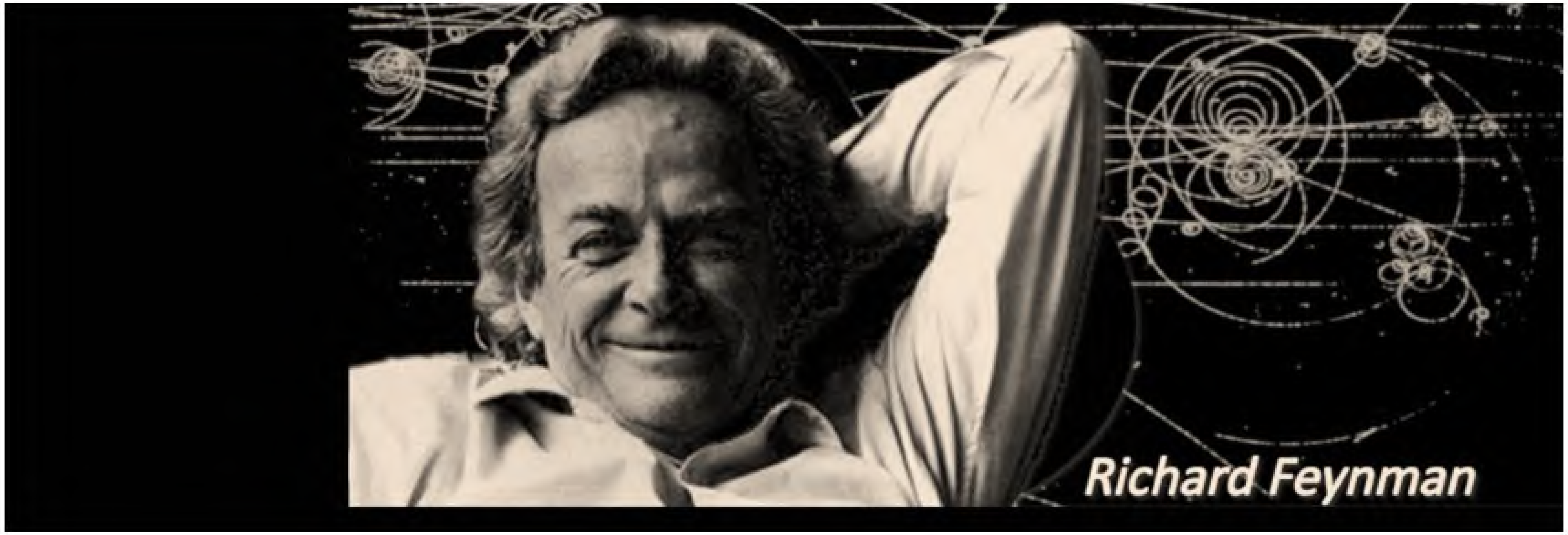
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس نهم
تابع گرین برای معادله‌ی پواسون

Green's Functions for Poisson Equation

دانشگاه خوارزمی

در قضیه‌ی گرین (اتحاد دوم گرین) با جاگذاری $u=1/|\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x}'|$ و $v=\Phi$ یک معادله‌ی انتگرالی برای پتانسیل به دست آوردیم. در این‌جا می‌خواهیم با معرفیِ تابعِ گرین، به همراهِ شرایطِ مرزیِ نیومن یا دیریکله، یک پاسخ صوری برای **معادله‌ی پواسون** به دست آوریم.

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی پواسون را با شرط مرزی دیریکله حل کنیم

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathrm{x}) = -\frac{\rho(\mathrm{x})}{\epsilon_0} \qquad\qquad \Phi\Big|_{\mathrm{x}\in \mathrm{S}} = f(\mathrm{x})}$$

تابع $G(\mathrm{x},\mathrm{x}')$ را به نام **تابع گرین** در نظر می‌گیریم که در معادله‌ی دیفرانسیل زیر با **شرط مرزی همگن** (بر روی مرز) صدق کند

$$\boxed{\nabla^2 G(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \nabla'^2 G(\mathrm{x},\mathrm{x}') = -4\pi\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}') \qquad\qquad G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')\Big|_{\mathrm{x}'\in \mathrm{S}} = 0}$$

تابعی به این شکل را **تابع گرین پاسخ معادله‌ی پواسون** می‌نامیم.

نشان خواهیم داد با داشتنِ تابع گرین این معادله، پاسخ معادله‌ی پواسون را به دست می‌آوریم

می‌توان یک دسته توابع عام برای پاسخ معادله‌ی فوق نوشت:

$$G(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} + F(\mathrm{x}-\mathrm{x}')$$

به شرطی که: $\nabla^2 F(\mathrm{x}-\mathrm{x}') = 0$

اگر در قضیه‌ی گرین قرار دهیم: $v=\Phi$ و $u=G(\mathrm{x},\mathrm{x}')$ ، آن‌گاه رابطه‌ی زیر برای پتانسیل به دست می‌آید

$$\boxed{\Phi(\mathrm{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathrm{x}')G(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G(\mathrm{x},\mathrm{x}')\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'}-\Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial G(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}\right]da'}$$

اگر تابع گرین روی سطح معلوم و مقدار آن صفر باشد $G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')\Big|_{\mathrm{x}'\in S}=0$

$$\boxed{\Phi(\mathrm{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathrm{x}')G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}'-\frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}da'}$$

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی پواسون را با **شرط مرزی نیومن** حل کنیم

$$\nabla^2\Phi(\mathrm{x}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}, \qquad \left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\Phi\right)\Big|_{\mathrm{x}\in S} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{x\in S} = g(\mathrm{x})$$

بر خلافِ تابعِ گرینِ دیریکله، نمی‌توان مشتقِ عمودیِ تابع گرین را بر رویِ سطح صفر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}\Big|_{\mathrm{x}'\in S} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla' G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')\Big|_{\mathrm{x}'\in S} ?=?\, 0$$

اگر در قضیه‌ی گرین قرار دهیم: $v = F$ و $u = G(\mathrm{x},\mathrm{x}')$ آن‌گاه رابطه‌ی زیر برای پتانسیل به دست می‌آید

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathrm{x}')G(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G(\mathrm{x},\mathrm{x}')\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial G(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}\right]da'$$

$$\frac{\partial G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}\Big|_{\mathrm{x}'\in S} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla' G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')\Big|_{\mathrm{x}'\in S} ?= ?0$$

برای بررسی این مطلب از معادله‌ی زیر انتگرال می‌گیریم:

$$\nabla^2 G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \nabla'^2 G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}') = -4\pi\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')$$

$$\int_V \nabla'^2 G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' = -4\pi\int_V \delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' = -4\pi$$

$$\int_V \nabla'\cdot\nabla' G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' = -4\pi$$

با استفاده از قضیه‌ی واگرایی

$$\oint_S \hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\nabla' G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')da' = \oint_S \frac{\partial G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}da' = -4\pi$$

بنابر این نمی‌توانیم مشتقِ عمودیِ تابع گرین را بر روی سطح صفر انتخاب کنیم. شرط نیومن را برای مشتقِ تابع گرین به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}\Big|_{\mathrm{x}'\in S} = \hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\nabla' G_N(\mathrm{x},\mathrm{x}')\Big|_{x'\in S} = \frac{-4\pi}{S}$$

که در آن S مساحت سطح است.

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathrm{x}')G(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G(\mathrm{x},\mathrm{x}')\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathrm{x}')\frac{\partial G(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial n'}\right]da'$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \rho(\mathrm{x}')G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left[G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'} + \frac{4\pi}{S}\Phi(\mathrm{x}')\right]da'$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \langle\Phi\rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_V \rho(\mathrm{x}')G(\mathrm{x},\mathrm{x}')d^3\mathrm{x}' + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S G(\mathrm{x},\mathrm{x}')\frac{\partial\Phi(\mathrm{x}')}{\partial n'}da'$$

$$\langle\Phi\rangle_S = \frac{1}{S}\oint_S \Phi(\mathrm{x}')da'$$

برای مسائل خارجی، که مرز در بی‌نهایت است و شرط مرزی

تابع گرین همگن می‌شود این مقدار میانگین برابر با صفر است

خطی بودن

از ویژگی‌های مهم معادله‌ی لاپلاس، خطی بودنِ آن است. یعنی اگر مجموعه‌ای از توابع ... $\phi_1, \phi_2,$ پاسخ‌های معادله‌ی لاپلاس باشند، آن‌گاه ترکیب خطی آن‌ها نیز پاسخ معادله‌ی لاپلاس است.

$$\boxed{\nabla^2 \phi_i(\mathrm{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots \qquad \Phi(\mathrm{x}) = \sum_i a_i \phi_i(\mathrm{x})}$$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(\mathrm{x}) = \sum_i a_i \nabla^2 \phi_i(\mathrm{x}) = 0}$$

هم‌چنین اگر تابع $\phi(k,\mathrm{x})$ پاسخ معادله‌ی لاپلاس باشد (که در آن k کمیتی پیوسته است) $\nabla^2 \phi(k, \mathrm{x}) = 0$ و $a(k)$ تابعی دلخواه از k باشد، آن گاه تابع زیر نیز پاسخ معادله‌ی لاپلاس است.

$$\Phi(\mathrm{x}) = \int a(k) \phi(k, \mathrm{x}) dk = 0$$

دانشگاه خوارزمی

یکتایی اگر دو پاسخِ معادله‌ی پواسون، شرایطِ مرزیِ یکسانی را برقرار کنند، یا با هم برابرند یا اختلاف آن‌ها مقدار ثابتی است

اثبات: فرض می‌کنیم توابع ϕ_1, ϕ_2 در ناحیه‌ای از فضا به حجم V در معادله‌ی پواسون صدق کنند. و شرایطِ مرزیِ یکسانی را برقرار کنند.

$$\boxed{\nabla^2\phi_1(\mathrm{x}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \qquad\qquad \nabla^2\phi_2(\mathrm{x}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}}$$

شرط مرزی ممکن است شرطِ دیریکله و یا شرطِ نیومن باشد.

شرط دیریکله

$$\phi_1\Big|_{\mathrm{x}\in S} = f(\mathrm{x})$$

$$\phi_2\Big|_{\mathrm{x}\in S} = f(\mathrm{x})$$

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

شرط نیومن

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\Big|_{\mathrm{x}\in S} = g(\mathrm{x})$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\Big|_{\mathrm{x}\in S} = g(\mathrm{x})$$

تابع U را به شکل زیر تعریف می کنیم: $U=\phi_2-\phi_1$

واضح است که هم برای شرط دیریکله و هم برای شرط نیومن داریم: $\nabla^2 U = 0$

اگر در اتحاد اول گرین قرار دهیم: $u=v=U$ آن‌گاه:

$$\int_V \left(\nabla U \cdot \nabla U + U \underbrace{\cancel{\nabla^2 U}}_{0}\right) d^3\mathrm{x} = \oint_S U \underbrace{\cancel{\frac{\partial U}{\partial n}}}_{0} da$$

طرف راست تساوی چه برای شرط دیریکله چه برای شرط نیومن، برابر با صفر است. U نیز در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند

$$\int_V \left|\nabla U\right|^2 d^3\mathrm{x} = 0$$

این رابطه بیان می‌کند که انتگرالِ مقادیرِ مثبتِ $|\nabla U|^2$ در حجمِ V برابر با صفر است و این شدنی نیست مگر این که مقدارِ انتگرال‌ده یعنی $|\nabla U|$ برابر با صفر باشد. بنابر این U در تمام ناحیه‌ی V مقدارِ ثابتی است

- اگر شرطِ دیریکله برقرار باشد، مقدارِ U روی سطح صفر است. و از آن‌جا که U در تمامِ حجمِ V ثابت است بایستی با مقدارش روی سطح برابر باشد پس U در تمام حجمِ V برابر با صفر است و در نتیجه در همه‌ی نقاط داریم: $\phi_1 = \phi_2$

- اگر شرطِ نیومن برقرار باشد، مطابق استدلال فوق، باید بپذیریم که پتانسیل در همه‌ی نقاط حجمِ V با مقدارش روی سطح، برابر باشد. اما در این شرایط مقدارِ U را روی سطح نداریم بلکه مشتقِ آن را روی سطح داریم که صفر است. بنابر این می‌توان گفت در همه‌ی نقاط باید مشتقِ U صفر باشد. یا به بیان دیگر در همه‌ی نقاط در حجمِ V مقدار U ثابت است بنابر این در تمام حجمِ V داریم: $\phi_2 - \phi_1 = $ **ثابت**

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی