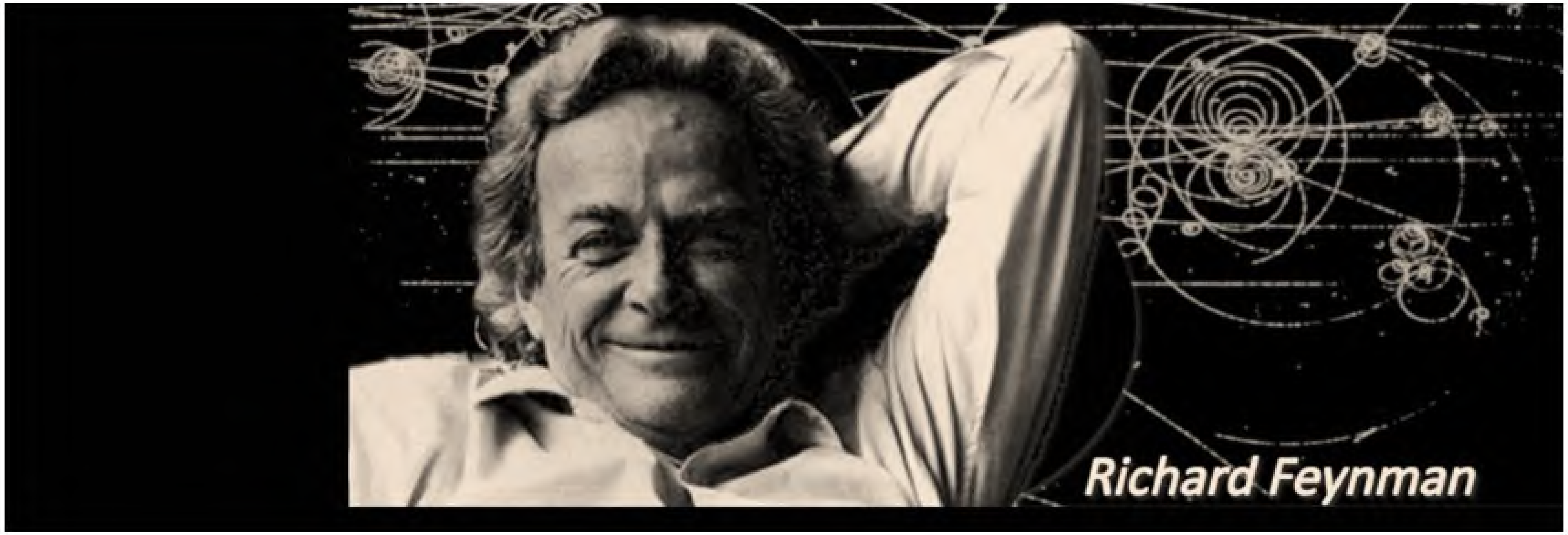
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس هفتم
پتانسیل الکتریکی

Electric Potential

دانشگاه خوارزمی

دیدیم که واگرایی میدان الکتریکی در هر نقطه با چگالی بار در آن نقطه تعیین می‌شود (قانون گوس). اما برای تعیین یک میدان برداری، دانستنِ واگرایی آن کافی نیست بلکه لازم است چرخش (curl) آن را نیز در هر نقطه از فضا داشته باشیم.

ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}'}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\hat{\boldsymbol{j}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\ &= \frac{-(x-x')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\\ &= -\frac{(x-x')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=-\frac{(y-y')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=-\frac{(z-z')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} = -\hat{\boldsymbol{i}}\,\frac{(x-x')}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3} - \hat{\boldsymbol{j}}\,\frac{(y-y')}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3} - \hat{\boldsymbol{k}}\,\frac{(z-z')}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3} = -\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}'}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathrm{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathrm{x}')\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}'}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3}dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathrm{x}')\left[-\nabla\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}\right]dv' \\ &= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_v(\mathrm{x}')}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}dv'\right]\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = -\nabla\Phi(\mathrm{x})$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_v(\mathrm{x}')}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}dv'$$

میدان الکتریکی یک میدان پایستار است

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = -\nabla\Phi(\mathrm{x})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = 0}$$

با توجه به قضیه‌ی استوکس:

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

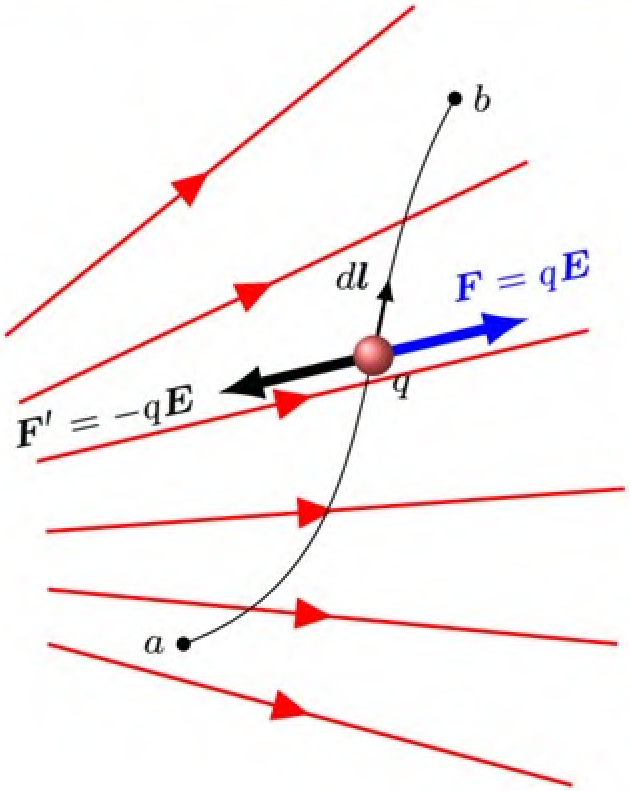
معادله‌ی پواسون

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\mathrm{x}) = \dfrac{\rho_v(\mathrm{x})}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi(\mathrm{x}) = -\frac{\rho_v(\mathrm{x})}{\epsilon_0}}$$

در نقاطی که چگالی بار صفر است:

$$\nabla^2\Phi(\mathrm{x}) = 0$$

معادله‌ی لاپلاس



$$W_{ext} = \int_a^b F' \cdot d\boldsymbol{l} = -q_0 \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -W_E$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$$

$$\begin{aligned} W_{ext} &= -q_0 \int_a^b (-\nabla\Phi) \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= q_0 \int_a^b d\Phi \\ &= q_0\Big(\Phi(b) - \Phi(a)\Big) \end{aligned}$$

$q_0\Phi$ به عنوانِ انرژیِ پتانسیلِ بارِ q_0 در میدانِ E تعبیر می‌شود. در واقع کارِ عاملِ خارجی برابر با اختلافِ انرژیِ پتانسیل نقاطِ a و b است.

$$W_{ext} = \Delta U = U_b - U_a = q_0\Big(\Phi(b) - \Phi(a)\Big)$$

$$\Delta\Phi = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{W_{ext}}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0}$$

$$1\text{V} = \frac{1\text{J}}{1\text{C}}$$

$$\Phi(\text{x}) = -\int_{\text{x}_{ref}}^{\text{x}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

نشان دهید: $$\nabla^2 \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} = -4\pi\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')$$

حل:

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم: $\boldsymbol{R} = \mathrm{x}-\mathrm{x}'$ واضح است که: $\nabla^2_{\mathrm{x}} = \nabla^2_{\boldsymbol{R}}$

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathrm{x}} \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} &= \nabla^2_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{|\boldsymbol{R}|} \\
&= \nabla^2_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{R} \\
&= \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[R\frac{1}{R}\right] \\
&= \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}[1] \\
&= 0 \qquad (R \neq 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla^2 \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} dv &= \int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} dv \\
&= \oint_S \left(\nabla \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}\right)\cdot \hat{\boldsymbol{n}} da \\
&= \oint_S \left(-\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}'}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|^3}\right)\cdot \hat{\boldsymbol{n}} da \\
&= -\oint_S d\Omega \\
&= -4\pi
\end{aligned}$$

پتانسیل الکتریکی را به شکل زیر تعریف کردیم.

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_v(\mathrm{x}')}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}dv'$$

با اثرِ عملگرِ لاپلاسی بر این رابطه، معادله‌ی پواسون را به دست آورید

حل:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\Phi(\mathrm{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathrm{x}')\nabla^2\frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_v(\mathrm{x}')\Big(-4\pi\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\Big)dv' \\ &= -\frac{\rho_v(\mathrm{x})}{\epsilon_0}\end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

روش دوم

$$\Phi_a(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv'\rho(\mathrm{x}')\frac{1}{\sqrt{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |^2\ + a^2}}$$

$$\lim_{a\to 0}\Phi_a(\mathrm{x}) = \Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathrm{x}')}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}dv'$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\xi = \mathrm{x}' - \mathrm{x} \Rightarrow dv' = dx'dy'dz' = d\xi_x d\xi_y d\xi_z = d^3\xi; \qquad \nabla^2_{\mathrm{x}'} = \nabla^2_{\xi}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi_a(\mathrm{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho_v(\mathrm{x}+\xi)\nabla^2\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + a^2}}d^3\xi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho_v(\mathrm{x}+\xi)\frac{-3a^2}{\left(\xi^2 + a^2\right)^{5/2}}d^3\xi\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

اگر $a\neq 0$ آن‌گاه تابع درونِ انتگرال، همه جا (به ازای همه‌ی مقادیرِ ξ) خوش تعریف است. اما اگر $a=0$ آن‌گاه به ازای $\xi\neq 0$ انتگرال صفر می‌شود (از درجه‌ی a^2) .و به ازای $\xi=0$ تکینگی وجود دارد.

فضا را به دو ناحیه‌ی $\xi<R$ و $R<\xi$ (درون و بیرونِ کره‌ای به شعاعِ R) تقسیم می‌کنیم .

$$\nabla^2\Phi_a(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\xi<R}\rho_v(\mathrm{x}+\xi)\frac{-3a^2}{\left(\xi^2+a^2\right)^{5/2}}d^3\xi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\xi>R}\rho_v(\mathrm{x}+\xi)\frac{-3a^2}{\left(\xi^2+a^2\right)^{5/2}}d^3\xi$$

انتگرالِ دوم شاملِ نقطه‌ی $\xi=0$ نمی‌شود. بنابر این وقتی که a به سمت صفر میل کند، این انتگرال صفر می‌شود (از درجه‌ی a^2) بنابر این:

$$\nabla^2\Phi_a(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\xi<R}\rho_v(\mathrm{x}+\xi)\frac{-3a^2}{\left(\xi^2+a^2\right)^{5/2}}d^3\xi + O(a^2)$$

دانشگاه خوارزمی

در انتگرالِ فوق، بسطِ تیلورِ چگالی را می‌نویسیم. با محاسباتی نه چندان کوتاه! نتیجه می‌گیریم:

$$\nabla^2\Phi_a(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_v(\mathrm{x})\left[1 + O\left(a^2, \frac{a^2}{R^2}\right)\right] - \frac{1}{\epsilon_0}\nabla^2\rho_v(\mathrm{x})\left[O(a^2, a^2 \ln a)\right] + \cdots$$

$$\lim_{a\to 0}\nabla^2\Phi_a(\boldsymbol{x}) = \nabla^2\Phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\rho_v(\boldsymbol{x})}{\epsilon_0}$$

بار الکتریکی با تقارن کروی در فضا گسترده است. مقدارِ بارِ درون کره‌ای به شعاعِ r از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$Q_r = q\,\frac{r^2}{R^2}\left(e^{-r/R} - e^{-2r/R}\right)$$

که در آن R مقدار ثابتی است. نشان دهید پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار (با فرضِ صفر بودنِ پتانسیل در بی‌نهایت) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(e^{-r/R} - \frac{e^{-2r/R}}{2}\right)$$

هم‌چنین نشان دهید چگالی بار الکتریکی در مبدأ مختصات برابر است با: $\dfrac{3q}{4\pi R^3}$

حل: با توجه به تقارنِ کرویِ بارِ الکتریکی، انتظار داریم که میدان الکتریکی نیز تقارن کروی داشته باشد:

$$\boldsymbol{E} = E(r)\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

بنابر این با توجه به شکلِ انتگرالِ قانون گوس به سادگی دیده می‌شود:

$$\boxed{\oint E da = \frac{Q_r}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(e^{-r/R} - e^{-2r/R}\right)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(e^{-r/R} - e^{-2r/R}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi} \qquad \boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(e^{-r/R} - e^{-2r/R}\right)}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(e^{-r/R} - e^{-2r/R}\right)$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(e^{-r/R} - \frac{e^{-2r/R}}{2}\right) + C$$

$$(\lim_{r\to\infty}\Phi(r) = 0) \Rightarrow C = 0$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(e^{-r/R} - \frac{e^{-2r/R}}{2}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

چگالیِ بار الکتریکی را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\rho_v = \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(e^{-r/R} - e^{-2r/R}\right)\right] = \frac{q}{4\pi R^2} e^{-\frac{2r}{R}}\left[\frac{\left(2 - e^{r/R}\right)}{R} + \frac{2\left(e^{r/R} - 1\right)}{r}\right]$$

برای ارزیابی مقدار چگالی بار در مبدأ مختصات، بسط مک‌لوران تابع $e^{r/R}$ را می‌نویسیم:

$$e^{r/R} = 1 - \frac{r}{R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} + \cdots$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\left(2 - e^{r/R}\right)}{R} = \frac{1}{R} \qquad \lim_{r\to 0}\frac{2\left(e^{r/R} - 1\right)}{r} = \frac{2}{R} \qquad \lim_{r\to 0} e^{-2r/R} = 1 \qquad \lim_{r\to 0}\rho_v = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

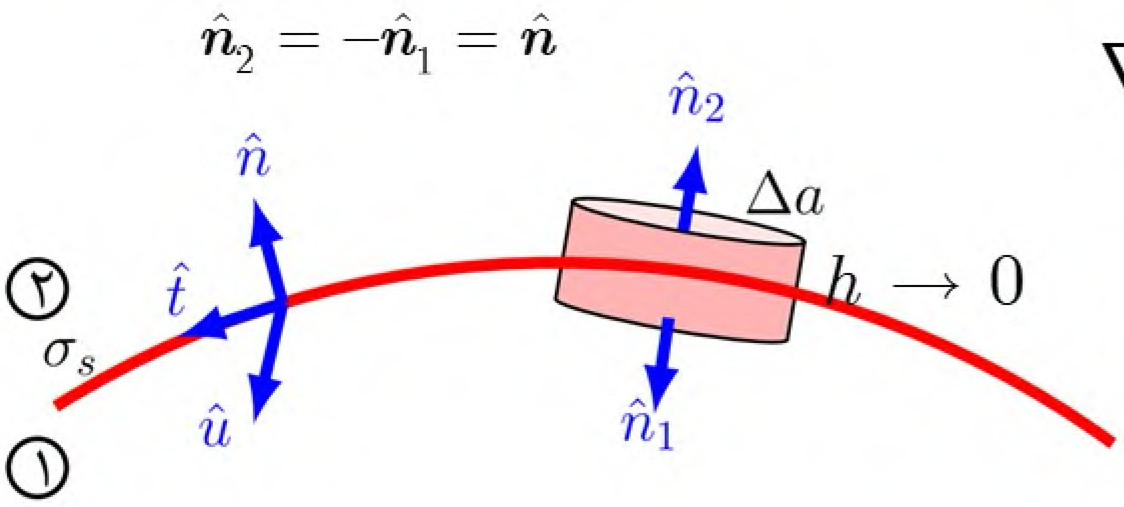
دانشگاه خوارزمی

تا این‌جا با دو قانون مهم در الکتروستاتیک آشنا شده‌ایم

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

با استفاده از این دو قانون می‌خواهیم در مورد پیوستگی میدان الکتریکی هنگام عبور از یک توزیع سطحی بار بحث کنیم



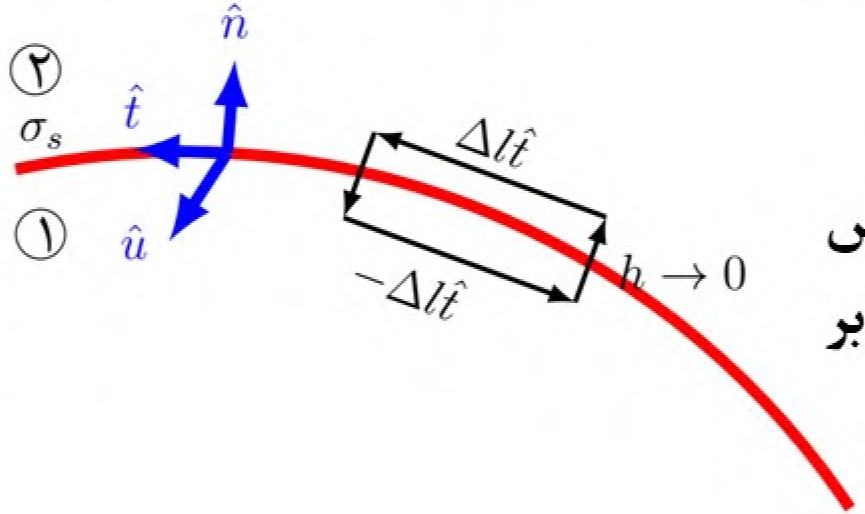
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\oint \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da &= \int_{bot} \boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 da \\ &+ \int_{top} \boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 da \\ &+ \int_{sidc} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}' da \\ &= \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \Delta a\end{aligned}}$$

وقتی ارتفاعِ استوانه به سمت صفر میل می کند، انتگرال روی سطحِ جانبی صفر می‌شود. انتگرال روی دو قاعده نیز به شکلِ زیر خواهد بود:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{bot} \boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 da + \int_{top} \boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 da &= \int_{bot} -\boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da + \int_{top} \boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} da \\ &= \boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Delta a - \boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Delta a\end{aligned}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}}$$



$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0}$$

مطابقِ شکل، حلقه‌ی کوچک مستطیلی در نظر می‌گیریم که اضلاعِ طولیِ آن مماس بر سطح و در دو طرفِ سطح قرار دارند و عرضِ آن به سمتِ صفر میل می‌کند. بنابر این می‌توان نوشت:

$$\boxed{\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{l} - \boldsymbol{E}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{l} = (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot \Delta l\hat{\boldsymbol{t}} = 0}$$

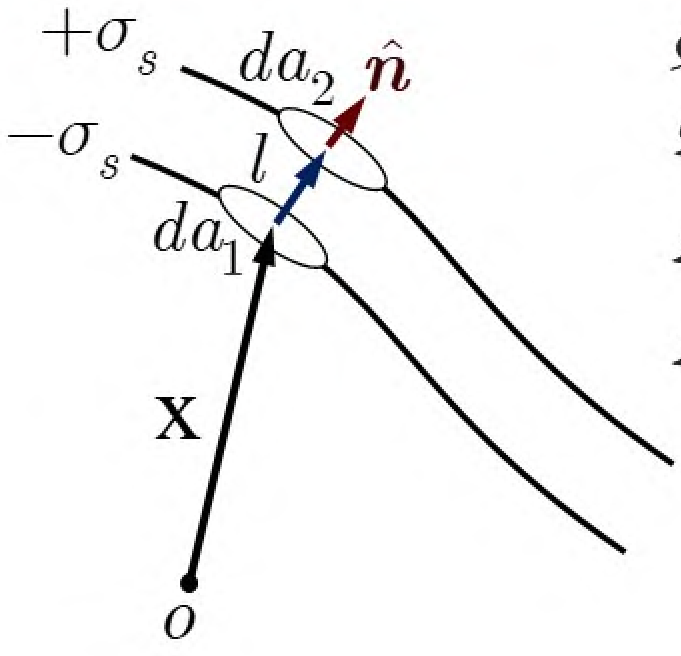
$$\boxed{(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}}$$

به بیانِ دیگر مؤلفه‌ی مماسی میدانِ الکتریکی بر روی سطح، پیوسته است.

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \hat{\boldsymbol{u}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \qquad \hat{\boldsymbol{u}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla\Phi_2 - \nabla\Phi_1) = 0$$

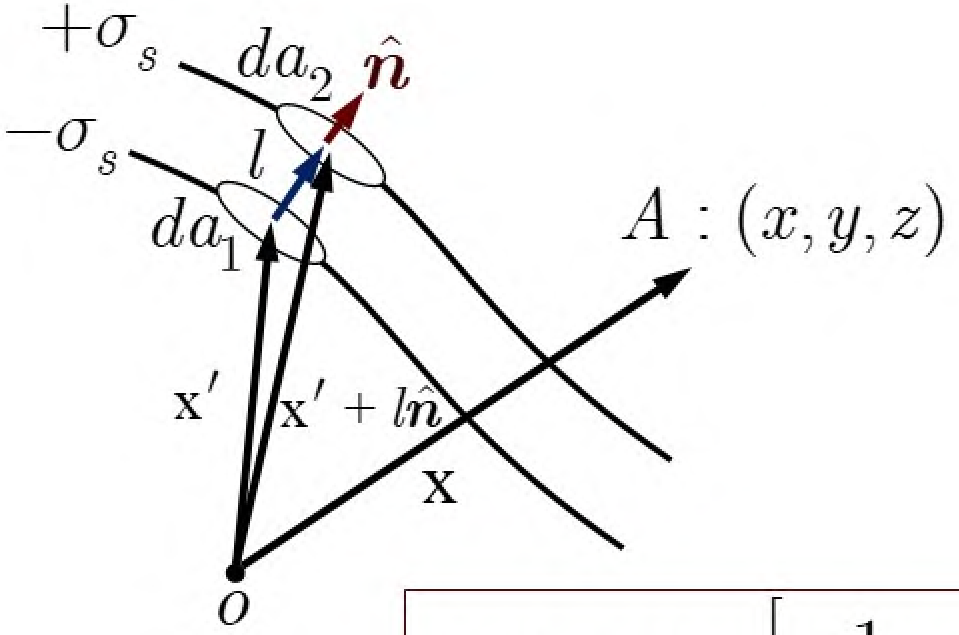
دانشگاه خوارزمی



فرض کنید تعدادِ زیادی دوقطبیِ نقطه‌ای بر رویِ سطحی گسترده باشند. چنین توزیعِ باری را لایه‌ی دوقطبی می‌نامیم. این توزیعِ بار را می‌توان به صورتِ دو سطحِ باردار S_1 و S_2، هر یک با چگالی‌های سطحیِ بار $-\sigma_s$ و $+\sigma_s$ در نظر گرفت که در فاصله‌ی بسیار نزدیک به هم قرار گرفته‌اند. برای چنین سیستمی شدتِ دوقطبیِ لایه را به شکلِ زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(\mathrm{x}) = \lim_{l \to 0} \sigma_s(\mathrm{x}) l(\mathrm{x})$$

که در آن x بردارِ مکانِ هر نقطه روی سطح و $l(\mathrm{x})$ فاصله‌ی نسبیِ دو سطحِ S_1 و S_2، در هر نقطه است.



می‌خواهیم پتانسیلِ الکتریکی ناشی از این لایه‌ی دو قطبی را در نقطه‌ای از فضا (نقطه‌ی A) به دست آوریم

$$\Phi(\mathrm{x}) = \lim_{l\to 0}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_1}\frac{-\sigma_s(\mathrm{x}')}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}da_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_2}\frac{\sigma_s(\mathrm{x}'+l\hat{\boldsymbol{n}})}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'-l\hat{\boldsymbol{n}}\ |}da_2\right]$$

$$\frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'-l\hat{\boldsymbol{n}}\ |} = \frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |} + (-l\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\nabla_{\mathrm{x}}\frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |} + \cdots$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \lim_{l\to 0}\Big[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_1}\frac{-\sigma_s(\mathrm{x}')}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|}da_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_2}\frac{+\sigma_s(\mathrm{x}'+l\hat{\boldsymbol{n}})}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|}da_2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_2}\sigma_s(\mathrm{x}'+l\hat{\boldsymbol{n}})(-l\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\nabla_{\mathrm{x}}\frac{1}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|}da_2 + \cdots\Big]$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_1}\sigma_s(\mathrm{x}')(-l\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\nabla_{\mathrm{x}}\frac{1}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|}da_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_1}D(\mathrm{x}')(-\hat{\boldsymbol{n}})\cdot\frac{-(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|^3}da_1$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\mathrm{x}')\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|^3}da'$$

یادآوری می‌کنیم که پتانسیلِ الکتریکیِ ناشی از یک دو قطبیِ نقطه‌ایِ واقع در نقطه‌ی $\mathbf{x}'$ در نقطه‌ی مشاهده‌ی $\mathbf{x}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|^3}$$

بدین ترتیب می‌توان گفت که پتانسیلِ ناشی از لایه‌ی دو قطبی از برهم‌نهیِ مجموعه‌ای از دوقطبی‌های نقطه‌ای با گشتاور دوقطبیِ $d\boldsymbol{p}=D(\mathbf{x})\,d\boldsymbol{a}$ به دست می‌آید:

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S\frac{d\boldsymbol{p}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}'\,|^3}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\mathrm{x}')\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{\mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid^3}da'}$$

از سوی دیگر می‌دانیم که عبارت زیر زاویه‌ی فضایی متناظر با عنصرِ سطحِ da' است که از نقطه‌ی x مشاهده می‌شود.

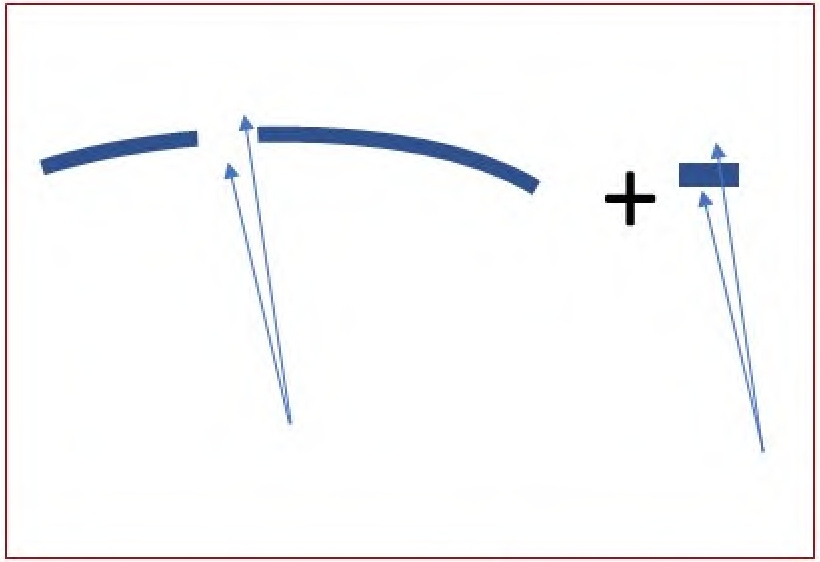
$$\boxed{\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\mathrm{x}'-\mathrm{x})}{\mid \mathrm{x}'-\mathrm{x} \mid^3}da'}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\mathrm{x}')\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{\mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid^3}da' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\mathrm{x}')\frac{\boldsymbol{n}\cdot\left[-(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\right]}{\mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid^3}da' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\mathrm{x}')(-d\Omega)
\end{aligned}$$

در صورتی که شدتِ لایه‌ی دو قطبی یکنواخت باشد، می‌توان نوشت:

$$\boxed{\Phi(\mathrm{x}) = -\frac{D}{4\pi\epsilon_0}\Omega_A}$$

در مورد پیوستگی پتانسیل الکتریکی، هنگام عبور از یک لایه‌ی دوقطبی بحث کنید.



لایه‌ی دوقطبی را متشکل از دو قسمت در نظر می‌گیریم. یکی یک قرص بسیار کوچک و دیگری بقیه‌ی سطح. طبقِ اصلِ برهم‌نهی، پتانسیل سطح مجموع پتانسیلِ ناشی از هر یک از این دو قسمت است. فرض کنید $\Phi_1=\Phi_{a1}+\Phi_{b1}$ پتانسیل در یک طرفِ سطح و $\Phi_2=\Phi_{a2}+\Phi_{b2}$ پتانسیل در طرفِ دیگر باشد، که در آن Φ_a پتانسیلِ ناشی از قرص و Φ_b ناشی از باقیِ سطح است. هنگام عبور از سطح، $\Phi_{b1}=\Phi_{b2}$ (زیرا در واقع از حفره عبور می‌کنیم) بنابر این هنگام عبور از سطح می‌توان نوشت:

$$\Phi_2-\Phi_1=-\frac{D}{4\pi\epsilon_0}\Omega_2+\frac{D}{4\pi\epsilon_0}\Omega_1$$

اما زاویه‌ی فضاییِ قرص، وقتی از نقطه‌ای بسیار نزدیک به آن مشاهده شود، اگر نقطه‌ی مشاهده در ناحیه‌ی 1 باشد برابر با 2π و اگر نقطه‌ی مشاهده در ناحیه‌ی 2 باشد، برابر با -2π خواهد بود. بنابر این

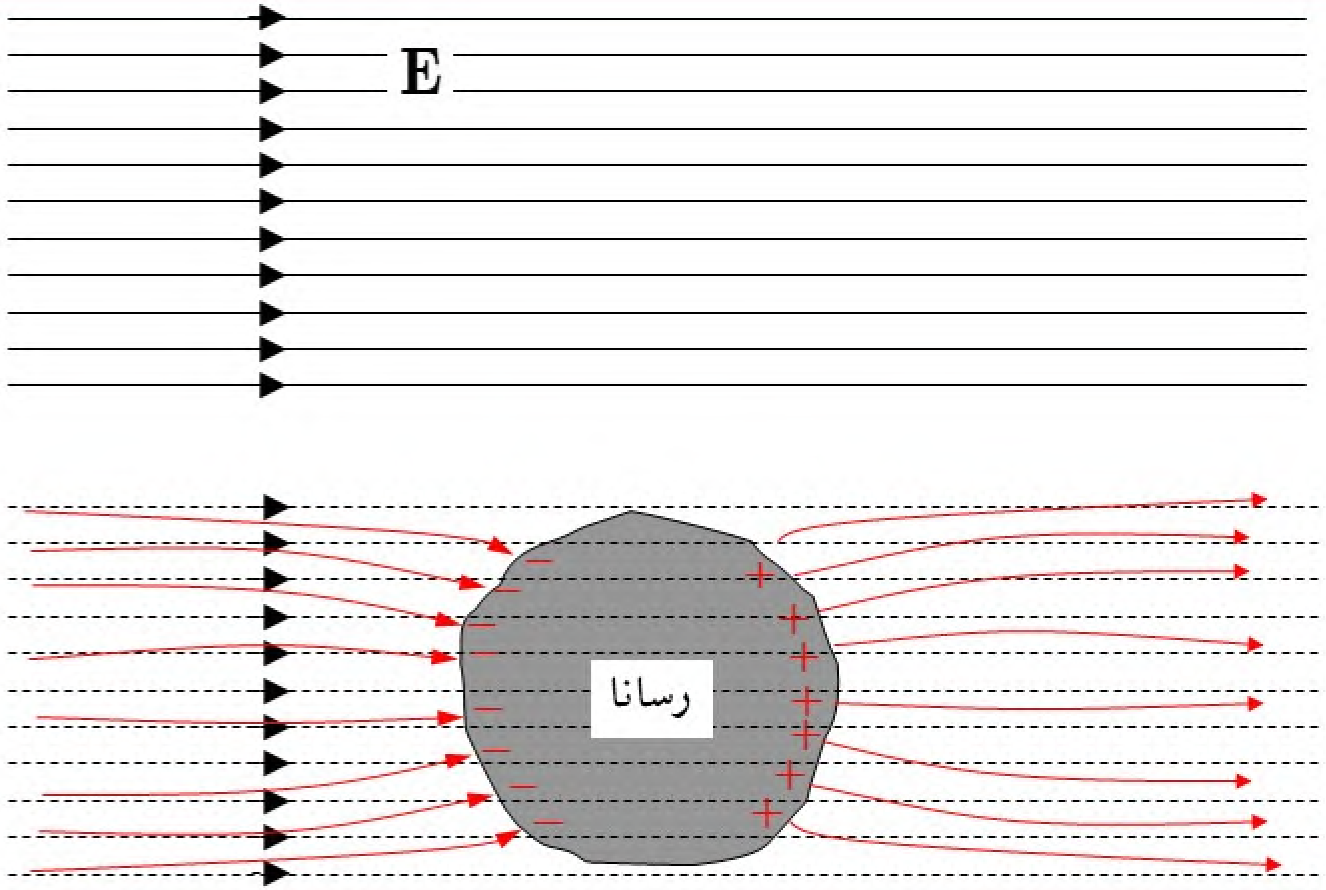
$$\Phi_2-\Phi_1=-\frac{D}{4\pi\epsilon_0}(-2\pi)+\frac{D}{4\pi\epsilon_0}(2\pi)=\frac{D}{\epsilon_0}$$

مواد از لحاظ رسانندگی الکتریکی به سه دسته تقسیم می‌شوند:

- ✓ رسانا
- ✓ نیم رسانا
- ✓ نارسانا

رساناها دارای تعداد زیادی بار الکتریکی هستند که می‌توانند آزادانه درون رسانا حرکت کنند. فلزات (در حالت مایع و یا جامد)، محلول‌های آبی نمکی و اسیدی و بسیاری مواد دیگر از جمله‌ی رساناها هستند. در این جا منظور ما از رسانا، فلزات جامدند.

دانشگاه خوارزمی



رسانایی را درون میدان الکتریکی قرار می‌دهیم. تحت اثر میدان الکتریکی، بارهای آزاد رسانا شروع به حرکت می‌کنند و در نتیجه‌ی آن، بر روی سطوح متقابل رسانا بارهای الکتریکی با علامت مخالف ظاهر می‌شوند. این بارها را بارهای القایی می‌نامیم.

با استفاده از قانونِ گوس و پایستار بودنِ میدانِ الکتریکی می‌توان مواردِ زیر را در موردِ رساناها نتیجه گرفت:

۱. در داخلِ رسانا هیچ بارِ اضافی ساکنی وجود ندارد. زیرا می‌دانیم $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_\circ$ و اگر $\rho \neq \circ$ باشد، آن‌گاه در داخلِ رسانا میدان الکتریکی مخالفِ صفر خواهد شد و اگر میدان الکتریکی صفر نباشد جریانِ الکتریکی برقرار می‌شود و دیگر وضعیت ایستا (استاتیک) نیست. بنابر این اگر رسانایی باردار باشد بارِ آن بایستی در سطحِ خارجیِ آن پخش شود.

۲. سطحِ رسانا یک سطحِ هم‌پتانسیل است.

۳. میدانِ الکتریکی در خارجِ رسانا، بر سطحِ آن در هر نقطه عمود است.

۴. اندازه‌ی میدانِ الکتریکی در سطح رسانا برابر است با: $\sigma_s/\epsilon_\circ$

$$E = E_n = \frac{\sigma_s}{\epsilon_\circ}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید