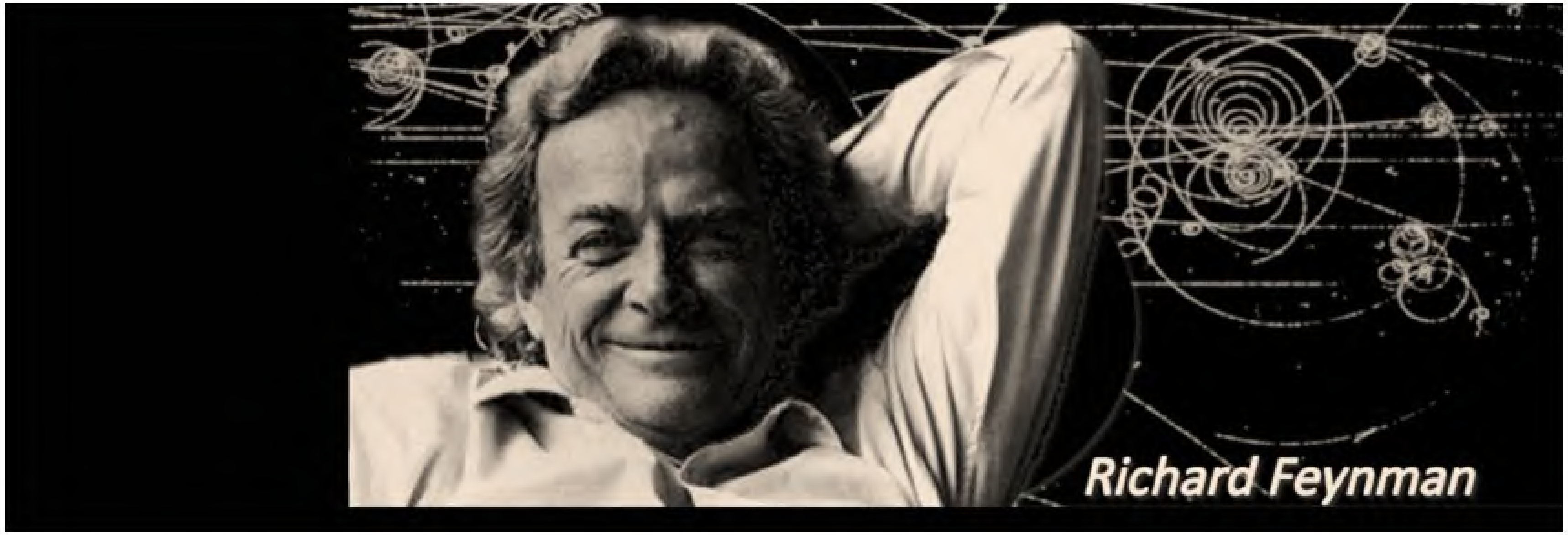
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس دوازدهم

مسائل مقدار مرزی در الکتروستاتیک - بخش اول

Electrostatic Boundary-Value Problems-Part1

دیدیم که اگر یک توزیع متناهی بار الکتریکی (بدون حضور هیچ مرزی) داشته باشیم، پتانسیل الکتریکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_v(\mathbf{x}')}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid} d^3\mathbf{x}'$$

اما معمولاً با مسائلی سر و کار داریم که در آن‌ها سطوحِ مرزی وجود دارند که روی آن‌ها پتانسیلِ الکتریکی یا چگالی سطحیِ بار (مؤلفه‌ی عمودی میدانِ الکتریکی) مشخص شده است. شکلِ صوریِ حلِ این گونه مسائل را با استفاده از توابع گرین ارائه کردیم

برای شرایط مرزی دیریکله دیدیم:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'}$$

که در آن تابع گرین $G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}')$ در رابطه‌ی زیر صدق می کند:

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')\Big|_{\mathrm{x}'\in S} = 0$$

برای شرایط مرزی نیومن:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \langle\Phi\rangle + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{x}')G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'}G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}')da'}$$

$$\nabla^2 G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad \frac{\partial G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}\Big|_{\mathrm{x}'\in S} = -\frac{4\pi}{S}$$

اما پیدا کردنِ تابعِ گرین گاهی چندان ساده نیست

دانشگاه خوارزمی

در این جا به بررسی روش تصویر برای حل مسائل الکتروستاتیک می‌پردازیم. اما پیش از بررسی روش تصویر، به نکات زیر در باره‌ی پتانسیل توجه می کنیم:

۱. در همه‌ی نقاط $\nabla^2\Phi = 0$، به جز روی مرزها و یا درونِ بارهای الکتریکی.

۲. Φ همه جا پیوسته است. یعنی روی مرزهای دو محیط $\Phi_1 = \Phi_2$.

۳. در صورتی که همه‌ی بارها در نواحیِ حولِ مبدأ مختصات قرار گرفته باشند، یعنی وقتی توزیعِ متناهی بار داریم، آن‌گاه $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi(\mathbf{x}) = 0$.

یک حالت قابل توجه وجود دارد: اگر میدانِ الکتریکی یکنواخت $\boldsymbol{E}_0$ (مثلاً در جهت z)، در بی‌نهایت داشته باشیم، پتانسیل در بی‌نهایت به شکلِ زیر خواهد بود:

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(\mathbf{x}) = -E_0 z + V_0$$

در چنین شرایطی پتانسیل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Phi = -E_0 z + \Phi_1(\mathbf{x}) + V_0 \qquad \lim_{r\to\infty} \Phi_1(\mathbf{x}) = 0$$

دانشگاه خوارزمی

۴. مقدار پتانسیل در همه جا متناهی است مگر در نقاطی که تک‌قطبی، دوقطبی و مواردی از این دست وجود داشته باشد.

مثلاً در نزدیکی یک بار نقطه‌ای واقع در $\mathbf{x}_q$، شکلِ کلیِ پتانسیل چنین است:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}_q|} + \Phi_1(\mathbf{x})}$$

$\Phi_1(\mathbf{x})$ در نقطه‌ی $\mathbf{x}_q$ مقدار متناهی دارد

در نزدیکیِ یک دو قطبی واقع در $\mathbf{x}_p$ ، شکلِ کلیِ پتانسیل چنین است:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p|^3} + \Phi_1(\mathbf{x})}$$

$\Phi_1(\mathbf{x})$ در نقطه‌ی $\mathbf{x}_p$ مقدار متناهی دارد

دانشگاه خوارزمی

۵. روی سطوح رساناها یا پتانسیل معلوم است $\Phi = \Phi_0$ یا مشتق عمودی آن.

در این صورت بار کل برابر است با

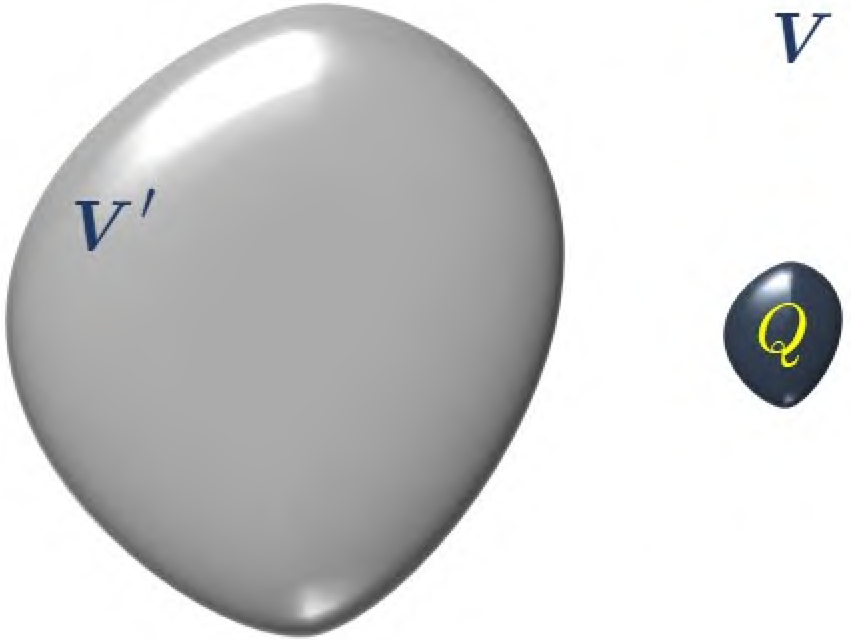
$$\boxed{Q = \epsilon_0 \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} da = \epsilon_0 \int -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) da}$$

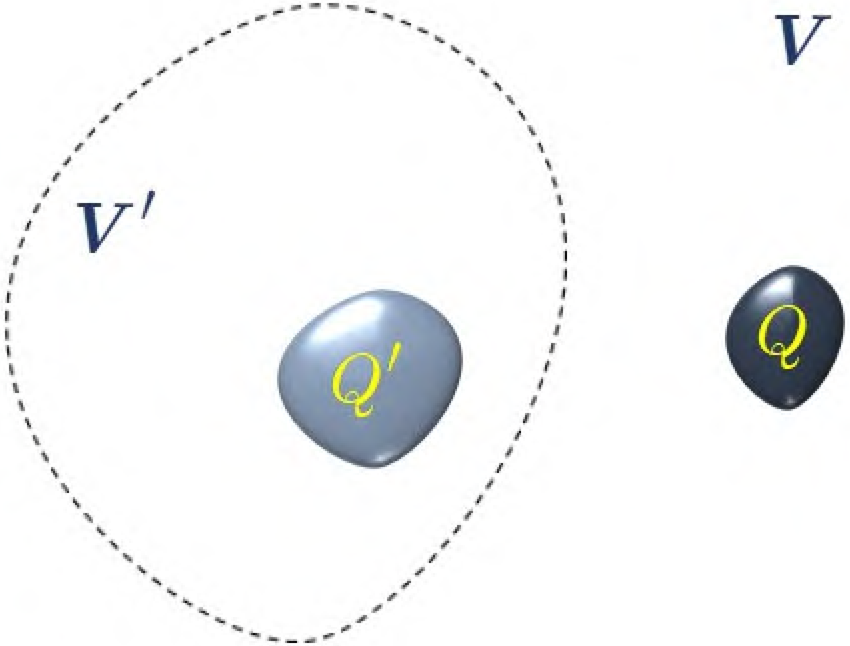
و چگالی سطحی بار برابر است با $\sigma_s = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)$

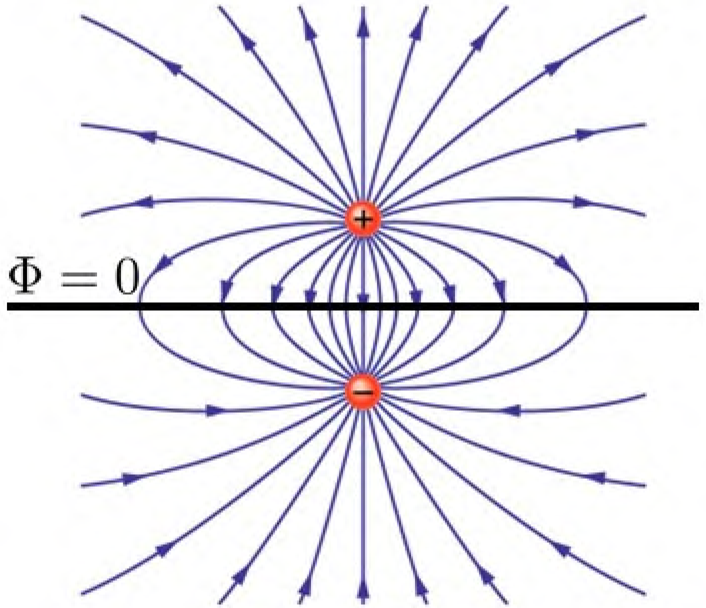
در مورد دی‌الکتریک‌ها باید شرایط مرزیِ خاصِ آن‌ها را اِعمال کرد
که در فصل‌های بعد به آن‌ها می‌پردازیم.

برخی مسائل الکتروستاتیک شامل بارهای الکتریکی و سطوح مرزی هستند. سطوح مرزیِ محدود کننده (که در این‌جا آن‌ها را رسانا در نظر می‌گیریم) فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. یکی از این نواحی را V و دیگری را V' می‌نامیم. فرض می‌کنیم بارهای الکتریکی در ناحیه‌ی V هستند. هدف پیدا کردنِ پتانسیلِ الکتریکی در ناحیه‌ی V است. **در روشی که روشِ تصویر نامیده می‌شود، مسئله را با یک مسئله‌ی جدید شبیه‌سازی می‌کنیم؛** فرض می‌کنیم مرزی وجود ندارد و در ناحیه‌ی V' توزیعی از بارهای الکتریکی قرار می‌دهیم به گونه‌ای که شرایطِ مرزیِ مسئله‌ی اصلی برقرار شود. **این بارها را بارهای تصویری می‌نامیم.** طبق قضیه‌ی یکتایی، پتانسیلِ ناشی از این بارهای تصویری و بارهای واقعی، پاسخِ مسئله‌ی اصلی در ناحیه‌ی V است.

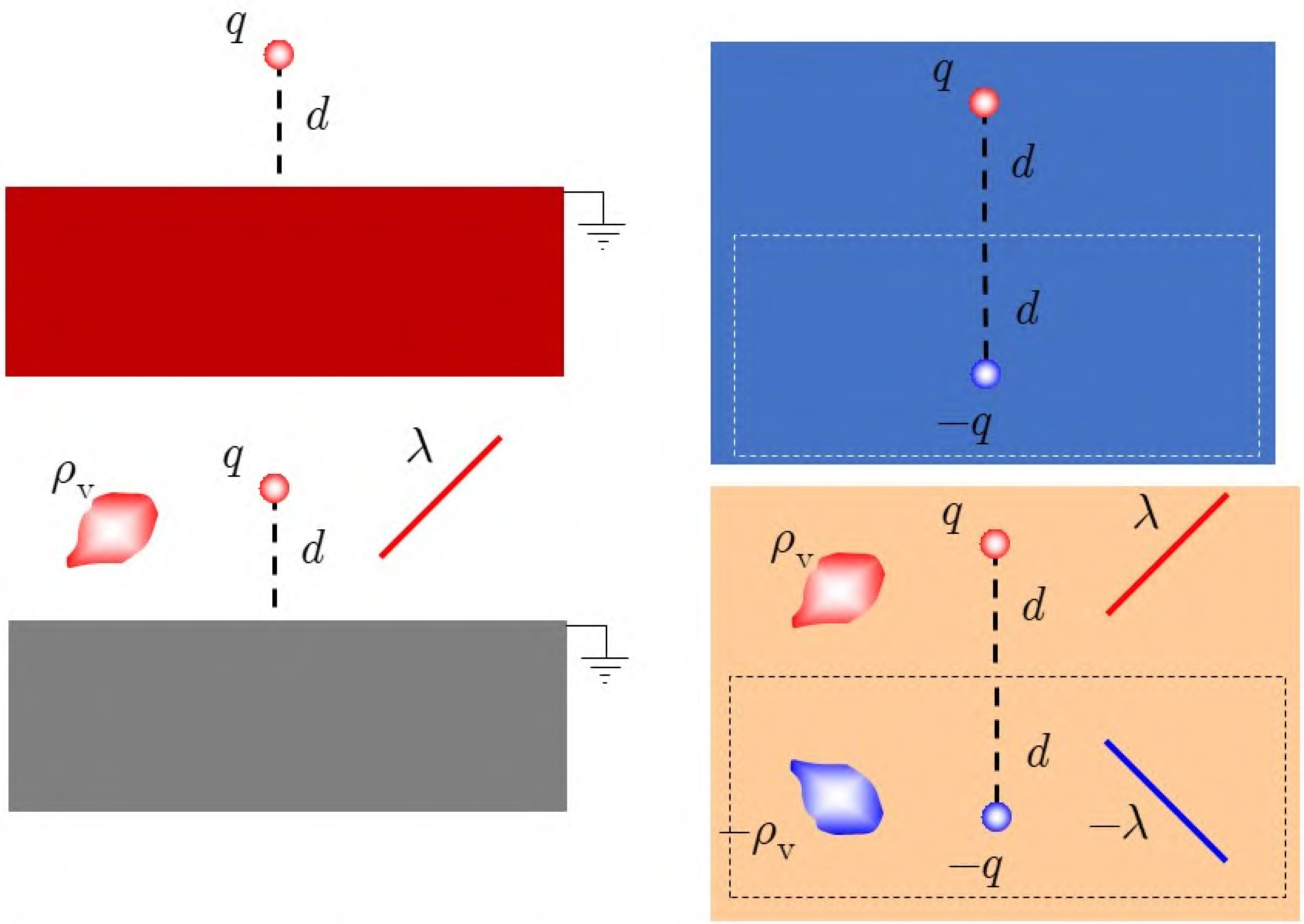
دانشگاه خوارزمی

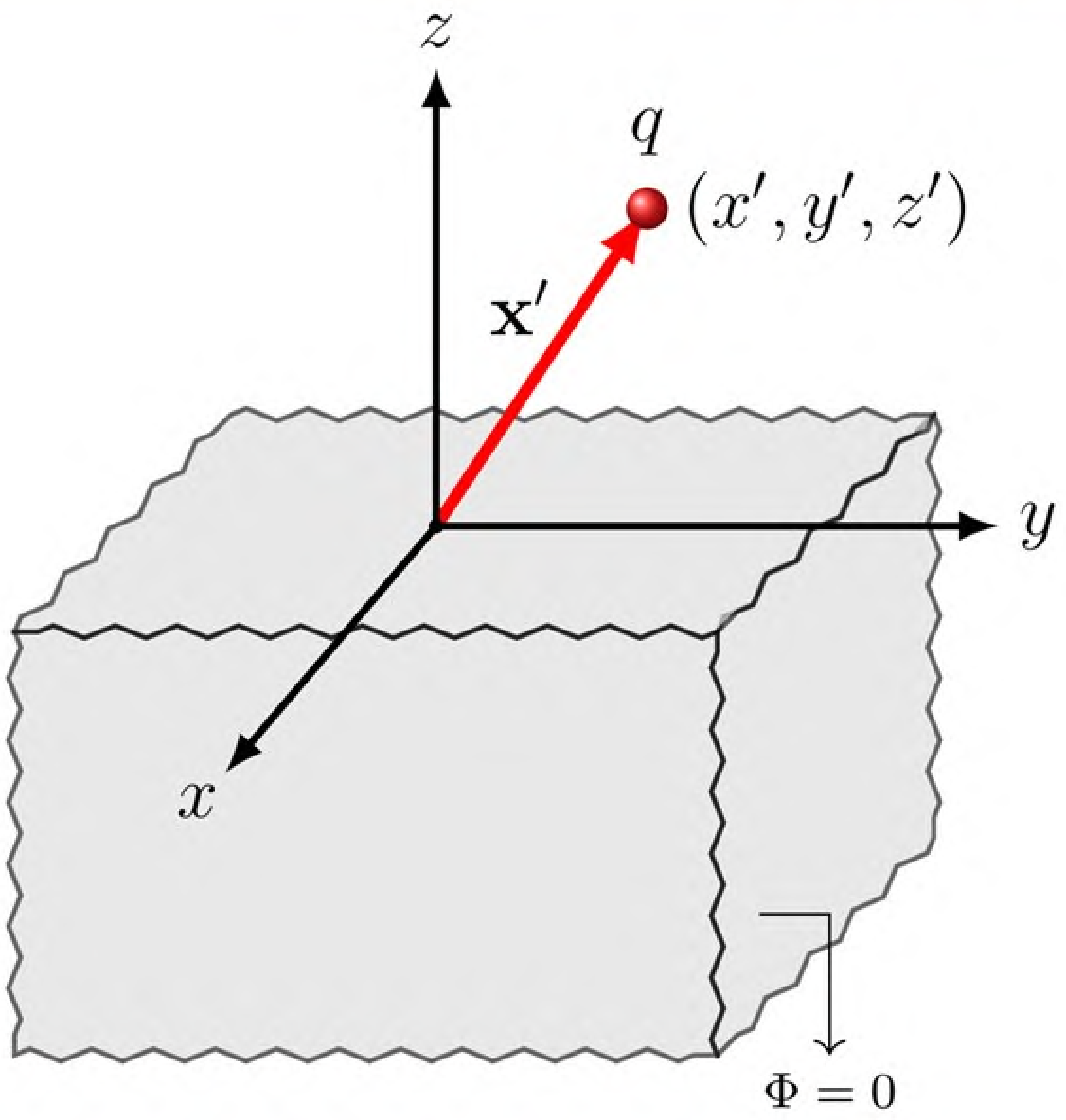

V'
V
Q

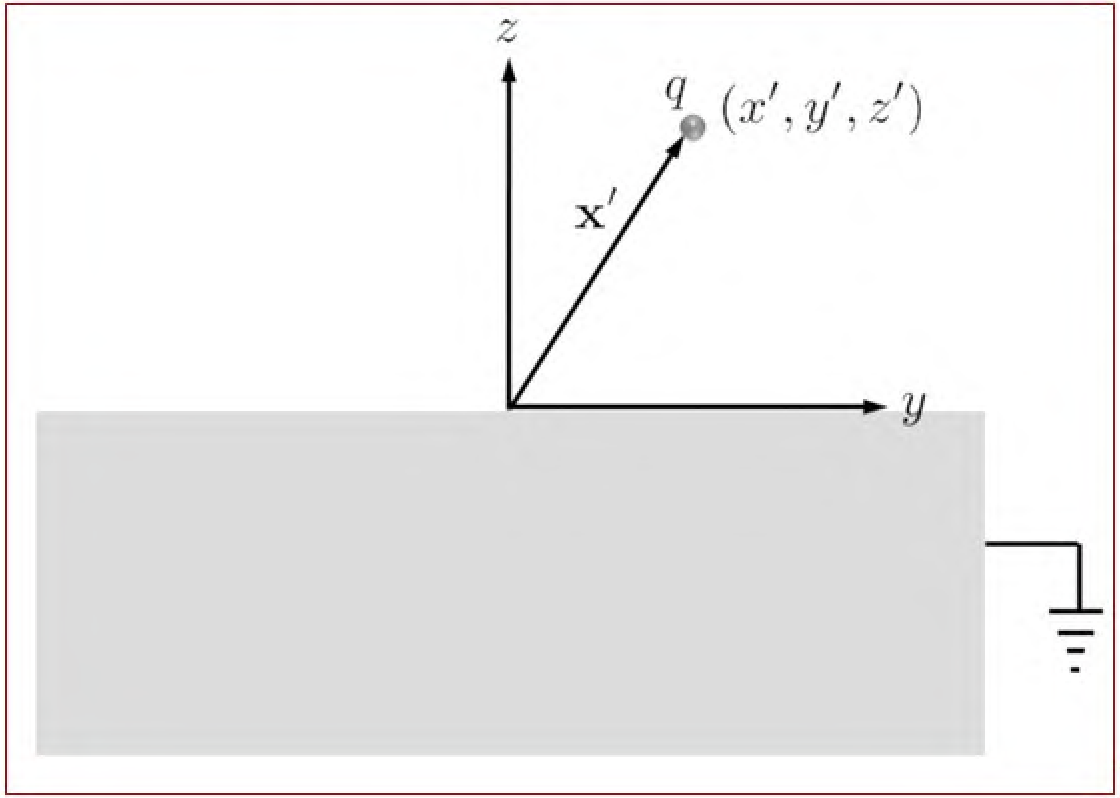

V'
V
Q'
Q


$\Phi = 0$


دیواره‌ی تخت رسانا


q
d
q
d
d
$-q$
ρ_v
q
λ
d
ρ_v
q
λ
d
d
$-\rho_v$
$-q$
$-\lambda$


z
q
(x', y', z')
$\mathbf{x}'$
y
x
$\Phi = 0$



در نزدیکیِ یک دیواره‌ی رسانای بسیار بزرگ، یک بارِ نقطه‌ای q قرار دارد.

سطح این دیواره منطبق بر صفحه‌ی xy است (صفحه‌ی $z = 0$)، و در پتانسیل صفر نگه داشته شده است. بردارِ مکانِ بارِ q را $\mathbf{x}' = x'\hat{\boldsymbol{i}} + y'\hat{\boldsymbol{j}} + z'\hat{\boldsymbol{k}}$ می‌نامیم.

می‌خواهیم پتانسیلِ الکتریکی را در نقطه‌ی $\mathbf{x} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$ (در ناحیه‌ی $z > 0$) محاسبه کنیم.

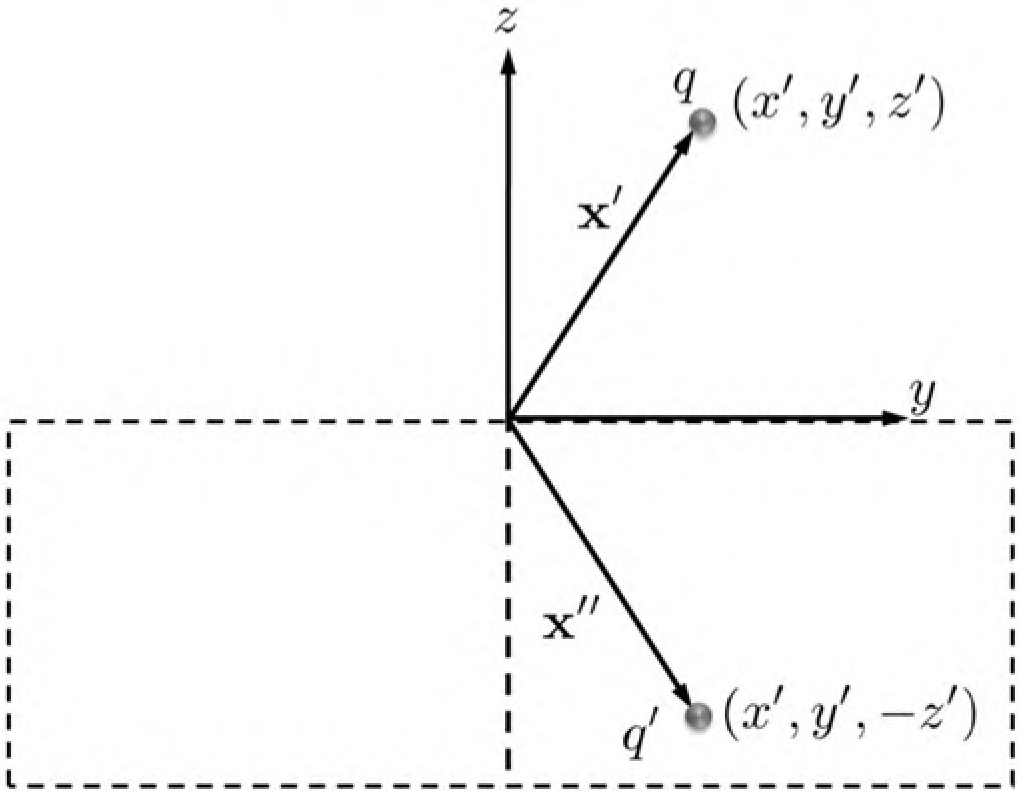
$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\ ; \qquad z > 0}$$

در این‌جا، به جای حل این معادله‌ی دیفرانسیل، مسئله را به روش تصویر حل می‌کنیم.

در این‌جا به جای حل این معادله‌ی دیفرانسیل، مسئله را به روشِ تصویر حل می‌کنیم.

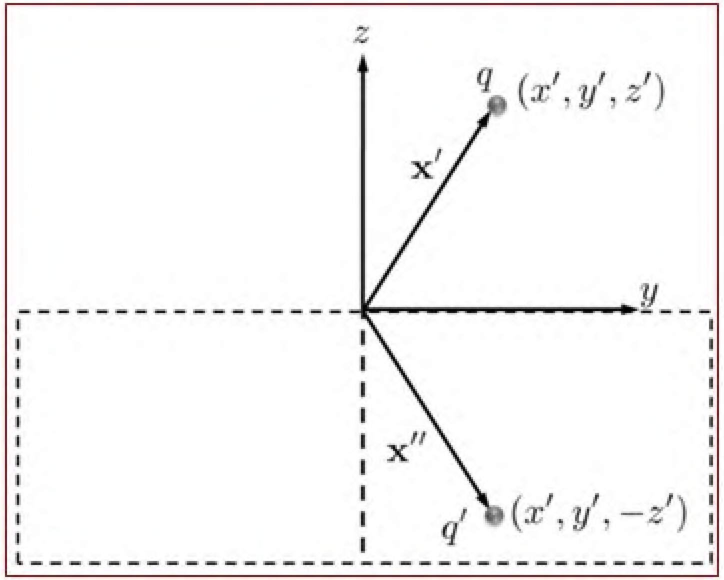
مسئله‌ی جدیدی مطرح می‌کنیم که در آن دیواره‌ی رسانا برداشته شده است (یعنی کل فضا خلأ است) و

به جای آن یک بار تصویری در ناحیه‌ی $z<0$ قرار می‌دهیم



پتانسیلِ الکتریکیِ ناشی از این دو بارِ نقطه‌ای برابر است با:

$$\Phi_{Image}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|}+\frac{q'}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}''\,|}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\frac{q'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)$$



می‌خواهیم در صفحه‌ی xy (یعنی $z = 0$) پتانسیل برابر با صفر باشد

$$\Phi_{Image}(x,y,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(0-z')^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(0+z')^2}}\right) = 0$$

واضح است که با انتخابِ $q' = -q$ تساویِ فوق برقرار می‌شود

$$\Phi_{Image}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}\right)$$

$$\Phi_{Image}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla^2\Phi_{Image}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big[-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + 4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')\Big]$$
$$= -\frac{q}{\epsilon_0}\Big[\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')\Big]$$

در ناحیه‌ی $z > 0$ جمله‌ی دوم برابر با صفر است؛ بنابر این

$$\nabla^2\Phi_{Image}(\mathbf{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'); \qquad z > 0$$

بنابر این Φ_{Image} در ناحیه‌ی $z > 0$ همان پاسخ مسئله‌ی اصلی ماست

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|} - \frac{1}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}''\,|}\right); \qquad z > 0$$

دانشگاه خوارزمی

در مسئله‌ی بار نقطه‌ای و دیواره‌ی رسانا جزییاتِ به کارگیریِ روشِ تصویر را نشان دادیم. **در مسائلِ بعدی که با روش تصویر حل می‌کنیم این جزییات را بیان نمی‌کنیم.** حتی بارِ تصویری را درونِ همان شکلِ مسئله‌ی اصلی رسم می‌کنیم. خواننده‌ای که روش تصویر را یاد گرفته است نیازی به بیان این جزییات ندارد.

در مسئله‌ی بار نقطه‌ای و دیواره‌ی رسانای نامتناهی متصل به زمین،

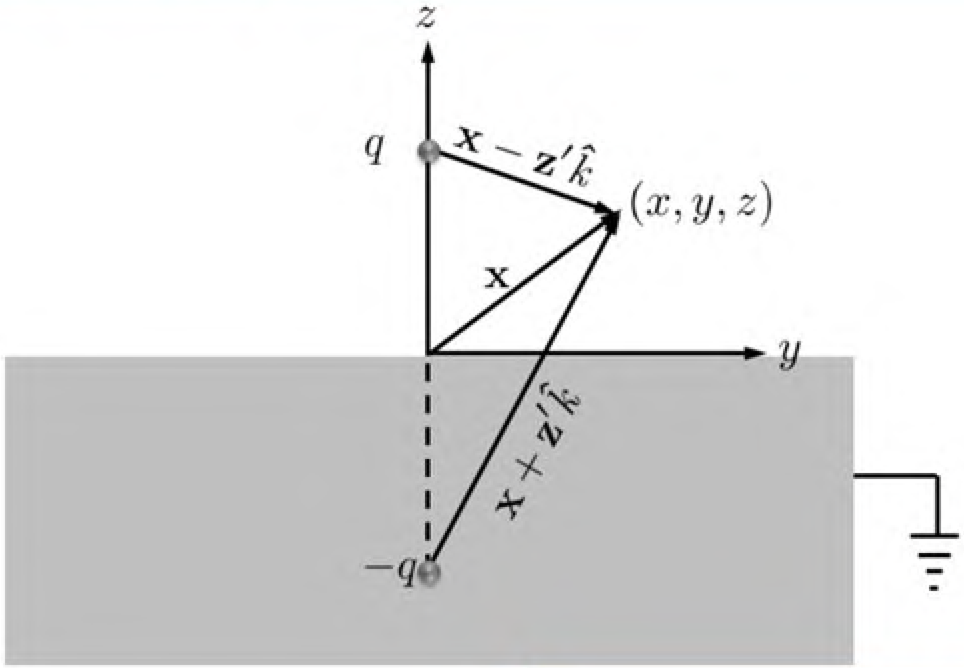
۱. میدانِ الکتریکی را در ناحیه‌ی $z>0$ به دست آورید

۲. چگالیِ سطحیِ بار را روی سطحِ رسانا محاسبه کنید.

۳. بارِ کلِ القاء شده در دیواره‌ی رسانا چقدر است؟

۴. چه نیرویی از طرف رسانا به بارِ نقطه‌ای وارد می‌شود؟ (یا چه نیروی از طرفِ بارِ نقطه‌ای به سطحِ دیواره وارد می‌شود؟)

حل:



برای سادگی بار را روی محور z در نظر می‌گیریم

$\mathbf{x}' = z'\hat{\boldsymbol{k}}$ بردارِ مکانِ بارِ q

$\mathbf{x}'' = -z'\hat{\boldsymbol{k}}$ بردارِ مکانِ بارِ تصویری

$\mathbf{x} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$ بردارِ نقطه‌ی مشاهده

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - z'\hat{\boldsymbol{k}}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + z'\hat{\boldsymbol{k}}|}\right) \; ; \qquad z > 0$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{x} - z'\hat{\boldsymbol{k}}}{|\mathbf{x} - z'\hat{\boldsymbol{k}}|^3} - \frac{\mathbf{x} + z'\hat{\boldsymbol{k}}}{|\mathbf{x} + z'\hat{\boldsymbol{k}}|^3}\right) \; ; \qquad z > 0$$

بردار مکان نقطه‌ی مشاهده در دستگاه استوانه‌ای $\mathbf{x} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{E}(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{k}}}{\left(\rho^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}} - \frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z + z')\hat{\boldsymbol{k}}}{\left(\rho^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}}\right) \; ; \qquad z > 0$$

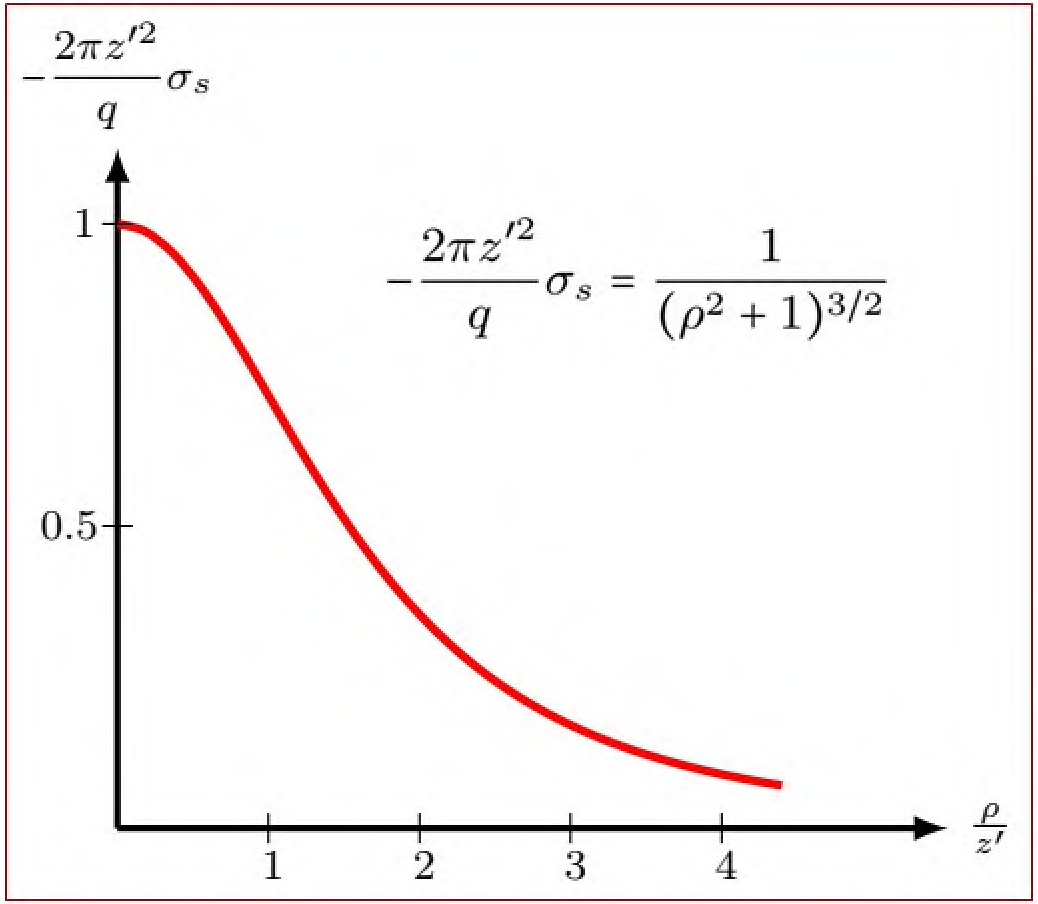
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\Big|_{z=0} &= \boldsymbol{E}(\rho, 0) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (-z')\hat{\boldsymbol{k}}}{\left(\rho^2 + (-z')^2\right)^{3/2}} - \frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z')\hat{\boldsymbol{k}}}{\left(\rho^2 + (-z')^2\right)^{3/2}}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-2z'\hat{\boldsymbol{k}}}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

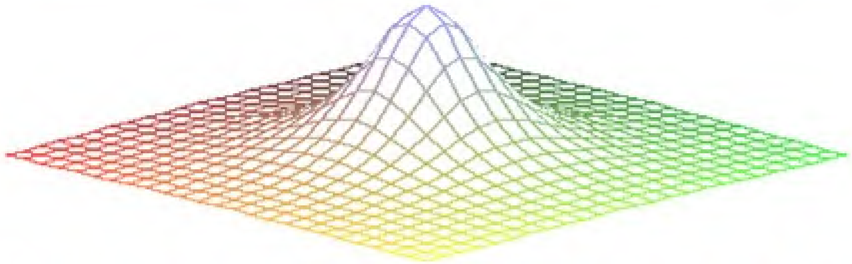
دانشگاه خوارزمی

$$\sigma_s(x,y) = \sigma_s(\rho) = \epsilon_0 E_n \Big|_{z=0} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} \Big|_{z=0}$$

$$\sigma_s(\rho) = -\frac{qz'}{2\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma_s(\rho)da \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sigma_s \rho d\rho d\phi \\ &= -qz'\int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= -q \end{aligned}$$





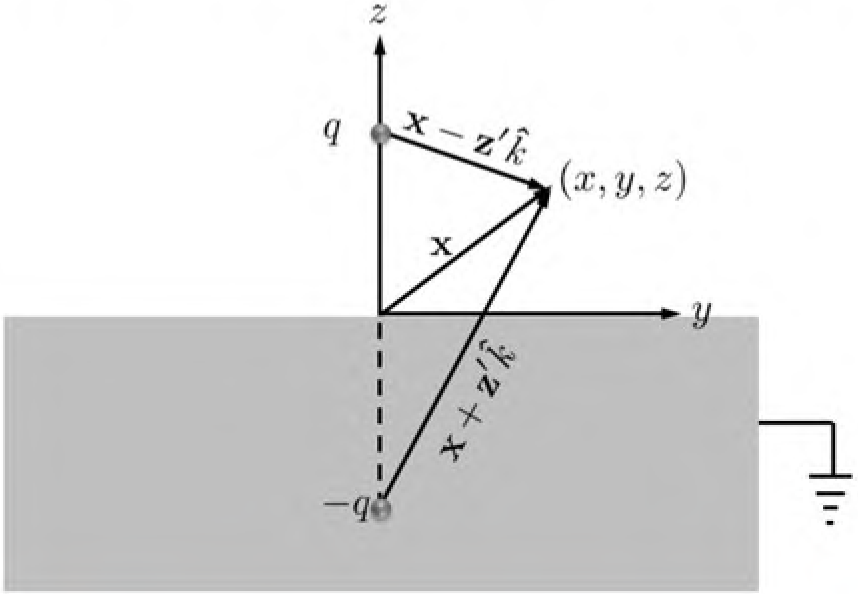
برای پیدا کردنِ نیروی وارد بر بار q و یا نیروی وارد بر دیواره‌ی رسانا، می‌توان به روش‌های مختلف عمل کرد.

یکی این که اگر بپذیریم مسئله‌ی بار نقطه‌ای در نزدیکیِ دیواره‌ی تخت رسانای متصل به زمین مانند دو بار نقطه‌ای

مختلف‌العلامت به فاصله‌ی $2z'$ است، پس نیروی وارد بر بارِ q برابر است با:

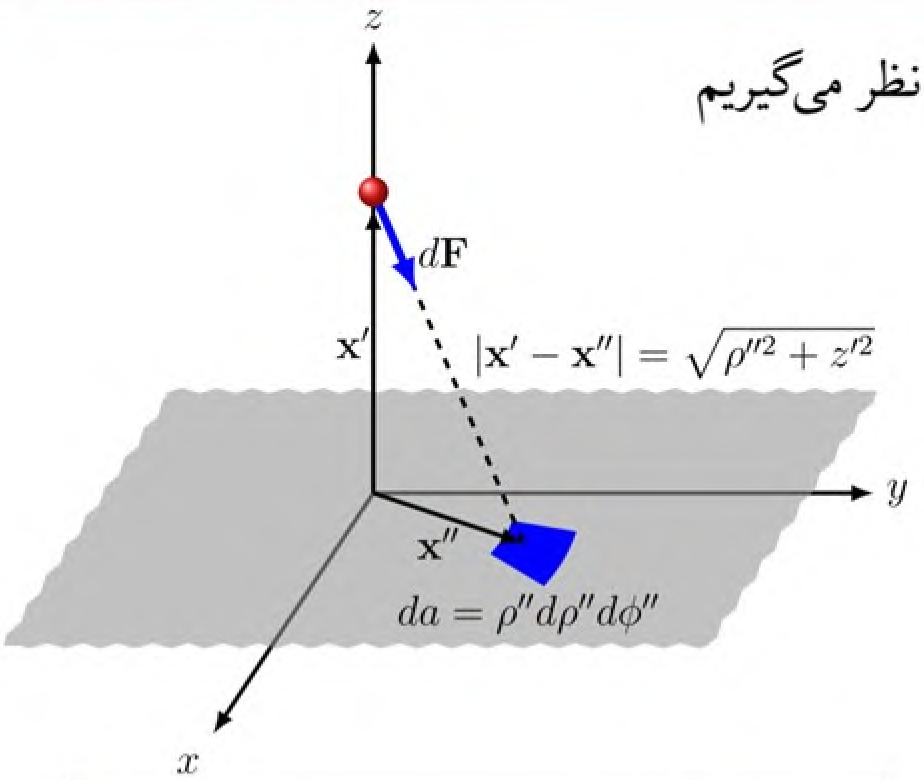
$$\boldsymbol{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2z')^2}\hat{\boldsymbol{k}}$$

و همین نیرو در جهتِ مخالف به دیواره وارد می‌شود



در روش دیگر بارهای روی صفحه را به صورت عناصر کوچک $dq = \sigma_s da$ در نظر می‌گیریم

و با استفاده از اصل برهم‌نهی نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را محاسبه می‌کنیم



$$\boxed{\sigma_s(\rho) = -\frac{qz'}{2\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}}$$

$$F_x = \int dF_x = 0\,; \quad F_y = \int dF_y = 0$$

$$\begin{aligned} F_z &= \int dF_z \\ &= \int dF \cos\theta \\ &= \int \frac{q\sigma_s da}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{\left(\rho''^2 + z'^2\right)^{3/2}} = -\frac{q^2 z'^2}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho'' d\rho'' d\phi''}{\left(\rho''^2 + z'^2\right)^3} \\ &= -\frac{q^2 z'^2}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{2\pi}{4z'^4} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4z'^2} \end{aligned}$$

هم‌چنین با توجه به مباحثی که در درس‌های گذشته مطرح کردیم، نیروی عمود بر سطح رسانا در واحد سطح از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

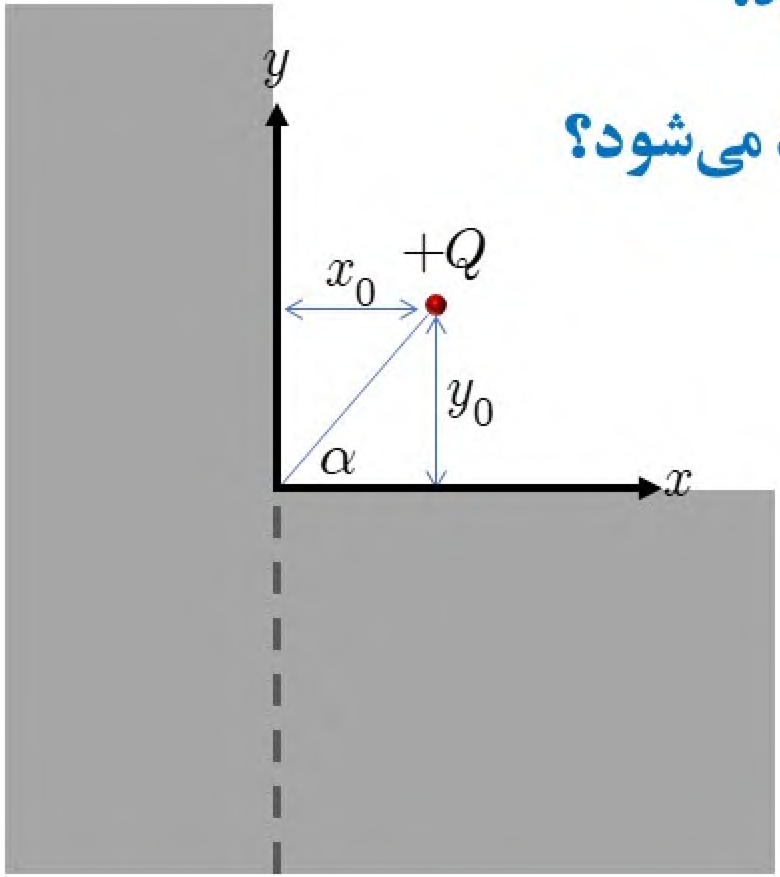
$$\frac{dF}{da} = \frac{\sigma_s^2}{2\epsilon_0} = \frac{q^2 z'^2}{2\epsilon_0 4\pi^2(\rho''^2 + z'^2)^3}$$

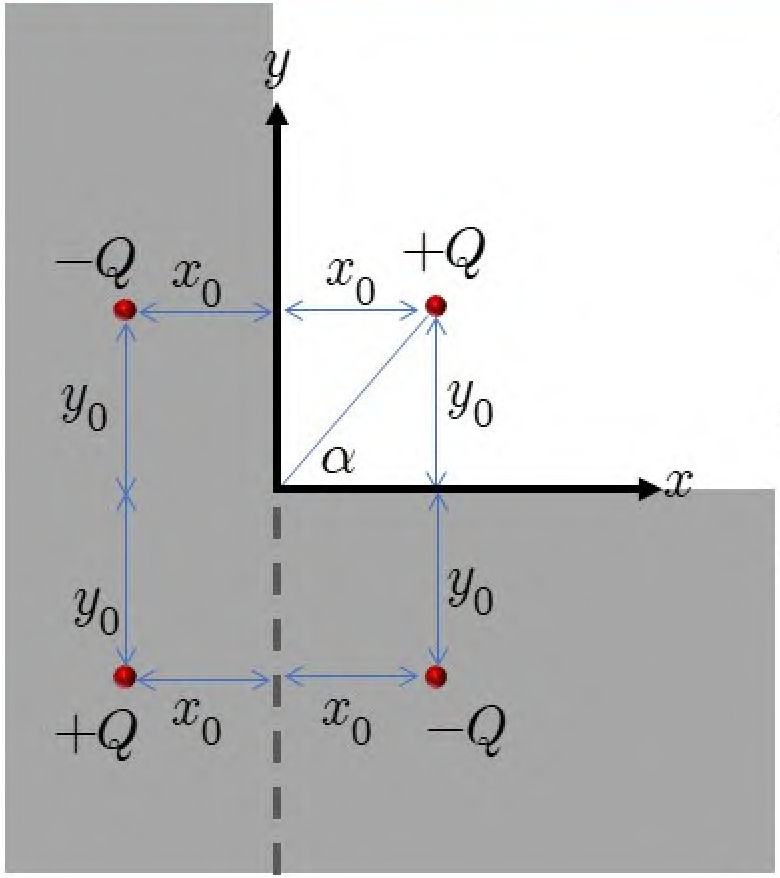
$$dF = \frac{q^2 z'^2}{8\pi^2\epsilon_0(\rho''^2 + z'^2)^3}\rho'' d\rho'' d\phi''$$

با انتگرال گیری از این رابطه، نیروی وارد بر سطح به دست می‌آید.

مطابق شکل، بار نقطه‌ای مثبت در مجاورت دو صفحه‌ی رسانای نیم-نامتناهی متصل به زمین قرار دارد.

- ❑ بارهای القاء شده روی هر یک از صفحات را پیدا کنید.
- ❑ چه نیرویی از طرف صفحات رسانا به بار نقطه‌ای وارد می‌شود؟





حل: برای سادگی دستگاه مختصات را به گونه‌ای فرض کرده‌ایم که بار الکتریکی $+Q$ در صفحه‌ی xy قرار گیرد. یعنی مکان آن $(x_0, y_0, 0)$ است. به سادگی دیده می‌شود که پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ی $x > 0, y > 0$ با برهم‌نهی پتانسیل‌های ناشی از این بار و سه بار نقطه‌ای تصویری با ویژگی‌های زیر به دست می‌آید:

$$-Q: \quad (x_0, -y_0, 0)$$

$$-Q: \quad (-x_0, y_0, 0)$$

$$+Q: \quad (-x_0, -y_0, 0)$$

بدین ترتیب پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی دلخواه (x, y, z) در ناحیه‌ی $x > 0, \ y > 0$ برابر است با

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-z^2}} + \frac{-1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2-z^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{-1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2-z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2-z^2}}\right]$$

چگالیِ سطحیِ بار بر روی صفحه‌ی $x=0$ برابر است با

$$\sigma_s^{x=0}(y,z) = \epsilon_0 \boldsymbol{E}(0,y,z)\cdot\hat{\boldsymbol{i}}$$
$$= -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x=0}$$
$$= -\frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{2x_0}{\left[{x_0}^2+(y-y_0)^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{2x_0}{\left[{x_0}^2+(y+y_0)^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

کل بار القاء شده بر روی صفحه‌ی $x=0$ برابر است با

$$Q_{ind}^{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\sigma_s^{x=0}(y,z)\,dydz$$
$$= -\frac{2Q}{\pi}\cos^{-1}\left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right]$$
$$= -\frac{2Q}{\pi}\alpha$$

دانشگاه خوارزمی

چگالی سطحیِ بار بر روی صفحه‌ی $y = 0$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\sigma_s^{y=0}(x,z) &= \epsilon_0 \boldsymbol{E}(x,0,z)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y}\bigg|_{y=0}\\ &= -\frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{2y_0}{\left[(x-x_0)^2+{y_0}^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{2y_0}{\left[(x+x_0)^2+y_0^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}\end{aligned}$$

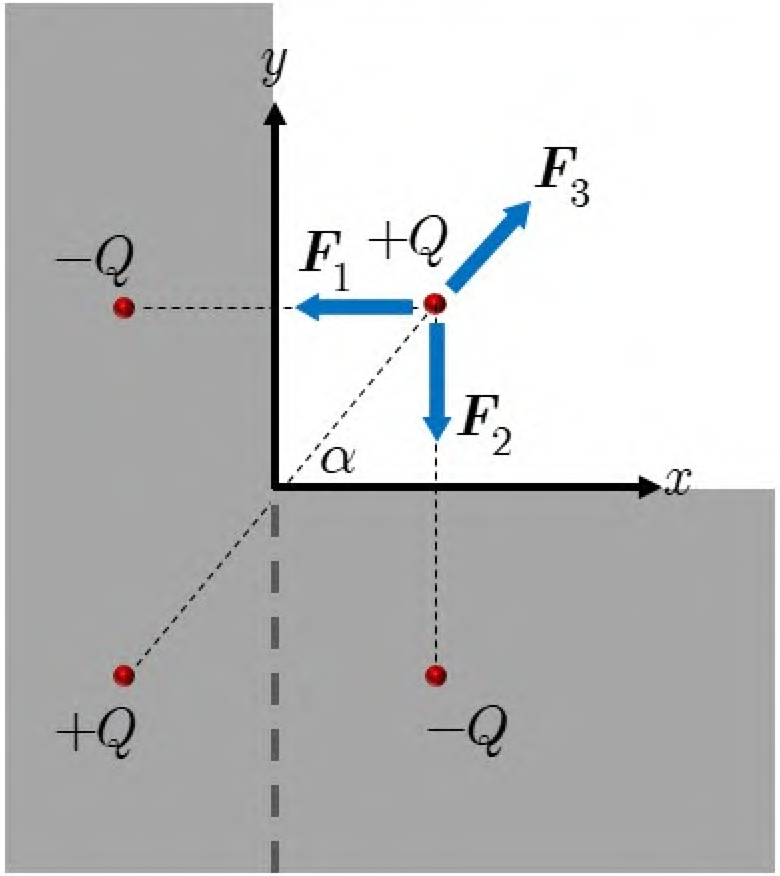
کل بار القاء شده بر روی صفحه‌ی $y = 0$ برابر است با

$$\begin{aligned}Q_{ind}^{y=0} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\sigma_s^{y=0}(x,z)dxdz\\ &= -\frac{2Q}{\pi}\cos^{-1}\left[\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right]\\ &= -\frac{2Q}{\pi}(\pi/2-\alpha)\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $y_0 = x_0$ آن‌گاه $\alpha = \pi/4$ و در نتیجه

$$Q_{ind}^{x=0} = Q_{ind}^{y=0} = -\frac{Q}{2\pi}$$

دانشگاه خوارزمی



چه نیرویی از طرف صفحات رسانا به بار نقطه‌ای وارد می‌شود؟

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$$

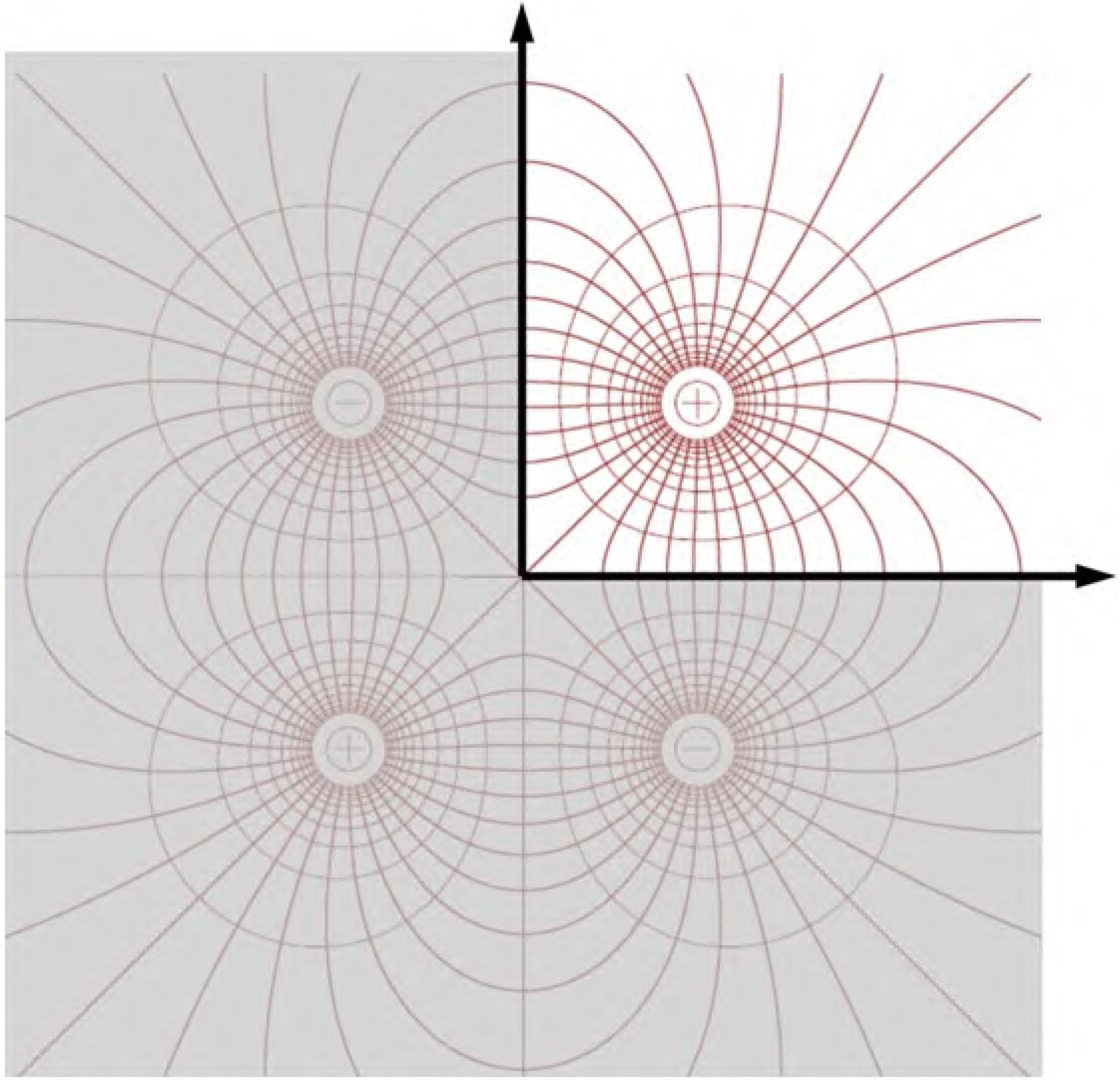
$$\boxed{\boldsymbol{F}_1 = -\hat{\boldsymbol{i}}\,\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_\circ (2x_\circ)^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}_2 = -\hat{\boldsymbol{j}}\,\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_\circ (2y_\circ)^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{Q^2}{\left[(2x_\circ)^2 + (2y_\circ)^2\right]^{3/2}}\left(2x_\circ\hat{\boldsymbol{i}} + 2y_\circ\hat{\boldsymbol{j}}\right)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_\circ}\left\{\left[\frac{x_\circ}{\left(x_\circ^2 + y_\circ^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{x_\circ^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} + \left[\frac{y_\circ}{\left(x_\circ^2 + y_\circ^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{y_\circ^2}\right]\hat{\boldsymbol{j}}\right\}}$$

دانشگاه خوارزمی



شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی