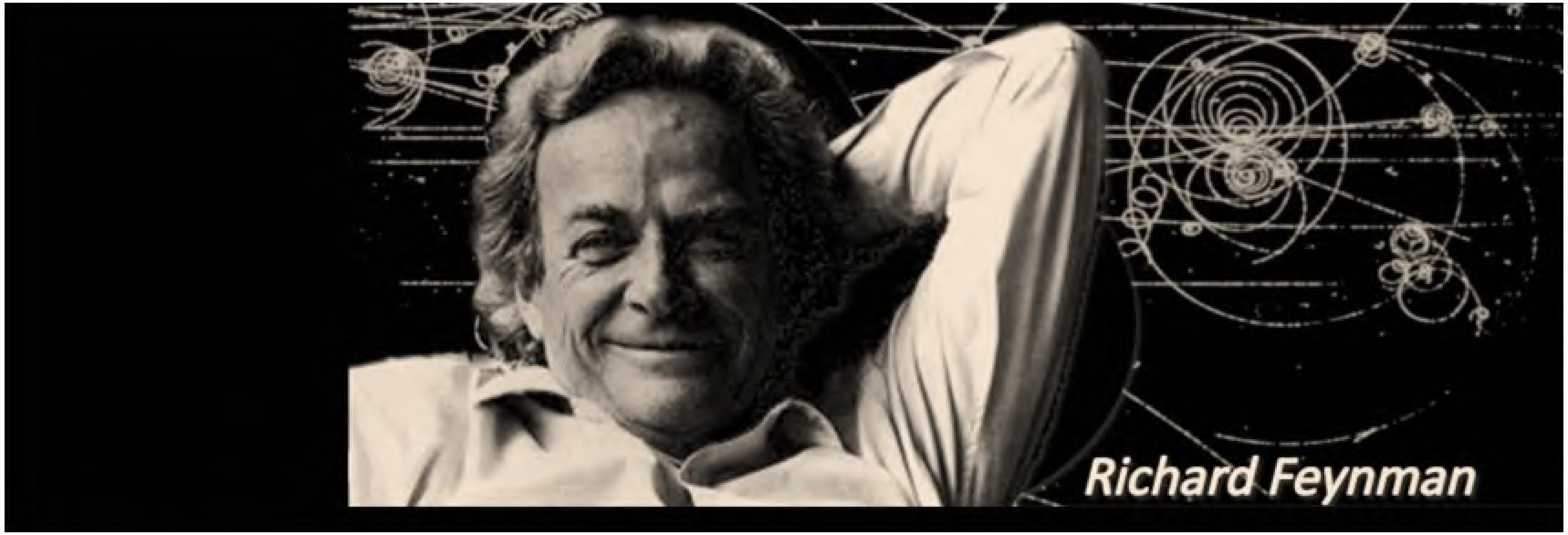
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس پنجم
چگالی بار الکتریکی و تابع دلتای دیراک

Charge Density and Dirac Delta Function

دانشگاه خوارزمی

اگر در ناحیه‌ای از فضا بارهای الکتریکی خطی λ_l و سطحی σ_s و حجمی ρ_v و مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی نقطه‌ای q_i داشته باشیم، شکلِ کلیِ میدانِ الکتریکی در یک نقطه از فضا برابر است با:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = &\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_A \sigma_s(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}da' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \lambda_l(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}dl' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^3}\end{aligned}$$

اما با استفاده از تابع دلتا می‌توان همه‌ی توزیع بارها را به شکلِ چگالیِ حجمیِ بار بیان کرد. مثلاً یک بارِ نقطه‌ای q را که در مکانِ $\mathbf{x}_q$ قرار دارد، می‌توان با چگالیِ حجمی به شکلِ زیر نوشت:

$$\rho_v(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)$$

این چگالی بار در همه‌جا صفر است مگر در نقطه‌ی $\mathbf{x}_q$ که مقدار نامتناهی دارد. اما بار کل که با انتگرال‌گیری به دست می‌آید، برابر با q است:

$$\int \rho_v(\mathbf{x}) dv = q \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) dv = q$$

همچنین برای مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای $q_1, q_2, \cdots, q_N$ که در مکان‌های $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N$ قرار دارند، می‌توان نوشت:

$$\boxed{\rho_v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}$$

$$\boxed{\int \rho_v(\mathbf{x}) dv = \sum_{i=1}^{N} q_i \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dv = \sum_{i=1}^{N} q_i}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال: بارهای نقطه‌ای $q_1, q_2, \ldots, q_6$ در نقاطی با مختصاتِ زیر در نظر بگیرید

$$(a_1, 0, 0),\ (0,\ a_2, 0),\ (0, 0,\ a_3),\ (-a_4, 0, 0),\ (0, -\ a_5, 0),\ (0, 0, -a_6)$$

برای این توزیعِ بار، با استفاده از تابع دلتای دیراک، یک چگالی بار بنویسید.

حل:

$$\rho_v(\mathbf{x}) = q_1\delta(x-a_1)\delta(y)\delta(z) + q_2\delta(x)\delta(y-a_2)\delta(z)$$

$$+ q_3\delta(x)\delta(y)\delta(z-a_3) + q_4\delta(x+a_4)\delta(y)\delta(z)$$

$$+ q_5\delta(x)\delta(y+a_5)\delta(z) + q_6\delta(x)\delta(y)\delta(z+a_6)$$

مثال: **هر یک از توزیعِ بارهای زیر را به صورت یک چگالی حجمی بار بنویسید:**

الف) دوقطبی الکتریکی: بارهای نقطه‌ایِ $+q$ و $-q$ در مکان‌های $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ قرار دارند.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{a}{2}\hat{n} \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 - \frac{a}{2}\hat{n}$$

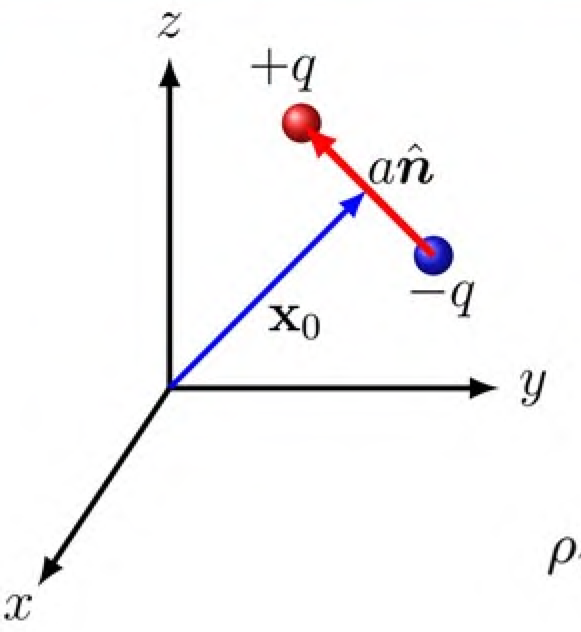
ب) بار الکتریکی با چگالیِ یکنواختِ σ_s بر روی کره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است

ج) بار الکتریکیِ Q به طورِ یکنواخت بر روی حلقه‌ی دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است. حلقه در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است

د) بار الکتریکی با چگالی یکنواختِ σ_s بر روی قرصِ دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است. قرص در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است

هـ) بار Q بر روی میله‌ای به طولِ L به طور یکنواخت توزیع شده است. میله بر روی محور z قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است.

دانشگاه خوارزمی



حل: الف)

$$\rho_v(\mathbf{x}) = +q\delta\left(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 + \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}})\right) - q\delta\left(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}})\right)$$

اما آن‌چه برای ما جالب است دوقطبیِ نقطه‌ای است. یعنی وقتی که $a \to 0$ ولی حاصلِ ضربِ qa متناهی می‌ماند. کمیتِ برداریِ $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$ را گشتاور دوقطبی الکتریکیِ این توزیعِ بار می‌نامیم. بدین ترتیب برای دوقطبیِ نقطه‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\rho_v(\mathbf{x}) &= \lim_{a\to 0}\left[q\delta\left(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 + \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}})\right) - q\delta\left(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}})\right)\right] \\
&= \lim_{a\to 0} qa \frac{\delta\left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\right] - \delta\left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\right]}{a} \\
&= -p \lim_{a\to 0} \frac{\delta\left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\right] - \delta\left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\right]}{a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_v(\mathbf{x}) &= -p\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}_0}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\end{aligned}}$$

بعداً از این نتیجه برای یافتنِ پتانسیلِ الکتریکیِ دوقطبیِ نقطه‌ای استفاده خواهیم کرد.

دانشگاه خوارزمی

ب) بار الکتریکی با چگالیِ یکنواختِ σ_s بر روی کره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است

حل:

واضح است که چگالیِ حجمیِ این توزیع بار همه جا صفر است مگر در $r = R$. پس می‌توانیم آن را به کمک تابع دلتا به شکلِ $\delta(r-R)$ بنویسیم. اما باید بارِ کل برابر با $Q = \sigma_s 4\pi R^2$ باشد. بنابر این چگالی بار را به صورتِ $\rho_v = A\delta(r-R)$ می‌نویسیم که A مقدار ثابتی است و آن را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که بار کل $Q = \sigma_s 4\pi R^2$ شود:

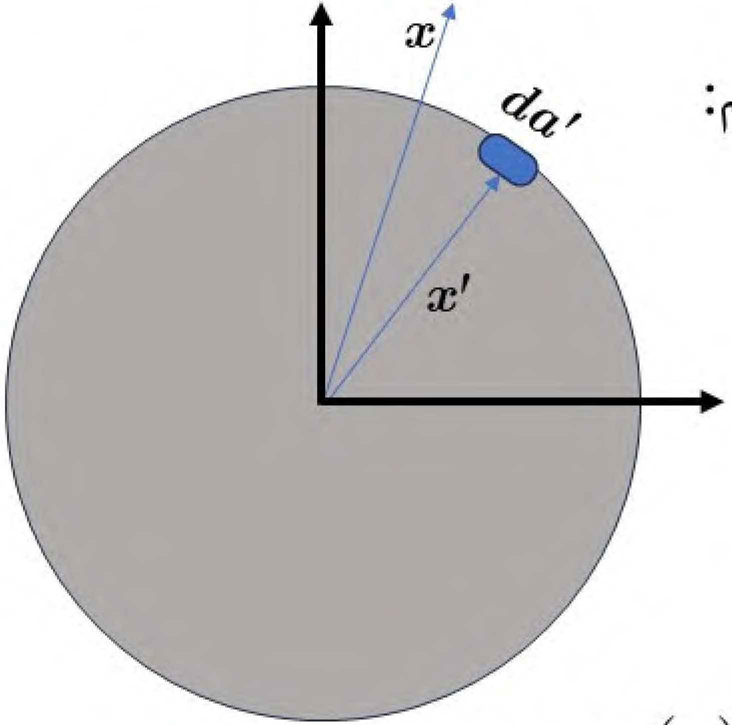
$$Q_{\text{کل}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{\infty} r^2 dr A\delta(r-R) = A(4\pi R^2)$$

بنابر این کافی است A را برابر با σ_s انتخاب کنیم.

$$\boxed{\rho_v = \sigma_s \delta(r-R)}$$

دانشگاه خوارزمی

حل: روش دوم برای قسمت ب:



در این‌جا پوسته‌ی کروی را به صورت مجموعه‌ای از عناصر سطحی می‌نویسم:

$$da' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

که دارای بار الکتریکی زیر است:

$$dq = \sigma_s da' = \frac{Q}{4\pi R^2} da'$$

$$\rho_v(\mathbf{x}) = \int dq \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sigma_s \int R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\boxed{\rho_v(\mathbf{x}) = \sigma_s \int R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' \frac{\delta(r-R)\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{R^2 \sin\theta} = \sigma_s \delta(r-R)}$$

ج) بار الکتریکیِ Q به طورِ یکنواخت بر روی حلقه‌ی دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است. حلقه در صفحه‌ی xy قَرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است.

حل: $$\rho_v = A\frac{\delta(r-R)\delta(\theta-\pi/2)}{r}$$

ثابتِ A به گونه‌ای تعیین می‌شود که بار کل برابر با Q شود.

$$\boxed{Q = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr A \frac{\delta(r-R)\delta(\theta-\pi/2)}{r} = A(2\pi R)}$$

بدین ترتیب چگالی حجمی یک حلقه‌ی باردار را (در دستگاه مختصات کروی) می‌توان به شکلِ زیر نوشت:

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{2\pi R}\frac{\delta(r-R)\delta(\theta-\pi/2)}{r}}$$

$$\boxed{\frac{\delta(r-R)}{r} = \frac{\delta(r-R)}{R}}$$

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r-R)\delta(\theta-\pi/2)}$$

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r-R)\sin\theta\,\delta(\cos\theta)}$$

پاسخ قسمت ج) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

مشابه با آن‌چه در اسلاید قبل بیان شد،به سادگی می توان دید که برای یک حلقه‌ی باردار،

می توان چگالی حجمی بار را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho - R)\delta(z)}$$

د) بار الکتریکی با چگالی یکنواختِ σ_s بر روی قرصِ دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است. قرص در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است

حل:

این مسئله شبیه به قسمت ج است با این تفاوت که نه در $r=R$ بلکه برای $r<R$ چگالی بار مخالف صفر است. بنابر این برای مختصه‌ی r به جای تابع دلتا باید از تابع هوی‌ساید (تابع پله‌ای) استفاده کنیم.

$$\rho_v = A\frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{r}\Theta(R-r)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr A\frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{r}\Theta(R-r) = A(\pi R^2)$$

بدین ترتیب چگالی بار را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{\pi R^2}\frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{r}\Theta(R-r) = \sigma_s \frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{r}\Theta(R-r)}$$

البته به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این چگالی بار به شکل زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\boxed{\rho_v = \frac{3Q}{2\pi R^3}\Theta(R-r)\delta(\theta - \tfrac{\pi}{2}) = \frac{3Q}{2\pi R^3}\Theta(R-r)\delta(\cos\theta)}$$

این توزیع بار در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر است:

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{\pi R^2}\delta(z)\Theta(R-r) = \sigma_s\delta(z)\Theta(R-\rho)}$$

دانشگاه خوارزمی

هـ) بار Q بر روی میله‌ای به طولِ L به طور یکنواخت توزیع شده است. میله بر روی محور z قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است.

حل:

در این‌جا نیز مانند آن چه در قسمت ج در مورد استفاده از تابع هوی‌ساید گفته شد، چگالی بار باید جمله‌ای به شکلِ $\Theta(L/2-|z|)$ داشته باشد. زیرا برای نقاطِ $|z|<L/2$ بار الکتریکی داریم و برای نقاط $|z|>L/2$ روی محور z باری وجود ندارد. بدین ترتیب در دستگاه مختصات استوانه‌ای چگالی بار را می‌توان به شکلِ زیر نوشت

$$\boxed{\rho_v = A\frac{\delta(\rho)}{\rho}\Theta\left(\frac{L}{2}-|z|\right)}$$

ثابتِ A به گونه‌ای تعیین می‌شود که بار کل برابر با Q شود.

$$\boxed{Q = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho A \frac{\delta(\rho)}{\rho} \Theta\left(\frac{L}{2} - |z| \right) = A(2\pi L)}$$

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{L} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \Theta\left(\frac{L}{2} - |z| \right)}$$

در دستگاه مختصات کروی، این توزیع بار را می‌توان به شکلِ زیر نوشت

$$\boxed{\rho_v = \frac{Q}{L} \frac{\Big(\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)\Big)}{2\pi r^2} \Theta\left(\frac{L}{2} - r \right)}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید