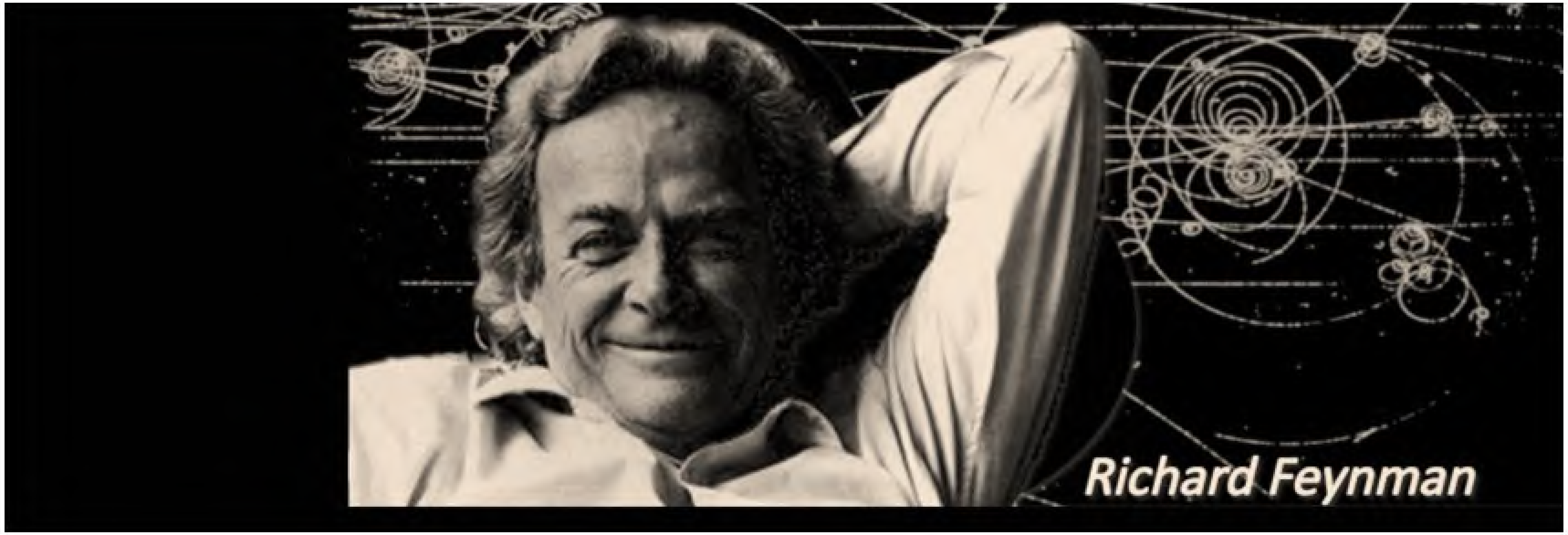
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



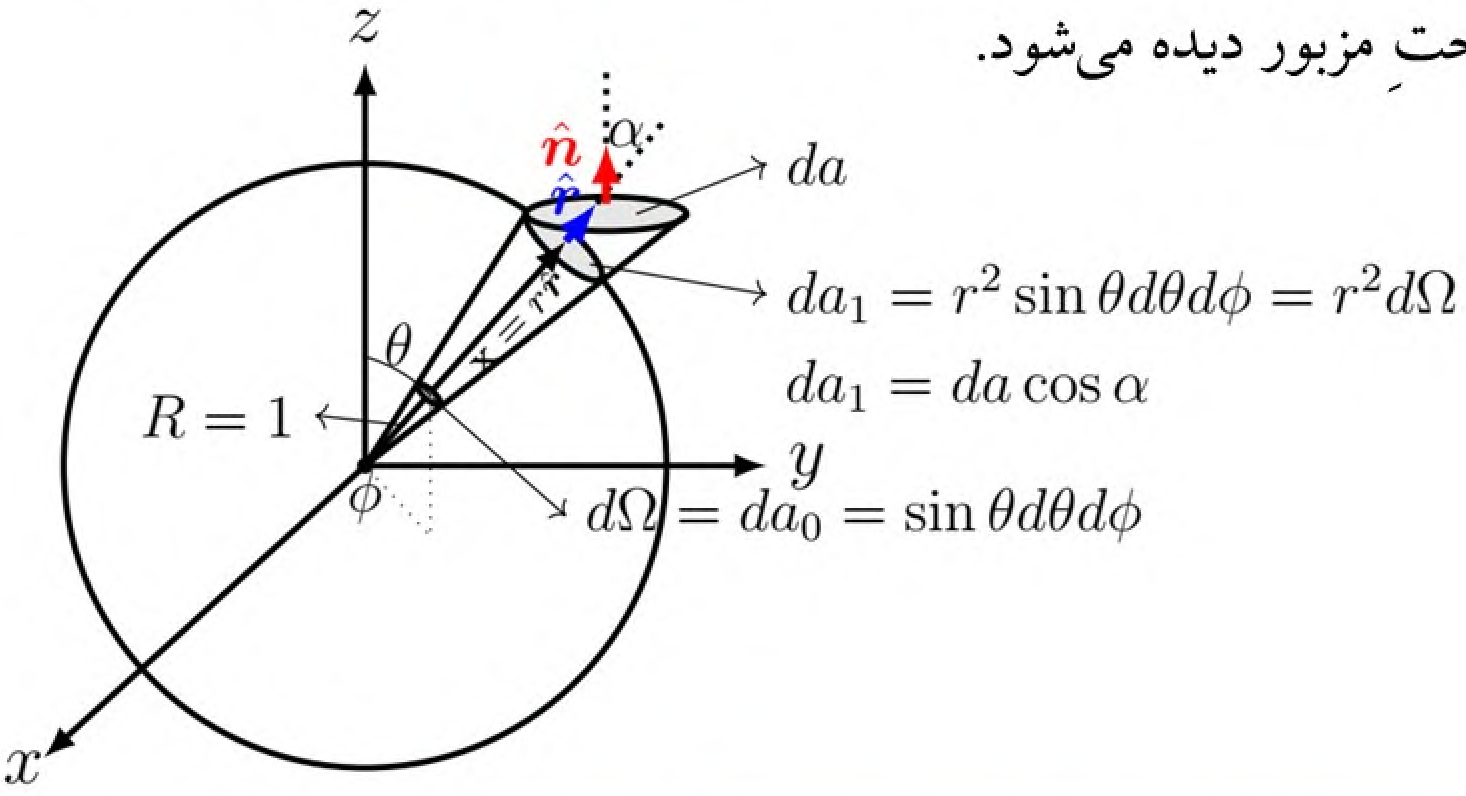
اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس ششم
قانون گوس

Gauss Law

زاویه‌ی فضایی Ω به صورتِ بخشی از مساحتِ یک کره به شعاعِ واحد تعریف می‌شود. این سطح بینِ یال‌های مخروطی محصور شده است که از رأسِ آن، مساحتِ مزبور دیده می‌شود.



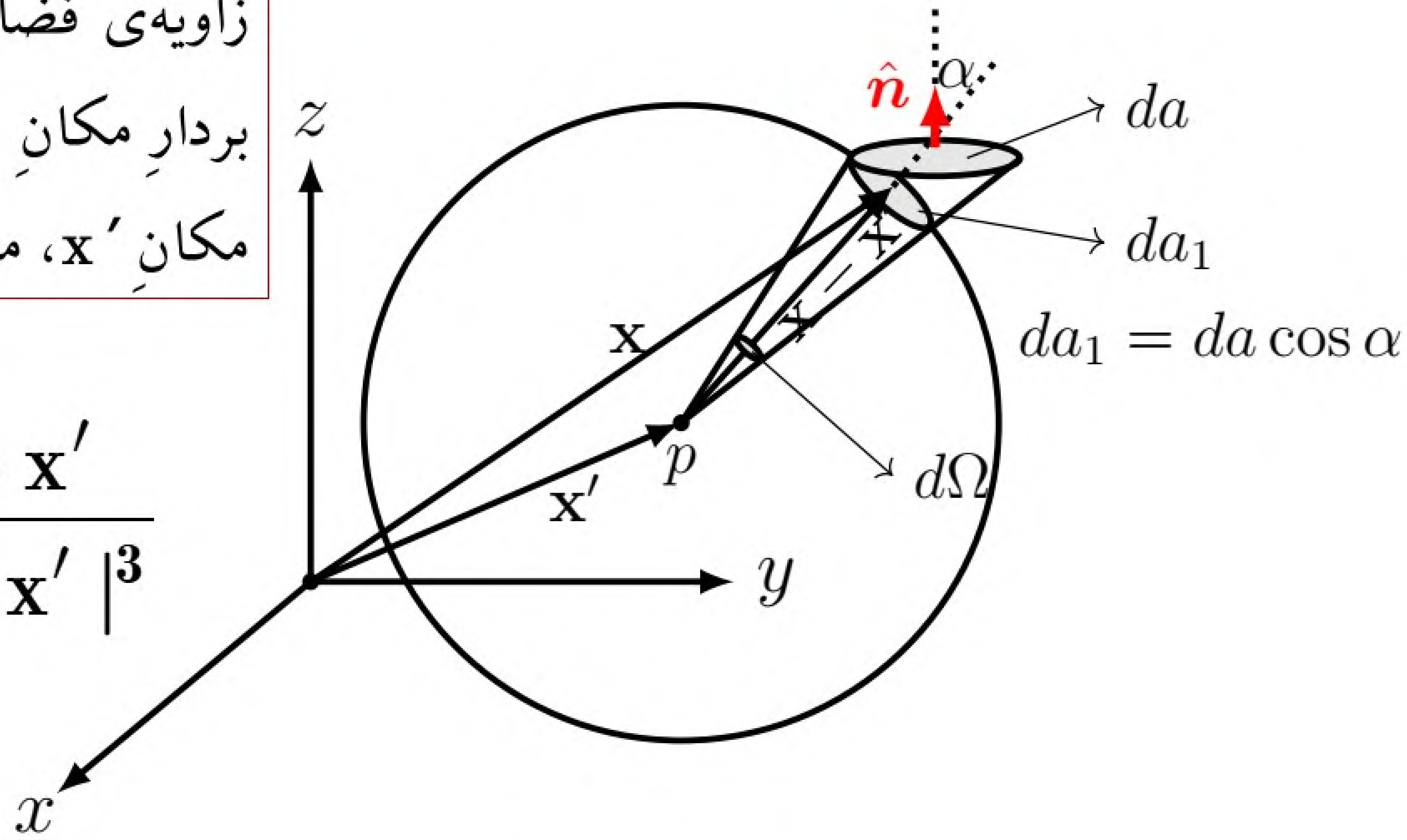
عنصرِ سطح بر روی کره‌ای به شعاع واحد

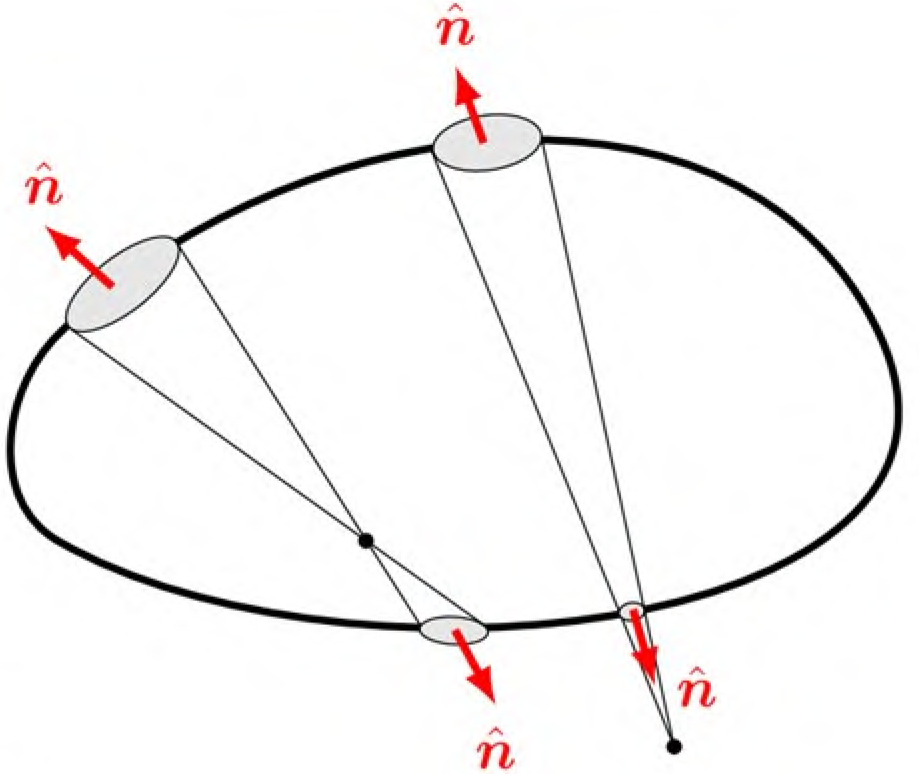
$$da_0 = d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

$$d\Omega = \frac{da_1}{r^2} = \frac{da\cos\alpha}{r^2} = \frac{da\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{d\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = d\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$$

زاویه‌ی فضاییِ یک عنصرِ سطح da با بردارِ مکانِ $\mathbf{x}$ که از نقطه‌ی p با بردارِ مکانِ $\mathbf{x}'$، مشاهده می‌شود

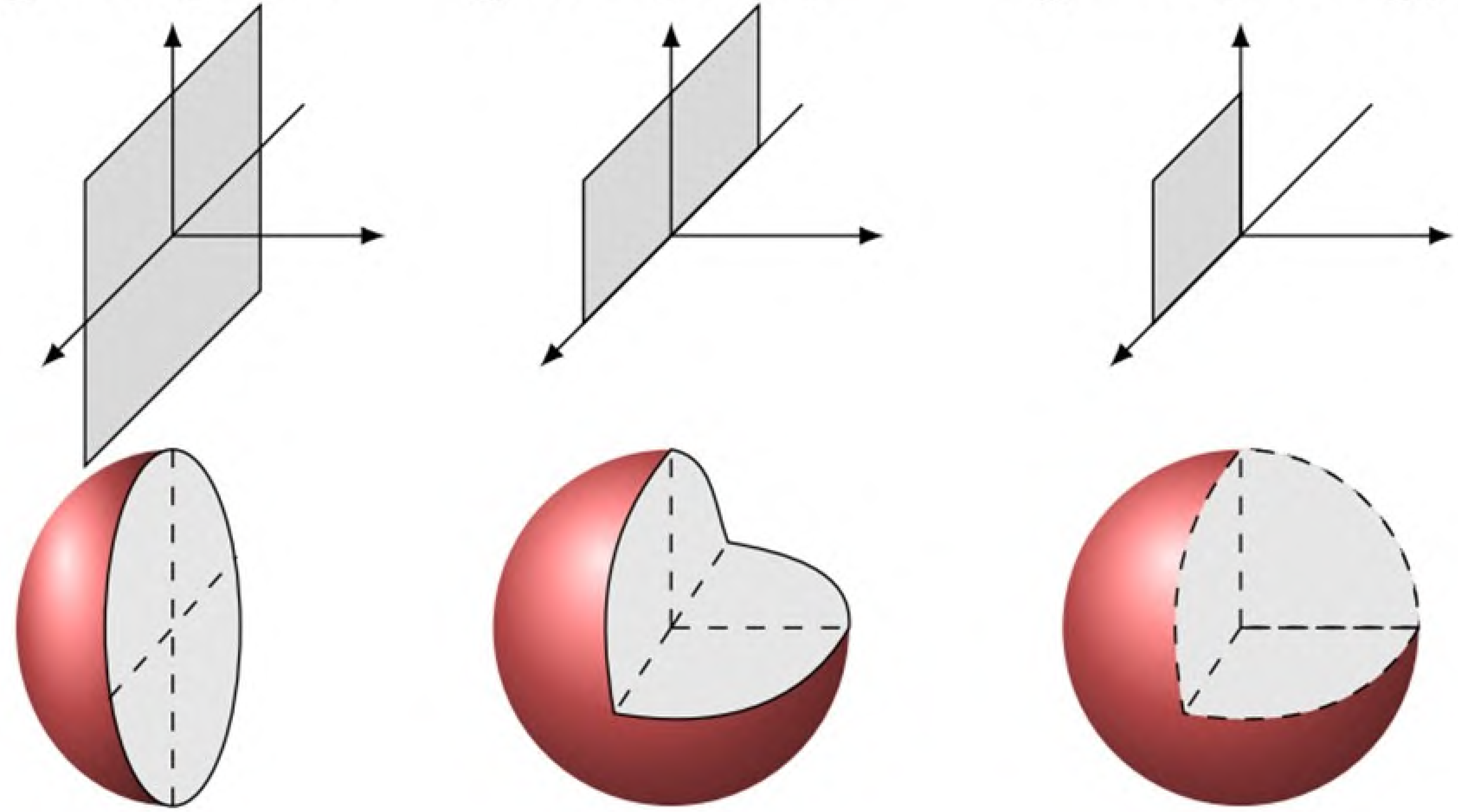
$$d\Omega_p = d\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|^3}$$





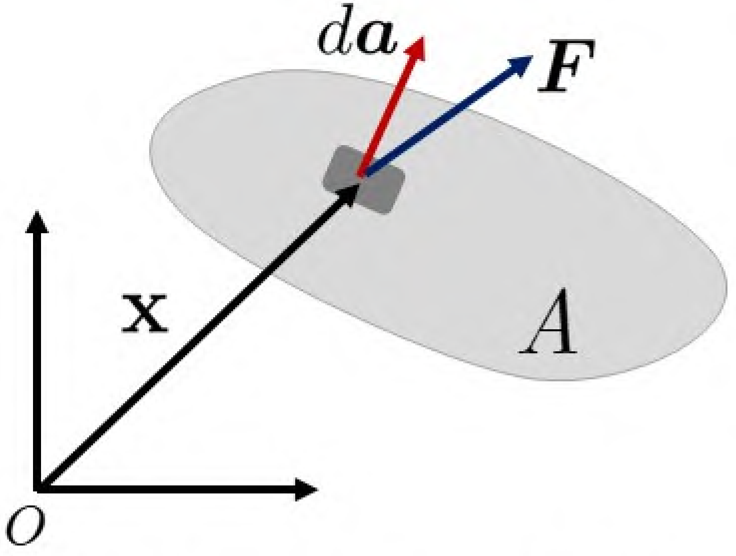
$$\oint d\Omega = \oint d\boldsymbol{a} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{در صورتی که نقطه‌ی مشاهده } (\mathbf{x}') \text{ بیرونِ سطحِ بسته باشد} \\ 4\pi & \text{در صورتی که نقطه‌ی مشاهده } (\mathbf{x}') \text{ درونِ سطحِ بسته باشد} \end{cases}$$



صفحه‌ی نامتناهی	نیم‌صفحه‌ی نامتناهی	ربع صفحه‌ی نامتناهی
$\Omega = 2\pi$	$\Omega = \pi$	$\Omega = \dfrac{\pi}{2}$

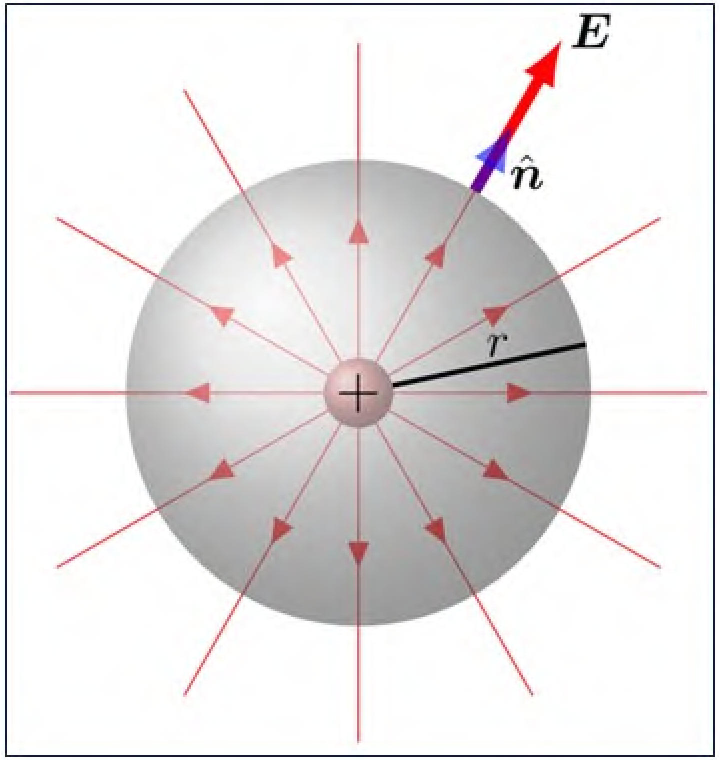
فرض کنید $\boldsymbol{F}(\mathbf{x})$ یک میدانِ برداری و $d\boldsymbol{a}$ بردارِ سطحِ یک عنصرِ سطح باشد. شارِ میدانِ $\boldsymbol{F}(\mathbf{x})$ عبوری از عنصرِ سطحِ da به شکلِ زیر تعریف می‌شود:



$$d\Psi_F = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da$$

که یک کمیت نرده‌ای است. در این‌جا $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح در نقطه‌ی $\mathbf{x}$ است. برای یک مساحتِ دلخواهِ A شارِ کل با انتگرال‌گیری بر روی این سطح به دست می‌آید:

$$\Psi_F = \int_A \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da$$



در پاره‌ای موارد که مسئله دارای تقارن‌های کافی است، برای محاسبه‌ی شار نیازی به روش‌های انتگرال‌گیری نیست. به عنوان مثال شار مربوط به میدانِ یک بارِ نقطه‌ای q را روی سطحِ یک کره حساب می‌کنیم. فرض کنید بارِ q در مرکزِ کره قرار دارد. واضح است که خطوطِ میدان شعاعی است یعنی بر سطحِ کره در هر نقطه عمود است. از سوی دیگر در همه‌ی نقاطِ سطحِ کره، اندازه‌ی میدان یکسان است. بنابر این: $\Psi_E = 4\pi r^2 \mid \boldsymbol{E} \mid$

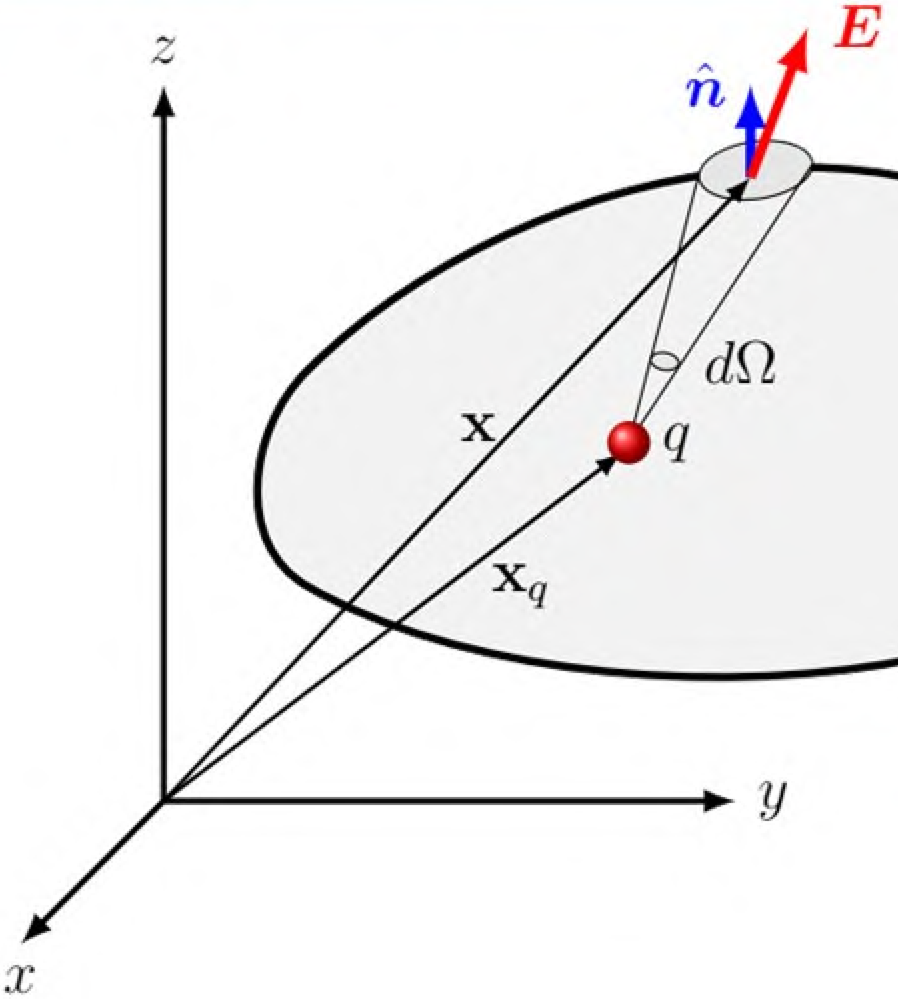
$$|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \text{SI در دستگاهِ یکاهای}$$

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{q}{r^2} \quad \text{cgs در دستگاهِ یکاهای}$$

$$\Psi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{SI در دستگاهِ یکاهای}$$

$$\Psi_E = 4\pi q \quad \text{cgs در دستگاهِ یکاهای}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\boxed{\begin{aligned} d\Psi &= \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_q|^3}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi &= \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da \\ &= \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_q|^3}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint d\Omega \end{aligned}}$$

$$\oint_A \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \begin{cases} \dfrac{q}{\epsilon_0} & \text{اگر سطحِ } A \text{ بارِ } q \text{ را در بر گرفته باشد} \\ 0 & \text{اگر سطحِ } A \text{ بارِ } q \text{ را در بر نگرفته باشد} \end{cases}$$

این همان قانون گوس است

اگر درونِ سطحِ A چندین بارِ نقطه‌ای داشته باشیم، با توجه به اصلِ برهم‌نهی می‌توان نوشت:

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \oint_A \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \sum_{i=1}^{N}\oint_A \mathbf{E}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N'} q_i$$

جمع روی همه‌ی بارهای درونِ سطحِ A گرفته می‌شود

به سادگی می‌توان رابطه‌ی فوق را به یک توزیعِ پیوسته‌ی بار تعمیم داد:

$$\oint_A \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathbf{x})dv$$

V حجمی است که با سطحِ A ساخته می‌شود

$$\oint_A \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da = 4\pi\int_V \rho_v(\mathbf{x})dv \qquad \text{(در دستگاهِ یکاهای cgs)}$$

دانشگاه خوارزمی

قانونِ گوس از معادلات اساسیِ الکتروستاتیک است که نتیجه‌ای است از ویژگی‌های میدانِ الکتریکی:

- ❑ میدانِ الکتریکی یک میدانِ مرکزی است
- ❑ میدانِ الکتریکی عکسِ مجذوری است (نسبت به فاصله)
- ❑ اصلِ برهم‌نهی برایِ آن برقرار است

از آن‌جا که میدانِ گرانشی نیز همین ویژگی ها را دارد،
این قانون برای میدانِ گرانشی نیز برقرار است

قضیه‌ی واگرایی برای میدان الکتریکی $\oint_A \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) dv$

قانون گوس $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathrm{x}) dv$

$$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(\mathrm{x}) \right) dv = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(\mathrm{x})}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال: میدان الکتریکی ناشی از یک توزیعِ بار الکتریکی در فضا به شکل زیر است:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r^3}\mathrm{x}\,; \qquad 0 \le r < \infty}$$

چگالیِ حجمی بار الکتریکی این توزیع بار و نیز بار کل آن را حساب کنید.

حل:

چگالی بار را با استفاده از قانونِ گوس حساب می‌کنیم. $\rho_v(\mathrm{x}) = \epsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\mathrm{x})$

برای محاسبه‌ی واگرایی میدان الکتریکی از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\nabla\cdot(f\boldsymbol{F}) = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{F} + f\nabla\cdot\boldsymbol{F}}$$

$$\boxed{\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathrm{x}}{r^3} \Rightarrow E(\mathrm{x}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}e^{-\alpha r}\nabla\frac{1}{r}; \qquad 0 \le r < \infty}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r^3}\mathrm{x}; \qquad 0 \le r < \infty$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\nabla e^{-\alpha r}\right)\cdot\nabla\frac{1}{r} + e^{-\alpha r}\nabla^2\frac{1}{r}\right] \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(-\alpha e^{-\alpha r}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{-\mathrm{x}}{r^3} + e^{-\alpha r}\nabla^2\frac{1}{r}\right] \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\alpha e^{-\alpha r}\frac{1}{r^2} - 4\pi e^{-\alpha r}\delta(\boldsymbol{x})\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{-q\alpha e^{-\alpha r}}{4\pi r^2} + q\delta(\boldsymbol{x})\right]
\end{aligned}$$

$$\rho_v = \frac{-q\alpha e^{-\alpha r}}{4\pi r^2} + q\delta(\mathrm{x})$$

دانشگاه خوارزمی

برای محاسبه‌ی بارِ الکتریکیِ کل کافی است روی همه‌ی فضا از تابع چگالی انتگرال بگیریم:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{tot} &= \int \rho_v dv = \int_0^\infty \frac{-q\alpha e^{-\alpha r}}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr + q\int_0^\infty \delta(\mathrm{x}) 4\pi r^2 dr \\ &= q e^{-\alpha r}\Big|_0^\infty + q \\ &= -q + q = 0 \end{aligned}}$$

بار الکتریکیِ کل را می‌توانستیم با استفاده از شکلِ انتگرالی قانون گوس نیز محاسبه کنیم. اگر Q_r بار محصور شده در کره‌ای به شعاعِ r باشد، آن‌گاه طبق قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da = \frac{Q_r}{\epsilon_0}$$

که در آن S سطح کروی به شعاعِ r حول مبدأ مختصات است.

$$\boxed{Q_r = \epsilon_0 \oint_S E da = 4\pi r^2 E = q e^{-\alpha r}}$$

$$\boxed{Q_{tot} = \lim_{r\to\infty} Q_r = \lim_{r\to\infty} q e^{-\alpha r} = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید