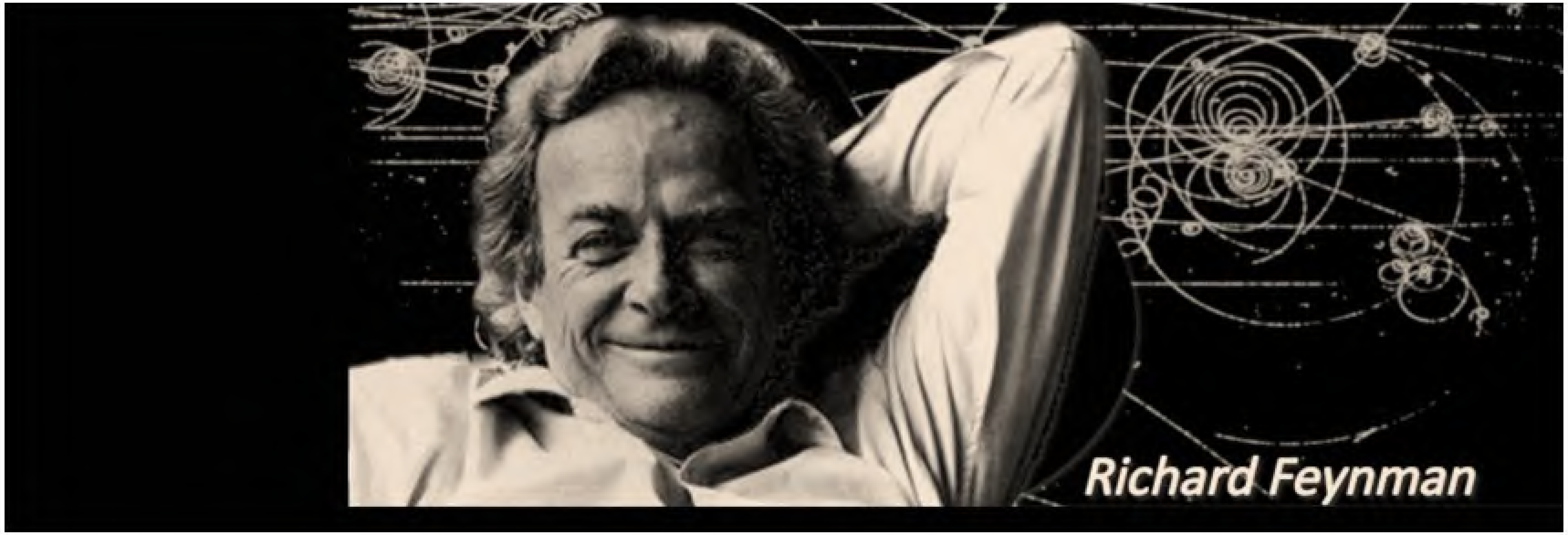
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس هشتم
اتحادهای گرین

Green's identities

اگر مسائلِ الکترومغناطیس فقط شامل توزیع‌های بار الکتریکی بود و هیچ سطوح مرزی وجود نداشت، رابطه‌ی

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathrm{x}')}{|\ \mathrm{x} - \mathrm{x}'\ |} d^3\mathrm{x}'$$

پاسخِ مناسبِ مسئله بود و دیگر نیازی به حلِ معادله‌ی لاپلاس یا پواسون نداشتیم. اما در بسیاری مسائل با ناحیه‌ی محدودی از فضا سروکار داریم که روی سطوحِ محدود کننده، شرایطِ مرزیِ خاصی برقرار است و در آن فضا ممکن است بارِ الکتریکی باشد یا نباشد.

شرایط مرزی

شرط دیریکله

مقدار پتانسیل بر روی سطح معلوم است

$$\Phi\Big|_{\mathrm{x}\in S} = f(\mathrm{x})$$

f تابعی معلوم است

شرط نیومن

مشتق عمودی پتانسیل بر روی سطح معلوم است

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_{\mathrm{x}\in S} = g(\mathrm{x})$$

g تابعی معلوم است

دانشگاه خوارزمی

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,d^3\mathrm{x} = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,da$$ قضیه‌ی واگرایی

اگر در قضیه‌ی واگرایی قرار دهیم: $\boldsymbol{A} = u\nabla v$

که در آن u و v توابع نرده‌ای دلخواهی هستند، آن‌گاه:

$$\int_V \nabla\cdot\left(u\nabla v\right)d^3\mathrm{x} = \oint_S u\nabla v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,da$$

$$\int_V \left(\nabla u\cdot\nabla v + u\nabla^2 v\right)d^3\mathrm{x} = \oint_S u\nabla v\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,da$$

$$\int_V \left(\nabla u\cdot\nabla v + u\nabla^2 v\right)d^3\mathrm{x} = \oint_S u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,da$$ اتحاد اول گرین

$\nabla v\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \dfrac{\partial v}{\partial n}$ مشتق عمودی v بر روی سطح است

دانشگاه خوارزمی

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d^3\mathrm{x} = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, da$$ **قضیه‌ی واگرایی**

در قضیه‌ی واگرایی قرار می‌دهیم: $\boldsymbol{A} = u\nabla v - v\nabla u$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \left(u\nabla v - v\nabla u \right) = u\nabla^2 v - v\nabla^2 u$$

$$\int_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u \right) d^3\mathrm{x} = \oint_S \left(u\nabla v - v\nabla u \right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, da$$

اتحاد دوم گرین یا قضیه‌ی گرین:

$$\int_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u \right) d^3\mathrm{x} = \oint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) da$$

در قضیه گرین، u و v توابع نرده‌ای دلخواهی هستند. این قضیه را برای حالت خاص به کار می‌بریم.

توابع u و v را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$\boxed{u(\mathrm{x}') = \frac{1}{|\,\mathrm{x} - \mathrm{x}'\,|}\,; \qquad v(\mathrm{x}') = \Phi(\mathrm{x}')}$$

که $\Phi(\mathrm{x})$ پتانسیل الکتریکی ناشی از یک توزیع بار الکتریکی در حجم V است.

$$\boxed{\nabla'^2 u(\mathrm{x}') = -4\pi\delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}')\,; \qquad \nabla'^2 v(\mathrm{x}') = \nabla'^2\Phi(\mathrm{x}') = -\frac{\rho(\mathrm{x}')}{\epsilon_0}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int_V \left[-\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}\frac{\rho(\mathrm{x}')}{\epsilon_0} + \Phi(\mathrm{x}')4\pi\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}') \right] d^3\mathrm{x}' = \oint_S \left[\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} \right] da'$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathrm{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} \right] da'$$

$$\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} = \nabla' \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\Phi(\mathrm{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathrm{x}')}{4\pi\epsilon_0 \mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid} d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{\mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid}\frac{\partial \Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid} \right] da'}$$

اگر سطحِ S در بی‌نهایت باشد و پتانسیل الکتریکی سریع‌تر از $1/|\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x}'|$ به سمت صفر میل کند، به سادگی دیده می‌شود که انتگرال سطحی صفر می‌شود. در نتیجه همان‌طور که انتظار داریم:

$$\Phi(\mathrm{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathrm{x}')}{4\pi\epsilon_0 \mid \mathrm{x}-\mathrm{x}' \mid} d^3\mathrm{x}'$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma_s(\mathrm{x}')}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}da'$$ ← پتانسیل الکتریکی ناشی از یک توزیع سطحیِ بار σ_s

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\boldsymbol{x}')\nabla'\frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}'da'$$ ← پتانسیل الکتریکی ناشی از یک لایه‌ی دوقطبی با شدتِ D

$$\boxed{\Phi(\mathrm{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathrm{x}')}{4\pi\epsilon_0\ |\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\ \mathrm{x}-\mathrm{x}'\ |}\right]da'}$$

بنابر این می‌توان گفت که این رابطه یک پاسخ مسئله‌ی مقدار مرزی نیست، بلکه عبارتی انتگرالی است که بیان می‌کند پتانسیل از یک چگالی حجمی ρ_v درونِ حجمِ V و همچنین یک توزیعِ سطحیِ بار $\sigma_s = \epsilon_0\partial\Phi/\partial n$ بر روی سطحِ S و یک دوقطبیِ لایه‌ای با شدتِ $D = -\epsilon_0\Phi$ بر روی سطحِ S، به دست می‌آید.

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی