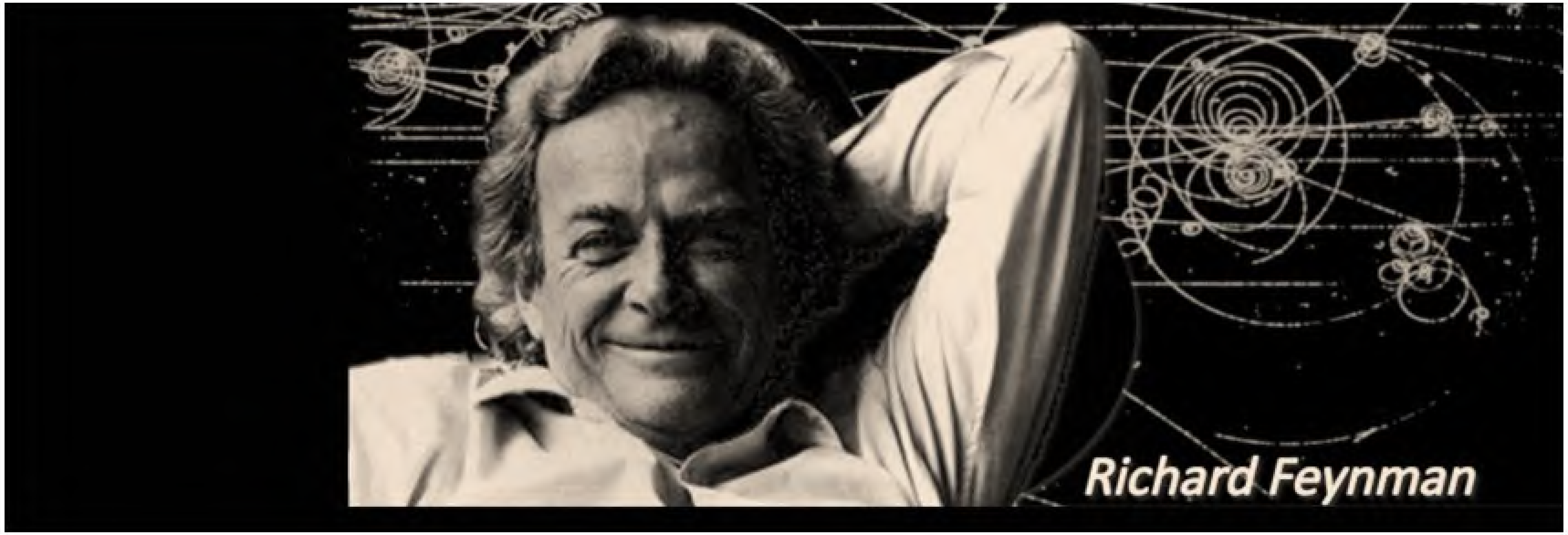
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

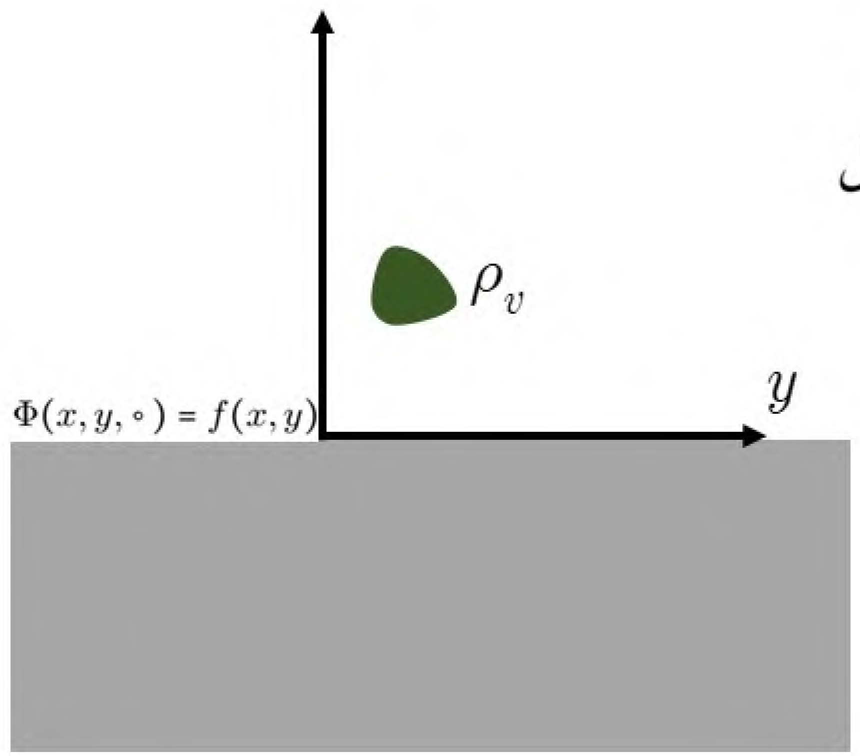
دانشگاه خوارزمی

درس سیزدهم

مسائل مقدار مرزی در الکتروستاتیک- بخش دوم

Electrostatic Boundary-Value Problems-Part2

دانشگاه خوارزمی



فرض کنید در ناحیه‌ی $z > 0$ چگالی بار $\rho_v(\mathbf{x})$ قرار دارد و صفحه‌ی $z = 0$ در پتانسیل $\Phi(x,y,0) = f(x,y)$ نگه داشته شده است. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی را در $z > 0$ پیدا کنیم. در واقع باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho_v(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \; ; \qquad z > 0$$

$$\Phi(x,y,0) = f(x,y)$$

در این مسئله بر روی مرز، مقدار پتانسیل داده شده است. یعنی شرایط مرزی دیریکله برقرار است.

سعی می‌کنیم تابع گرین $G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ را پیدا کنیم. این تابع در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\nabla'^2 G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \nabla^2 G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

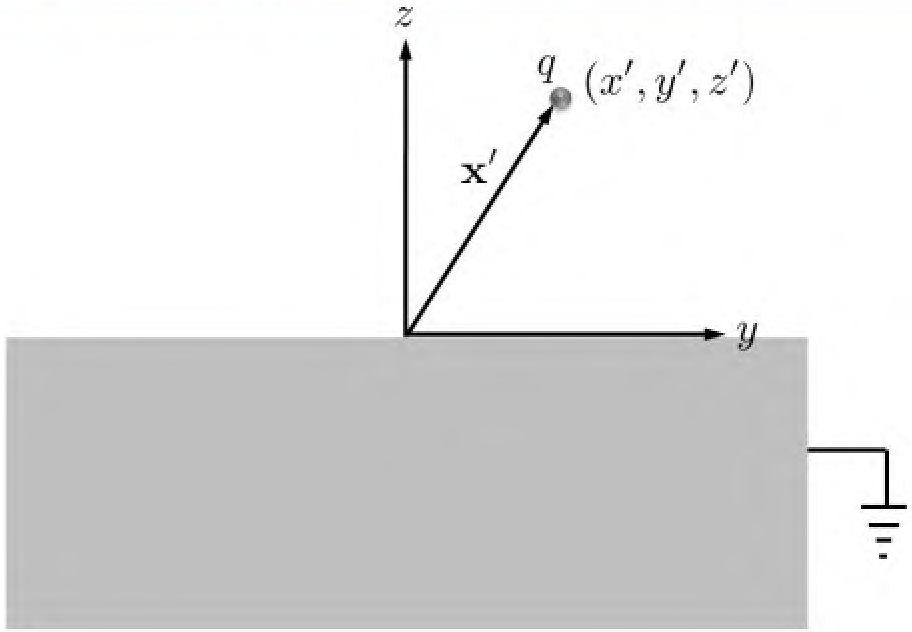
$$G_D(x,y,0;x',y',z') = G_D(x,y,z;x',y',0) = 0$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho_v(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi}\int dx'dy' f(x',y') \left.\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial z'}\right|_{z'=0}$$

توجه شود که در این مسئله داریم:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}\right|_{z'=0} &= \nabla G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot\hat{\boldsymbol{n}}'\big|_{z'=0}\\ &= \nabla G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(-\hat{\boldsymbol{k}})\big|_{z'=0}\\ &= -\left.\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial z'}\right|_{z'=0}\end{aligned}$$

یادآوری



$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'); \quad z>0$$

$$\Phi(x,y,0) = 0$$

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$G_D\left(x,y,0;x',y',z'\right) = 0$$

بنابر این تابع گرین برای معادله‌ی پواسون، چیزی نیست مگر پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای $(q=1)$ با شرط پتانسیل صفر روی مرز. (البته با اختلاف در ضریب $4\pi\epsilon_0$)

در واقع این مسئله را ما قبلاً با روش تصویر حل کرده‌ایم

$$G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}} \; ; \qquad z>0$$

به سادگی دیده می‌شود که شرطِ صفر بودنِ تابعِ گرین بر روی مرز برقرار است

$$G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')\Big|_{z=0} = G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')\Big|_{z'=0} = 0$$

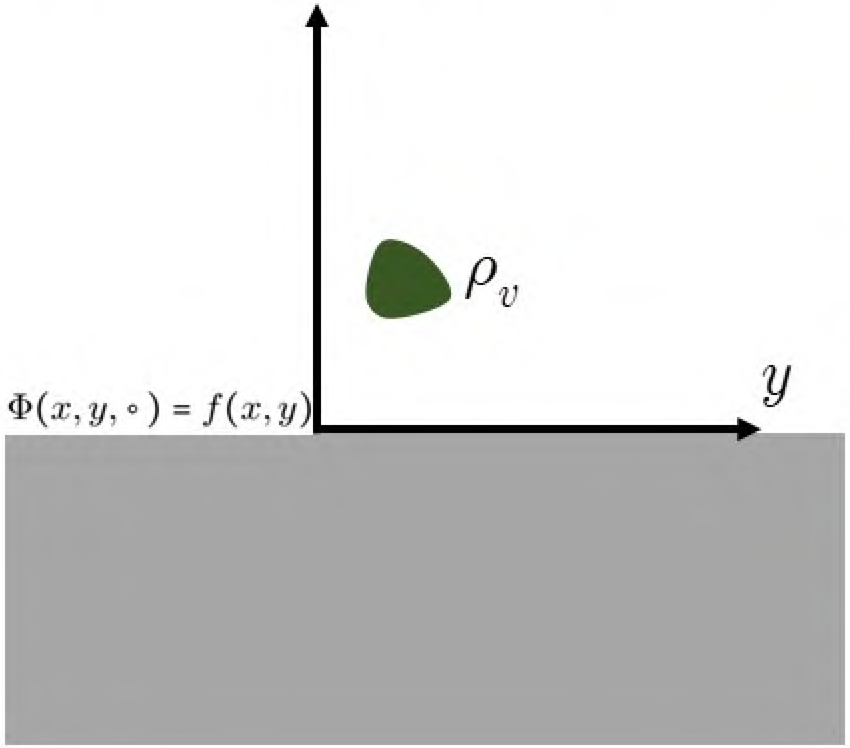
و همچنین:

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \; ; \qquad z>0$$

یعنی این تابع، همان تابعِ گرینِ مسئله است

فرض کنید در ناحیه‌ی $z > 0$ چگالی بار $\rho_v(\mathbf{x})$ قرار دارد و صفحه‌ی $z = 0$ در پتانسیل $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$ نگه داشته شده است.

می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی را در $z > 0$ پیدا کنیم.



$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho_v(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \; ; \qquad z > 0$$

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$\nabla'^2 G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \nabla^2 G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$G_D(x, y, 0; x', y', z') = G_D(x, y, z; x', y', 0) = 0$$

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'$$

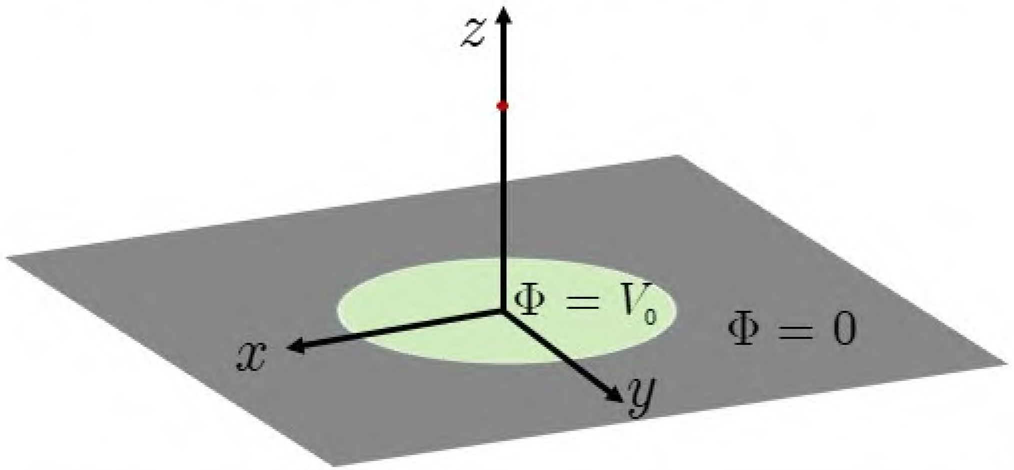
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty dz'\int_{-\infty}^\infty dy'\int_{-\infty}^\infty dx'\,\rho_v(x',y',z')\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]$$

$$+\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dy'\int_{-\infty}^\infty dx'\frac{f(x',y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

توجه کنید که

$$\left.\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \frac{2z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

یک سطحِ تختِ رسانا در نظر بگیرید که بر صفحه‌ی xy منطبق است. این سطح از دو بخش که با نوارِ عایقِ بسیار نازکی از هم جدا شده‌اند، تشکیل شده است: یک بخش دایره‌ای به مبدأ مختصات و شعاعِ R و بخشِ دیگر باقیِ سطح. بخشِ دایره‌ای در پتانسیلِ V_0 و باقیِ سطح در پتانسیلِ صفر قرار دارند. پتانسیلِ الکتریکی را روی محورِ z پیدا کنید.



$$\Phi(x,y,0) = \begin{cases} V_0 & \rho < R \\ 0 & \rho > R \end{cases}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$$

حل: می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی $(0,0,z)$ به دست آوریم.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty dz'\int_{-\infty}^\infty dy'\int_{-\infty}^\infty dx'\,\underbrace{\cancel{\rho_v}}_{0}(x',y',z')\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]$$

$$+\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dy'\int_{-\infty}^\infty dx'\,\frac{f(x',y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\rho_v(x',y',z')}_{0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]$$

$$+ \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{f(x',y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(0,0,z) &= \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R} \rho' d\rho' \frac{V_0}{[\rho'^2+z^2]^{3/2}} \\
&= zV_0\left(\frac{-1}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\right)\Bigg|_0^R \\
&= zV_0\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \\
&= V_0\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right); \qquad z > 0
\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید