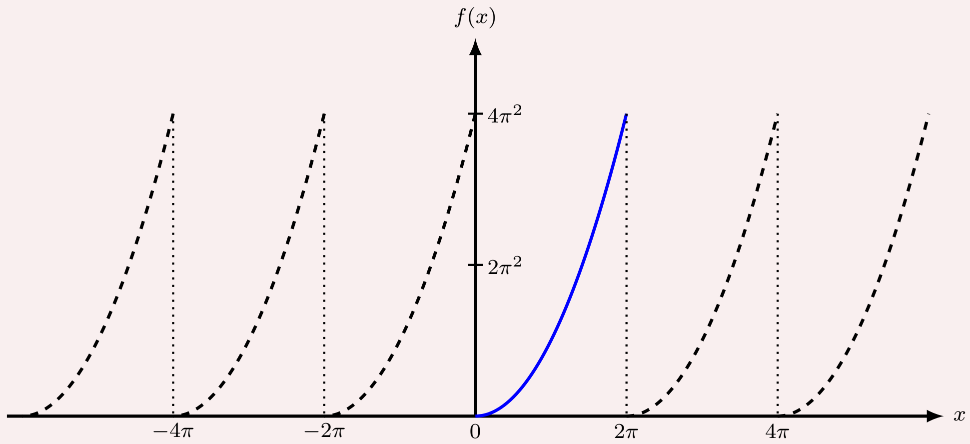
شماره‌ی تکلیف: ۱۶

مسئله‌ی ۱:

سری فوریه‌ی تابع زیر را در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بنویسید

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad 0 < x < 2\pi$$

گسترش دوره‌ای این تابع با دوره‌ی تناوب 2π در شکل زیر رسم شده است.



پاسخ ۱: سری فوریه‌ی متناظر با تابع دوره‌ای $f(x)$ با دوره‌ی تناوب 2π به شکل زیر است

$$f(x) \text{ سری فوریه‌ی متناظر } = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

که ضرایب سری از روابط زیر به دست می‌آیند

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \tag{۱}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1, 2, \cdots \tag{۲}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \quad n = 1, 2, \cdots \tag{۳}$$

بدین ترتیب برای گسترش دوره‌ای تابع $f(x) = x^2$ با دوره‌ی 2π، ضرایب سری فوریه به شکل زیر به دست می‌آیند

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x^2)dx = \frac{8\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x^2)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$
$$a_n = \frac{4}{n^2}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x^2)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2(-\frac{\cos nx}{n}) + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$
$$b_n = \frac{-4\pi}{n}$$

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right) \qquad 0 < x < 2\pi$$

مسئله‌ی ۲:

از نتیجه‌ی مسئله‌ی ۱ استفاده کنید و نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پاسخ ۲: در مسئله‌ی ۱ سری فوریه‌ی تابع $f(x) = x^2$ را در بازه‌ی 0 تا 2πبه دست آوردیم:

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right) \qquad 0 < x < 2\pi$$

در نقطه $x = 0$ گسترش دوره‌ای این تابع پیوسته نیست و این سری طبق قضیه همگرایی به مقدار زیر همگراست

$$\frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)] = 2\pi^2$$

بنابراین:

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

و برای نقطه $x = \pi$ نیز می‌توان نوشت:

$$\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

مسئله‌ی ۳:

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

الف) تبدیل فوریه‌ی این تابع را پیدا کنید.

ب) تابع $f(x)$ و تبدیل فوریه‌ی آن را به ازای $a=3$ رسم کنید.

پاسخ ۳:

$$\begin{aligned}F(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}dx\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a}e^{-ikx}dx\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ika}-e^{-ika}}{ik}\\ &=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ka}{k}\\ &=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ka}{ka}\end{aligned}$$