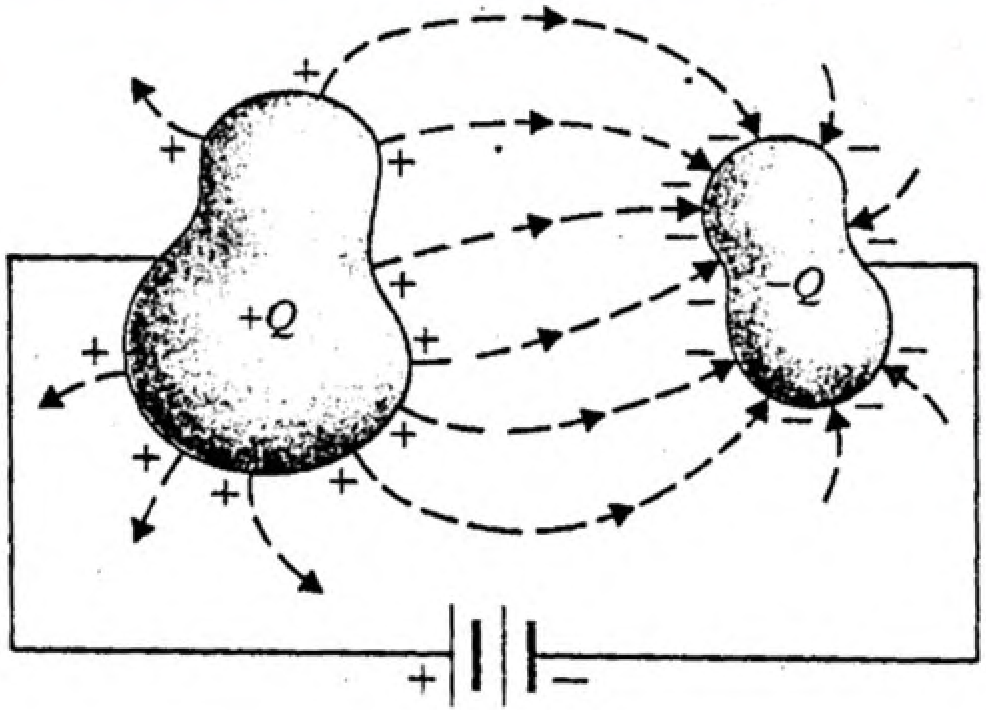
C را ظرفیتِ این رسانایِ منزوی می‌نامیم. ظرفیت، در واقع مقدار بار الکتریکی است که باید به رسانا داده شود تا پتانسیل آن یک واحد افزایش یابد. یکای اندازه‌گیری ظرفیت در دستگاه SI کولن بر ولت است که آن را فاراد (F) می‌نامیم.

مثال: ظرفیت یک کره‌ی رسانای منزوی

Q

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$



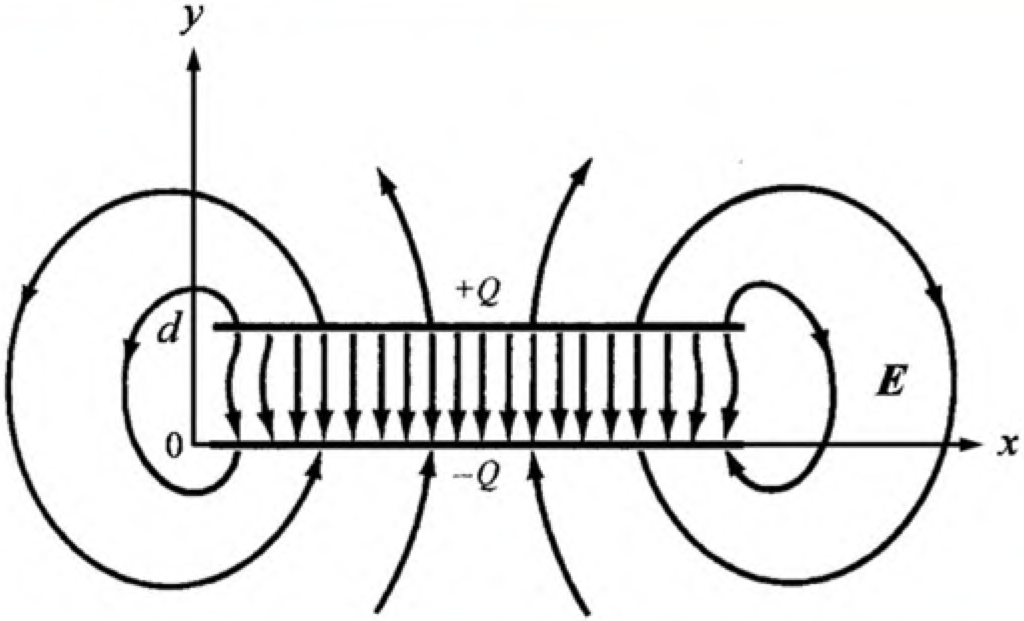
آن‌چه در عمل حائز اهمیت است، سیستمی متشکل از دو رساناست که بارهای مساوی و ناهمنام دارند. چنین سیستمی را یک خازن می‌نامیم.

ظرفیت خازن به شکلِ زیر تعریف می‌شود:

$$C = \frac{Q}{|\Delta\Phi|}$$

$\Delta\Phi$ اختلاف پتانسیل رساناهاست

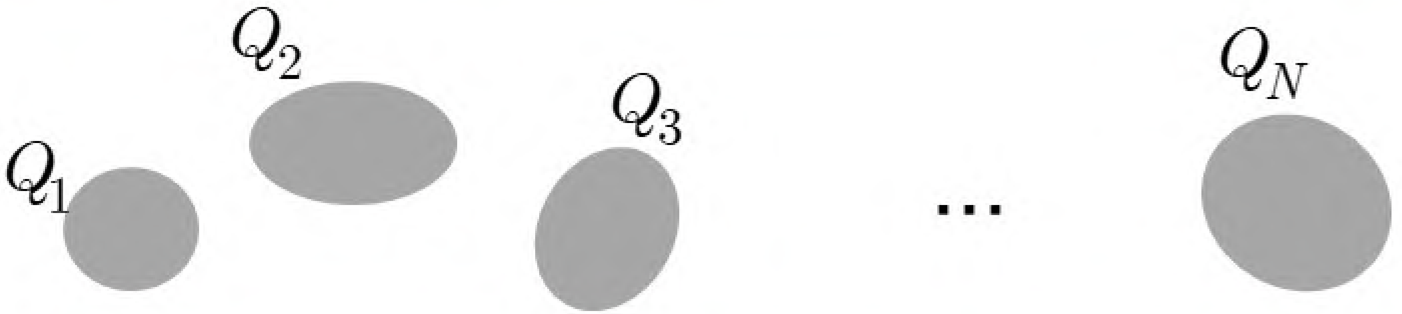
اگر از اثرِ لبه‌ها چشم‌پوشی کنیم



$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{j}}\frac{\sigma_s}{\epsilon_0} = -\hat{\mathbf{j}}\frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$\Delta\Phi = -\int_0^d \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d \left(-\hat{\mathbf{j}}\frac{Q}{\epsilon_0 A}\right)\cdot\hat{\mathbf{j}}\,dy = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

$$C = \frac{Q}{|\Delta\Phi|} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$



$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 \cdots + p_{1N}Q_N \\
\Phi_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 \cdots + p_{2N}Q_N \\
&\vdots \\
\Phi_N &= p_{N1}Q_1 + p_{N2}Q_2 + p_{N3}Q_3 \cdots + p_{NN}Q_N
\end{aligned}
$$

p_{ij}ها را ضرایب پتانسیل می‌نامیم

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_j \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

واضح است که اگر فقط یک رسانا داشته باشیم، آن‌گاه

$$\Phi = p_{11} Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{p_{11}} \Phi$$

$$C = \frac{1}{p_{11}}$$

برای یک رسانای کروی به شعاعِ R داریم: $p_{11} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 R}$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \Phi_j \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

ماتریسِ $[C]$ وارونِ ماتریسِ $[P]$ است.

معمولاً c_{ii} ها را ضرایب ظرفیت و c_{ij} ها را، که $i \neq j$، ضرایب القاء می‌نامند.

دانشگاه خوارزمی

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Phi_i\Phi_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_i Q_j$$

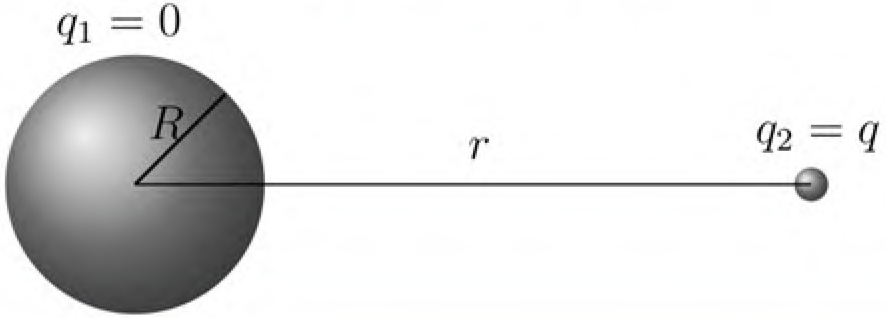
رابطه‌ی فوق نسبت به اندیس‌های i و j متقارن است. این نشان می دهد که:

$$c_{ij} = c_{ji} \qquad\qquad p_{ij} = p_{ji}$$

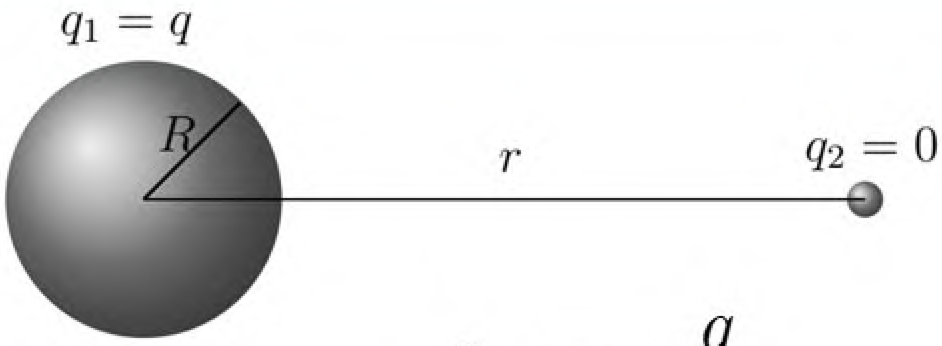
همچنین ضرایب ظرفیت دارای ویژگی‌های زیر هستند

$$\boxed{c_{ii} > 0 \qquad\qquad c_{ij} < 0}$$

بارِ نقطه‌ای q در فاصله‌ی r از یک کره‌ی رسانای بدونِ باری به شعاعِ R قرار دارد. پتانسیل کره را پیدا کنید.



$$\Phi_1 = p_{11} \times 0 + p_{12} q = p_{12} q$$



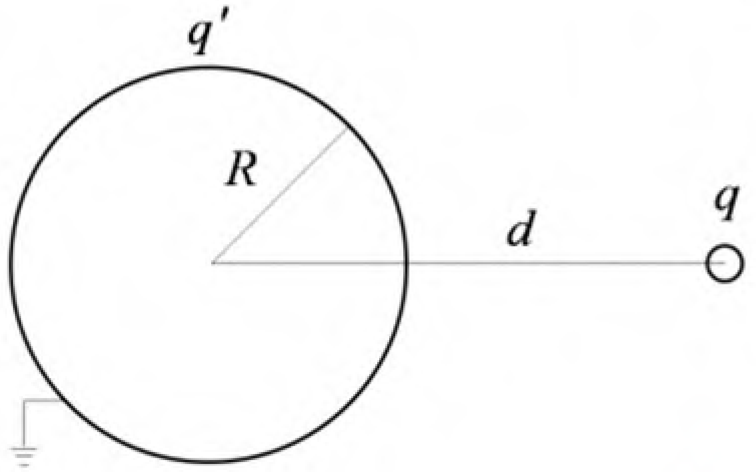
$$\Phi_2 = p_{21} q + p_{22} \times 0 = p_{21} q$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Phi_1 = p_{12} q = p_{21} q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

مثال:

کره‌ی رسانایی به شعاعِ R به زمین متصل است (پتانسیل آن صفر است). بارِ نقطه‌ایِ q در فاصله‌ی d از مرکزِ این کره قرار دارد. چه مقدار بارِ الکتریکی در کره القاء می‌شود؟



حل:

فرض کنید بار القاء شده را q' بنامیم. پتانسیلِ کره برابر است با

$$\Phi = p_{11}q' + p_{12}q = 0 \qquad \Rightarrow q' = -\frac{p_{12}}{p_{11}}q$$

$$\boxed{p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}; \qquad p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}}$$

$$\boxed{q' = -\frac{R}{d}q}$$

دانشگاه خوارزمی

دو رسانا دارای بارهای الکتریکیِ مساوی ولی ناهم‌نام هستند. ظرفیت این خازن را بر حسبِ ضرایب پتانسیل بنویسید.

حل:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_1 &= p_{11}Q + p_{21}(-Q)\\ \Phi_2 &= p_{21}Q + p_{22}(-Q)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\Phi_1 - \Phi_2 = (p_{11} - 2p_{12} + p_{22})Q}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{p_{11} - 2p_{12} + p_{22}}}$$

و یا بر حسب ضرائب ظرفیت:

$$\boxed{C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}}$$

دانشگاه خوارزمی

قضایای مفیدی هستند که به کمکِ آن‌ها می‌توان به محاسبه‌ی ظرفیت پرداخت.

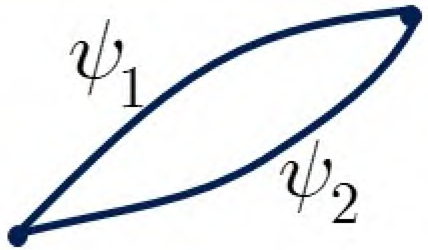
قضیه: فرض کنید V ناحیه‌ی تهی از بار باشد که با سطح S (شامل رساناهایی با سطوحِ S_i که هریک دارای پتانسیل Φ_i هستند)، محصور شده است. فرض کنید $\psi(\mathrm{x})$ تابع پیوسته و مشتق‌پذیر در حجمِ V و روی سطح S باشد. در این صورت تابعی $W[\psi]$ که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{W[\psi] = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int |\nabla\psi\,|^2 \; d^3\mathrm{x}}$$

دارای یک کمینه‌ی مطلق خواهد بود، به شرطی که ψ در حجمِ V در معادله‌ی لاپلاس صدق کند و روی رسانای S_i برابر با Φ_i باشد.

(در واقع ψ که تابعیِ W را کمینه می‌کند، همان تابع پتانسیل است که با شرط مرزی Φ_i را روزی سطوح S_i توصیف می‌شود)

اثبات:



$$\delta W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \delta \int |\nabla\psi|^2 \, d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int 2 \, \nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) d^3\mathbf{x}$$

$$\int_V (\delta\psi \nabla^2\psi + \nabla(\delta\psi)\cdot\nabla\psi) d^3\mathbf{x} = \oint_S \delta\psi \nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

اما $\delta\psi$ بر روی سطوح صفر است بنابر این طرفِ راستِ رابطه‌ی فوق صفر است. بنابر این

$$\boxed{\delta W = -\epsilon_0 \int \delta\psi \, \nabla^2 \psi d^3\mathbf{x}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\delta W = -\epsilon_0 \int \delta\psi \ \nabla^2 \psi d^3\mathbf{x}$$

به ازای هر ψ که W را کمینه می‌کند، بایستی وردشِ اولِ δW برابر با صفر شود. توجه می‌کنیم که $\delta\psi$ اختیاری است. بنابر این در صورتی که $\nabla^2\psi$ منفی باشد، $\delta\psi$ را مثبت انتخاب می‌کنیم و اگر $\nabla^2\psi$ مثبت باشد، $\delta\psi$ را منفی انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب δW نامنفی خواهد شد. بنابر این تنها امکانِ این که δW در ناحیه‌ی V صفر باشد این است که درون این ناحیه داشته باشیم:

$$\nabla^2\psi = 0$$

یعنی این که ψ باید در معادله‌ی لاپلاس صدق کند، که همان حکمِ قضیه است.

مثال: در ناحیه‌ی V در خلأ، مجموعه‌ای از رساناها قرار دارند که پتانسیل همه صفر است به جز یکی که پتانسیل آن برابر با واحد است.

الف) نشان دهید ظرفیتِ این رسانا برابر است با:

$$C = \epsilon_0 \int_V |\nabla \Phi|^2 \ d^3\mathbf{x}$$

که در آن $\Phi(\mathbf{x})$ پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از فضاست.

ب) اگر Ψ یک تابع آزمونی باشد که شرایط مرزی را روی رساناها برقرار می کند، نشان دهید ظرفیت همواره کم‌تر یا مساوی با مقدار زیر است

$$\mathfrak{M}[\Psi] = \epsilon_0 \int_V |\nabla \Psi|^2 \ d^3\mathbf{x}$$

حل: **الف)** از آن‌جا که همه‌ی رساناها ، به جز یکی، در پتانسیل صفر قرار دارند، می توان نوشت:

$$\boxed{Q_1 = c_{11}\Phi_1 = C \times 1 = C}$$

و انرژی خازن برابر است با

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Q_1\Phi_1 = \frac{1}{2}C}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_V |\,\mathbf{E}\,|^2 \; d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_V |\,\nabla\Phi\,|^2 \; d^3\mathbf{x}} \Rightarrow \boxed{C = \epsilon_0\int_V |\nabla\Phi\,|^2 \; d^3\mathbf{x}}$$

$$\boxed{\mathfrak{M}[\Psi] = \epsilon_0\int_V |\nabla\Psi\,|^2 \; d^3\mathbf{x}}$$

ب) چون Ψ شرایط مرزی را برقرار می کند، طبق قضیه‌ای که در اسلایدهای قبل اثبات کردیم، $\mathfrak{M}[\Psi]$ دارای یک کمینه است. این کمینه‌ی مطلق به ازای $\nabla^2\Psi = 0$ به دست می‌آید. یعنی با توجه به قسمت الف همین مثال، این کمینه همان ظرفیت است. بنابر این

$$\boxed{\mathfrak{M}[\Psi] \le C}$$

دانشگاه خوارزمی

دو استوانه‌ی هم مرکز به طول بزرگِ L و شعاع‌های a و b $(b>a)$ در نظر بگیرید. به روش وردشی و با استفاده از تابع آزمونی زیر ظرفیت خازن را به طور تقریبی حساب کنید

$$\Psi(\rho) = \frac{b-\rho}{b-a}$$

مسئله را برای حالت‌های $b/a=1.5,\ 2,\ 3$ محاسبه و با پاسخ تحلیلی مقایسه کنید.

حل:

واضح است که $$|\nabla\Psi| = \frac{1}{b-a}$$

$$\boxed{C = \epsilon_0 \int_V \frac{d^3\mathbf{x}}{(b-a)^2} = \epsilon_0 \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\phi dz}{(b-a)^2} = \epsilon_0 \pi L \frac{b+a}{b-a}}$$

$$C = \epsilon_0 \pi L \frac{b+a}{b-a}$$

به سادگی می‌توان دید که پاسخ تحلیلی برای ظرفیت خازن استوانه‌ی به شکل زیر است

$$C_{\text{تحلیلی}} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$u = b/a$	$\frac{C}{\pi\epsilon_0 L} = \frac{u+1}{u-1}$	$\frac{C_{\text{تحلیلی}}}{\pi\epsilon_0 L} = \frac{2}{\ln u}$	$\frac{C_{\text{تحلیلی}}}{C}$
1.5	5.0	4.93	0.99
2	3.0	2.89	0.96
3	2.0	1.82	0.91

$$b - a \ll 1 \quad \rightarrow \quad b = a + \eta$$

مقدار بسیار کوچک

$$\boxed{C = \pi\epsilon_0 L \frac{a + \eta + a}{a + \eta - a} \simeq \pi\epsilon_0 L \frac{2a}{\eta}}$$

و برای پاسخ تحلیلی نیز می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد:

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{\eta}{a}\right) \simeq \frac{a}{\eta}$$

$$\boxed{C_{\text{تحلیلی}} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \simeq 2\pi\epsilon_0 L \frac{a}{\eta}}$$

فرض کنید N بارِ نقطه‌ای $q_1, q_2, \ldots, q_N$ در ناحیه‌ای از فضا قرار دارند. پتانسیل الکتریکی را در محل بار q_j ، که ناشی از همه‌ی بارهای دیگر به جز بارِ q_j است، ϕ_j می‌نامیم:

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i}{|\, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \,|}$$

حال در نظر بگیرید به جای q_j ها، بارهای نقطه‌ای q'_j را در همان مکان‌ها داریم. پتانسیل الکتریکی در محلِ بارِ q'_j برابر است با:

$$\phi'_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q'_i}{|\, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \,|}$$

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}$$

$$\phi'_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q'_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}$$

ϕ'_j را در q_j و ϕ_j را در q'_j ضرب می‌کنیم و روی j جمع می‌بندیم:

$$\sum_{j=1}^{N}\phi_j q'_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q'_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\phi'_j q_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q'_i q_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\phi_j q'_j = \sum_{j=1}^{N}\phi'_j q_j}$$

در قضیه‌ی متقابلِ گرین، می‌توان به جای بارهای نقطه‌ای مجموعه‌ای از رساناها را در نظر گرفت که هر کدام بارِ q_i وادارند. در این حالت ϕ_i پتانسیل روی رسانای jام است.

قضیه را برای توزیع بارهای پیوسته نیز می‌توان اثبات کرد.

فرض کنید در ناحیه‌ی V بار حجمیِ ρ_v و بر روی سطح رساناها چگالی سطحی σ_s داشته باشیم و پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بارها Φ باشد.

حال در نظر بگیرید که به جای ρ_v و σ_s در آن ناحیه، چگالی‌های بارِ ρ'_v و σ'_s داشته باشیم و پتانسیل الکتریکی Φ' باشد. در این صورت، قضیه‌ی متقابل گرین بیان می‌کند که:

$$\int_V \rho_v(\mathbf{x})\Phi'(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} + \int_S \sigma_s(\mathbf{x})\Phi'(\mathbf{x})da = \int_V \rho_{v'}(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} + \int_S \sigma'_s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})da$$

برای اثبات رابطه‌ی فوق کافی است در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} d^3\mathbf{x} = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da$، میدانِ برداریِ $\boldsymbol{F}$ را به صورتِ $\Phi\nabla\Phi' - \Phi'\nabla\Phi$ در نظر بگیریم. انجام مراحل اثبات به عهده‌ی شما!

شاد و مهربان باشید