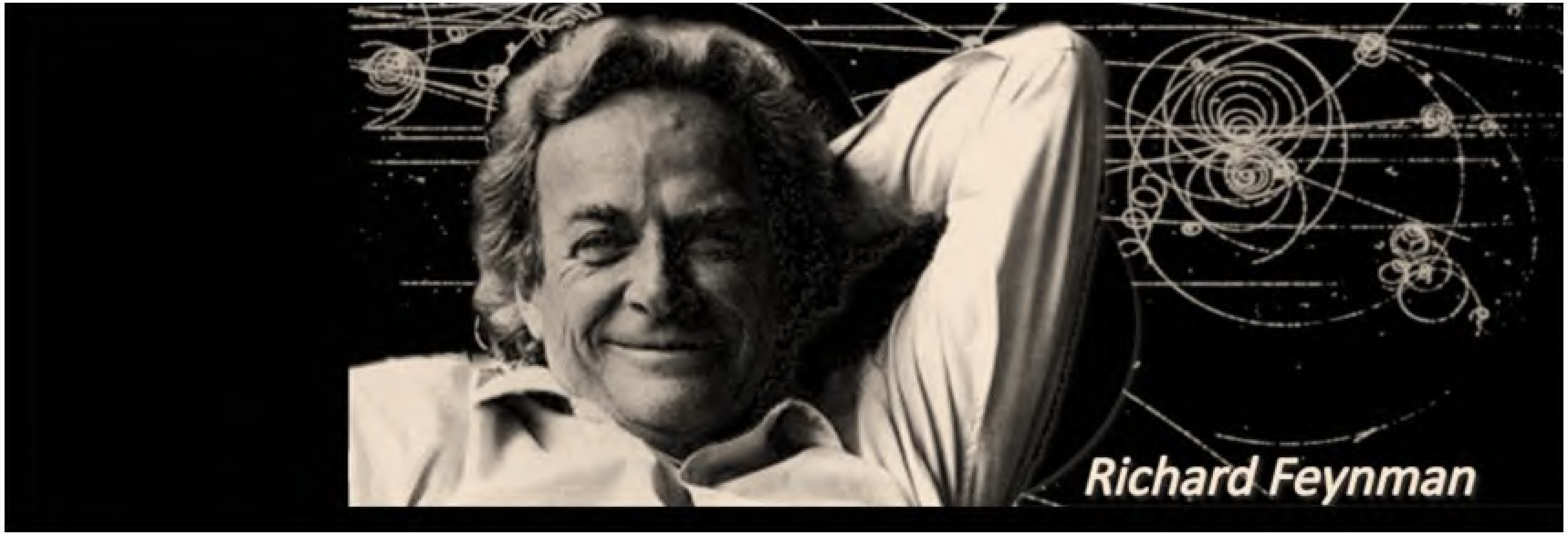
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس چهاردهم

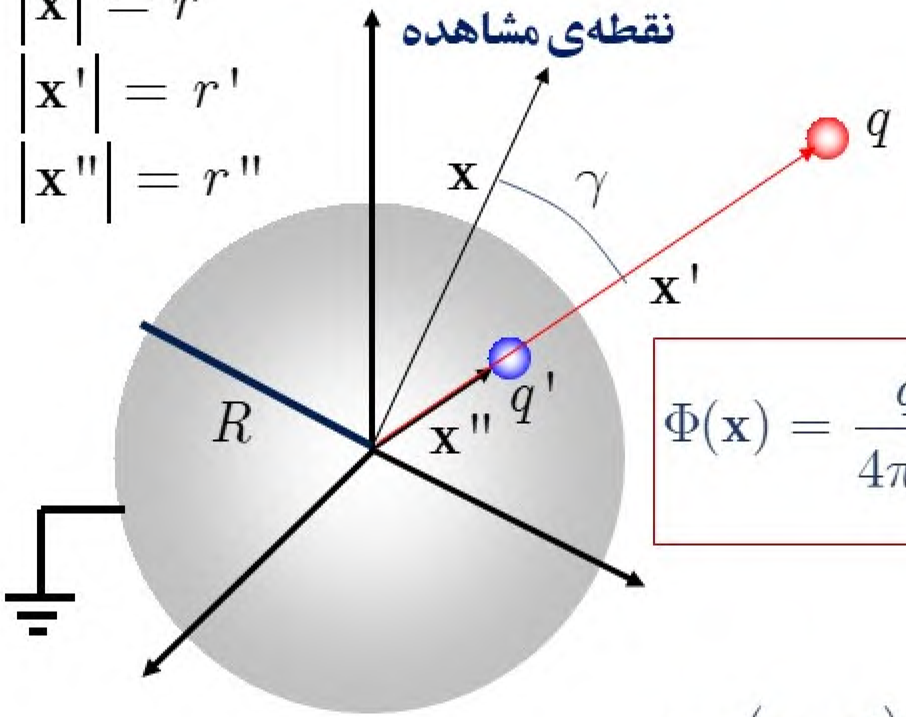
مسائل مقدار مرزی در الکتروستاتیک- بخش سوم

Electrostatic Boundary-Value Problems-Part3

$\left|\mathbf{x}\right| = r$

$\left|\mathbf{x}'\right| = r'$

$\left|\mathbf{x}''\right| = r''$



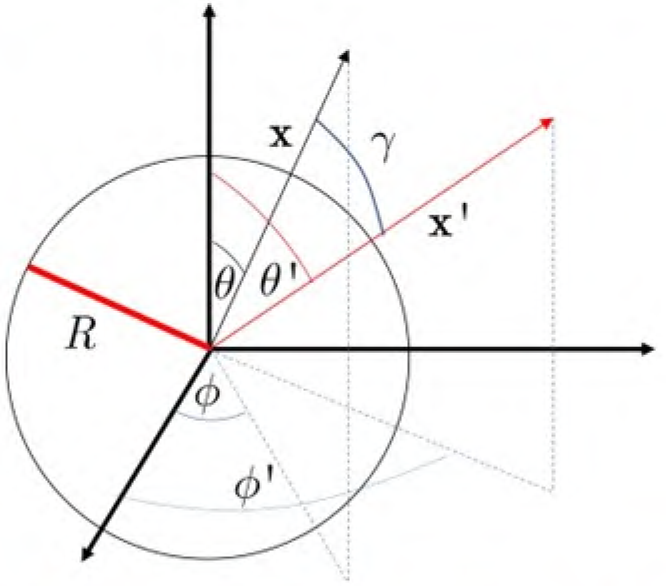
$$\Phi(r = R) = 0$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}''\right|}}$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r''^2 - 2rr''\cos\left(\mathbf{x},\mathbf{x}''\right)}}}$$

$$\cos\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) = \cos\left(\mathbf{x},\mathbf{x}''\right) = \cos\gamma$$

$$\boxed{\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)}$$



$$\Phi(r = R) = 0 \Rightarrow \frac{q}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + r''^2 - 2Rr''\cos\gamma}} = 0$$

عبارت فوق به ازای همه‌ی مقادیر γ برابر با صفر است. برای دو مقدار آن را بررسی می‌کنیم

$$\gamma = 0 \Rightarrow \frac{q}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr'}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + r''^2 - 2Rr''}} = 0$$

$$\frac{q}{r' - R} + \frac{q'}{R - r''} = 0$$

$$\gamma = \pi \Rightarrow \frac{q}{\sqrt{R^2 + r'^2 + 2Rr'}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + r''^2 + 2Rr''}} = 0$$

$$\frac{q}{r' + R} + \frac{q'}{R + r''} = 0$$

$$q' = -q\frac{R}{r'}$$

$$r'' = \frac{R^2}{r'}$$

اگر بار q به کره نزدیک شود یعنی $r' \to R$

آن‌گاه $q' \to q$ و $r'' \to R$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{\frac{R}{r'}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2r\frac{R^2}{r'}\cos\gamma}}\right]$$

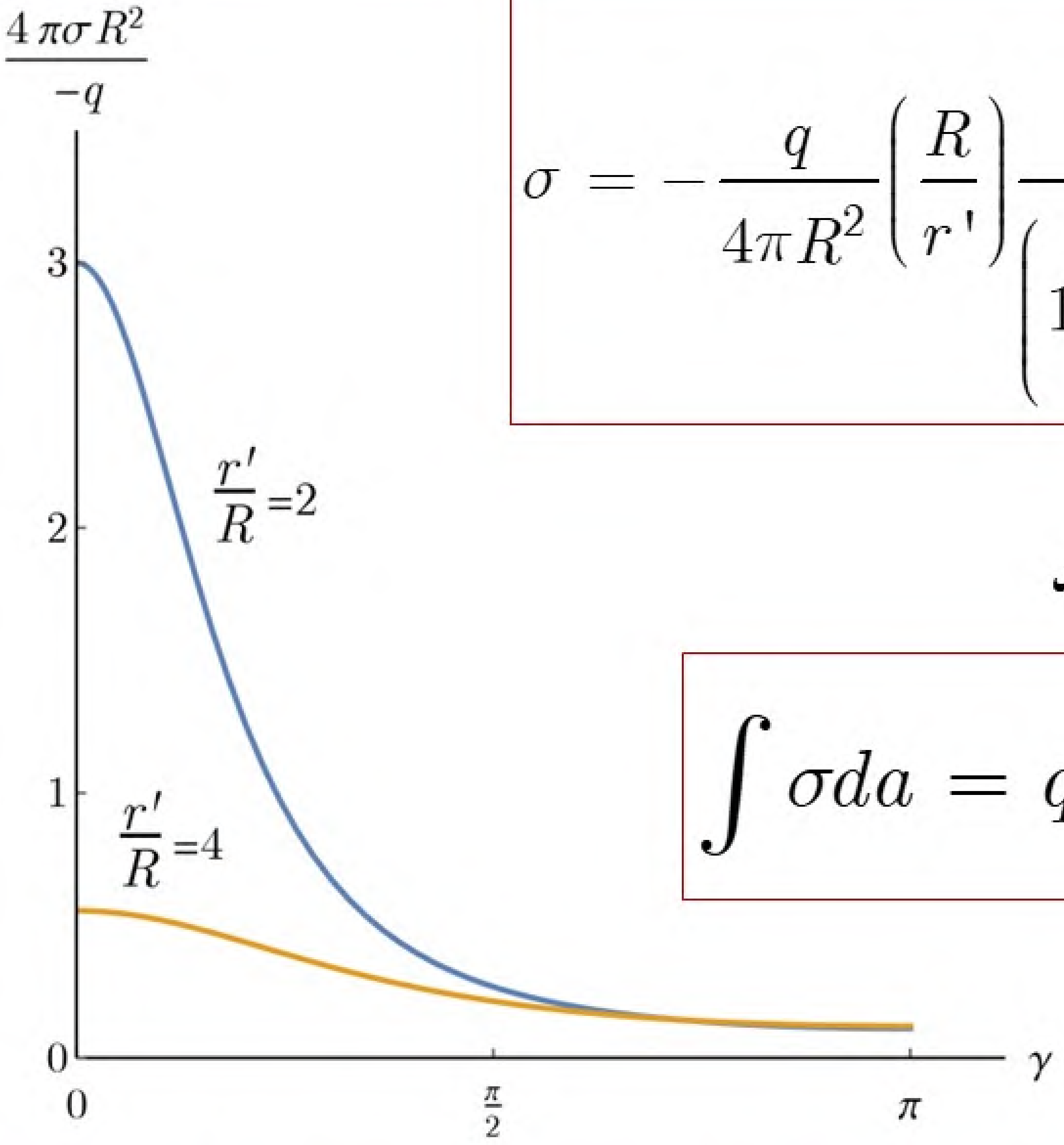
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{\frac{R}{r'}}{\frac{Rr}{r'}\sqrt{\frac{r'^2}{R^2} + \frac{R^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma}}\right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{1}{r\sqrt{\frac{r'^2}{R^2} + \frac{R^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma}}\right]$$

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{n}\Big|_{r=R} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{r}\Big|_{r=R}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \\ = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{r - r'\cos\gamma}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{1}{r^2}\frac{\frac{r'^2}{R^2} - \frac{r'}{R}\cos\gamma}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{3/2}}\right]_{r=R}$$

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{r'}\right)\frac{1 - \frac{R^2}{r'^2}}{\left(1 + \frac{R^2}{r'^2} - 2\frac{R}{r'}\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

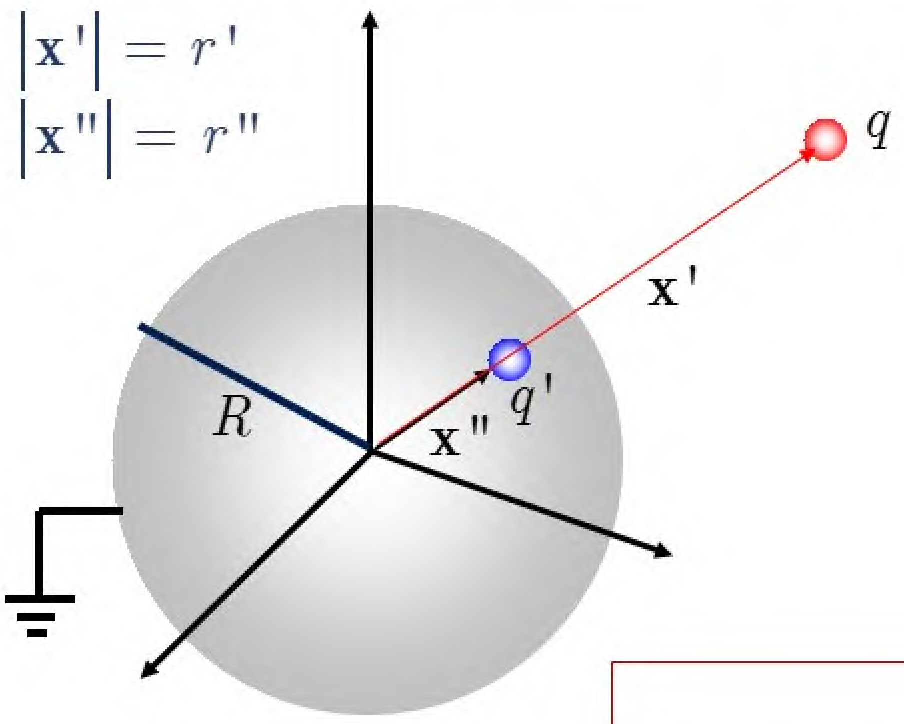


$$\boxed{\sigma = -\frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{r'}\right)\frac{1-\dfrac{R^2}{r'^2}}{\left(1+\dfrac{R^2}{r'^2}-2\dfrac{R}{r'}\cos\gamma\right)^{3/2}}}$$

با انتگرال گیری از چگالی سطحی بار، نشان دهید

$$\boxed{\int \sigma da = q' = -q\frac{R}{r'}}$$

الف) نیروی بین بار q و بار تصویری آن



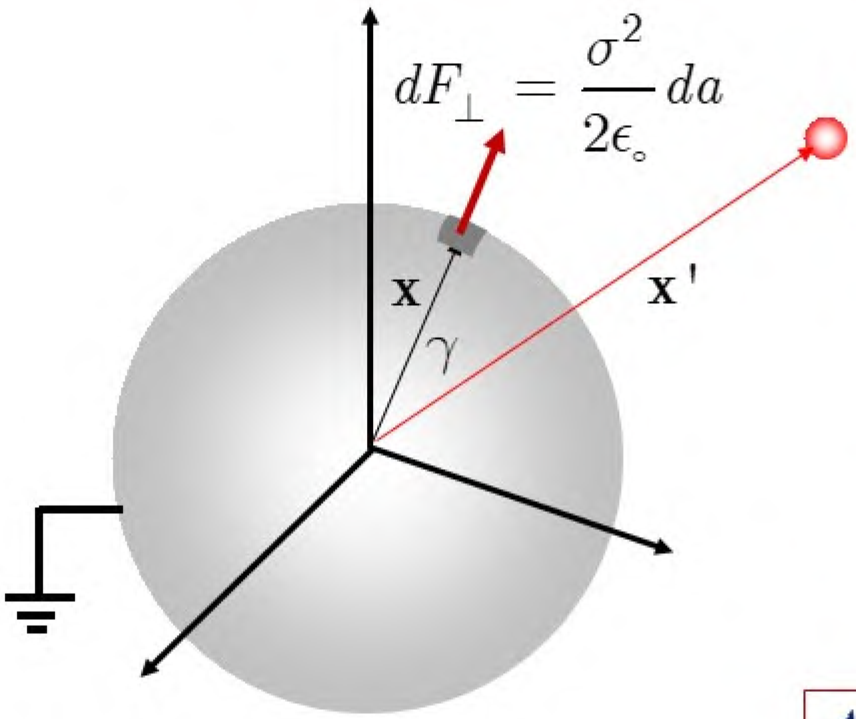
فاصله ی دو بار برابر است با $r' - r'' = r'\left(1 - \frac{R^2}{r'^2}\right)$

$$\boxed{F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r'-r'')^2} = \frac{-q^2\frac{R}{r'}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'^2\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{\left(\frac{R}{r'}\right)^3}{\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2}}$$

$$dF = dF_{\perp}\cos\gamma = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\,da\cos\gamma$$

ب) روش دوم برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر کره.

با توجه به تقارن مسئله واضح است که مؤلفه‌های عمود بر راستای $\mathbf{x}'$ یکدیگر را حذف می‌کنند و نیروی وارد بر کره برابر است با



$$|F| = \int dF = \int \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\,da\cos\gamma$$

$$|F| = \int \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{q^2}{16\pi^2 R^4}\left(\frac{R}{r'}\right)^2 \frac{\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2}{\left(1+\frac{R^2}{r'^2}-2\frac{R}{r'}\cos\gamma\right)^3}\,da\cos\gamma$$

برای سادگی محور z را منطبق بر $\mathbf{x}'$ در نظر می‌گیریم در این صورت $\theta' = 0$ و در نتیجه

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') = \cos\theta$$

نیروی وارد بر بار q از طرف کره (یا نیروی وارد بر کره از طرف بار q)

$$\left|F\right| = \int \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{q^2}{16\pi^2 R^4}\left(\frac{R}{r'}\right)^2 \frac{\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2}{\left(1+\frac{R^2}{r'^2}-2\frac{R}{r'}\cos\theta\right)^3} R^2 d\Omega \cos\theta$$

$$\left|F\right| = \frac{q^2}{32\epsilon_0\pi^2 R^2}\left(\frac{R}{r'}\right)^2\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos\theta}{\left(1+\frac{R^2}{r'^2}-2\frac{R}{r'}\cos\theta\right)^3} d\left(\cos\theta\right) d\phi$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\cos\theta}{\left(1+\frac{R^2}{r'^2}-2\frac{R}{r'}\cos\theta\right)^3} d\left(\cos\theta\right) = \frac{4\frac{R}{r'}}{\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^4}$$

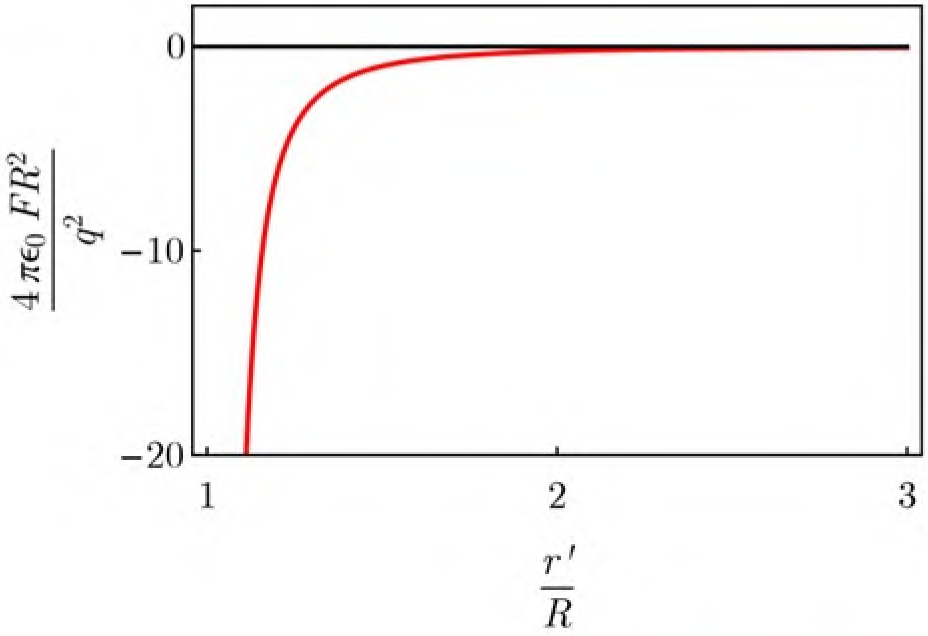
دانشگاه خوارزمی

$$\left|F\right| = \frac{q^2}{32\epsilon_\circ \pi^2 R^2}\left(\frac{R}{r'}\right)^2\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2(2\pi)\frac{4\dfrac{R}{r'}}{\left(1-\dfrac{R^2}{r'^2}\right)^4}$$

$$\left|F\right| = \frac{q^2}{4\epsilon_0 \pi R^2}\frac{\left(\dfrac{R}{r'}\right)^3}{\left(1-\dfrac{R^2}{r'^2}\right)^2}$$

دانشگاه خوارزمی

نیروی وارد بر بار q از طرف کره (یا نیروی وارد بر کره از طرف بار q)



$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{\left(\frac{R}{r'}\right)^3}{\left(1-\frac{R^2}{r'^2}\right)^2}$$

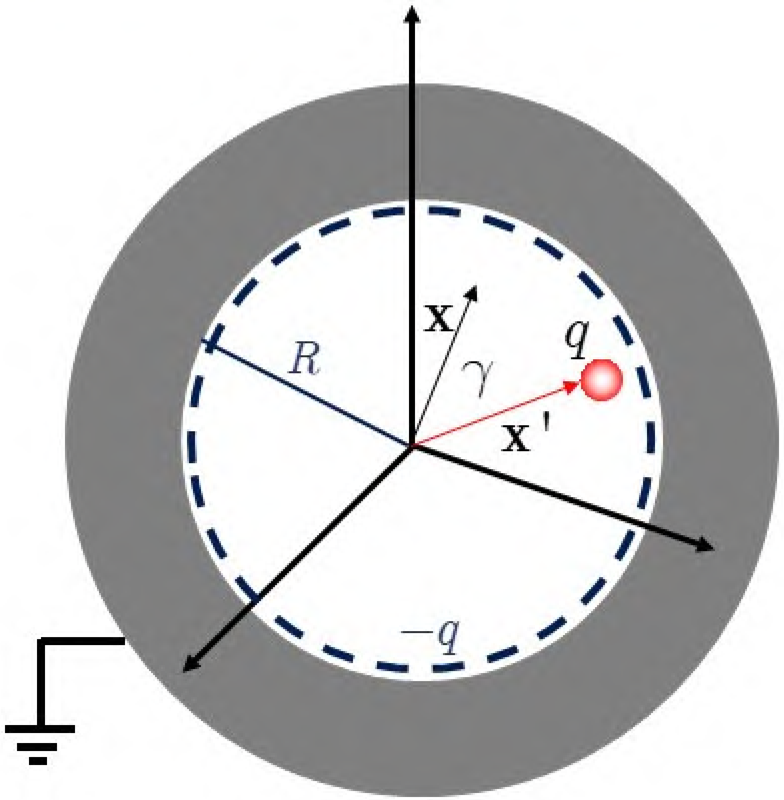
واضح است که نیرو جاذبه است. اگر بار q را به کره نزدیک کنیم،

برای فواصل خیلی نزدیک به کره یعنی $d = r' - R \ll R$

نیرو برابر خواهد بود با

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{Rr'}{\left(r'^2 - R^2\right)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R(d+R)}{\left(r'-R\right)^2\left(r'+R\right)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R(d+R)}{d^2\left(2R+d\right)^2}$$

نیرو کماکان جاذبه است $$F \approx -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2}{d^2\left(2R\right)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4d^2}$$



لطفا به عنوان تمرین، مسئله را کامل حل کنید و نشان دهید
که بار کل القایی بر سطح درونی پوسته‌ی کروی برابر است با

$$\int \sigma da = -q$$

در باره‌ی نتیجه‌ی به دست آمده بحث کنید.

شاد و مهربان باشید