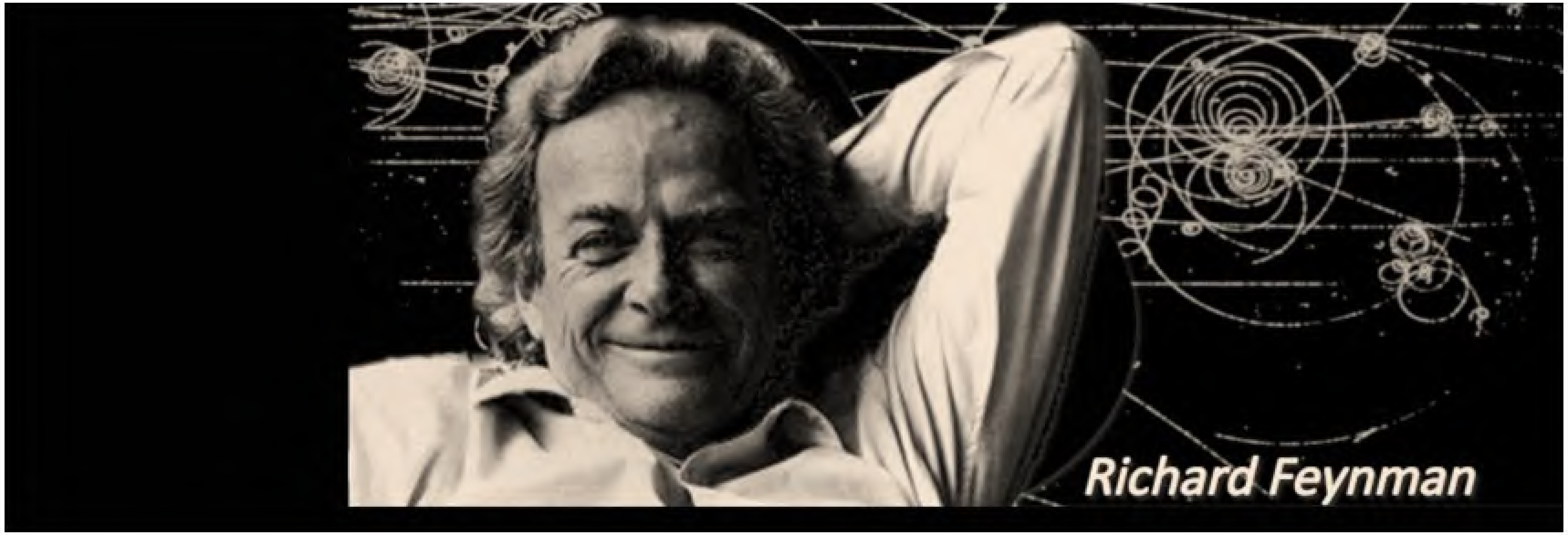
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

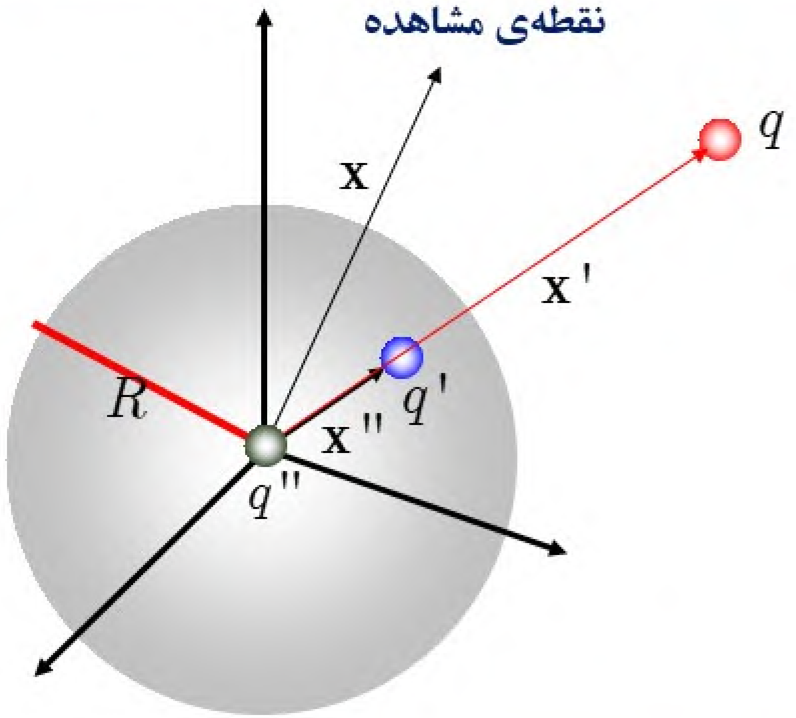
دانشگاه خوارزمی

درس پانزدهم

مسائل مقدار مرزی در الکتروستاتیک - بخش پنجم

Electrostatic Boundary-Value Problems-Part5

دانشگاه خوارزمی



توجه کنید که برای حل این مسئله به روش تصویر، شرایط مسئله را نمی‌توان تنها با یک بار تصویری برآورده کرد.

ابتدا کره را به زمین وصل می‌کنیم. بار $q' = -\frac{R}{r'}q$ در آن القاء می‌شود.

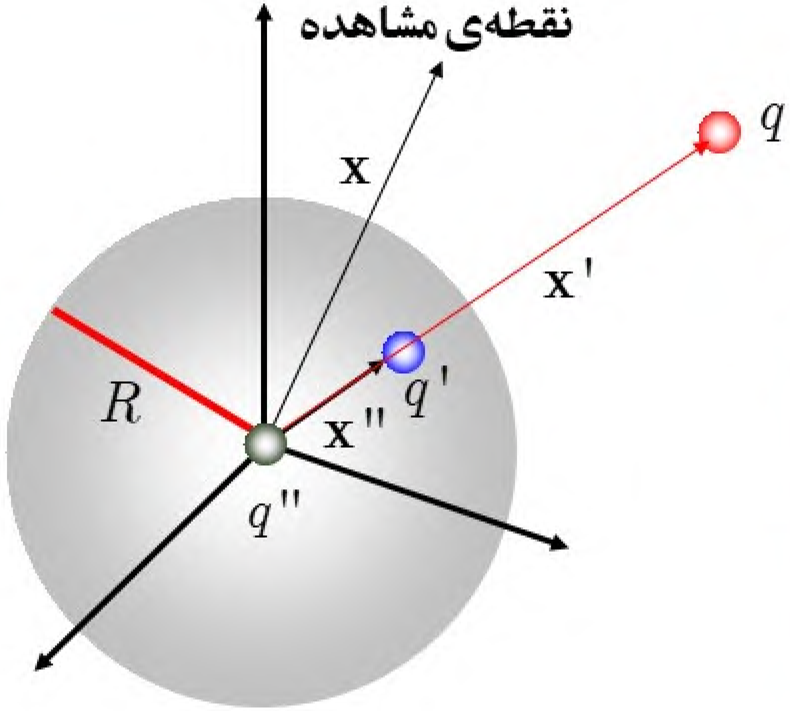
این همان بار تصویری است که مکان آن در $r'' = \frac{R^2}{r'}$ است.

سپس کره را از زمین قطع می‌کنیم. بار q'' به مقداری به کره اضافه می‌کنیم که بار کل برابر با Q شود.

یعنی $Q = q' + q''$. یا $q'' = Q - q'$. این همان بار تصویری دوم است.

واضح است که چون سطح کره یک سطح هم پتانسیل است باید این بار تصویری دوم در مرکز کره قرار گیرد

دانشگاه خوارزمی



$$q' = -\frac{R}{r'}q$$

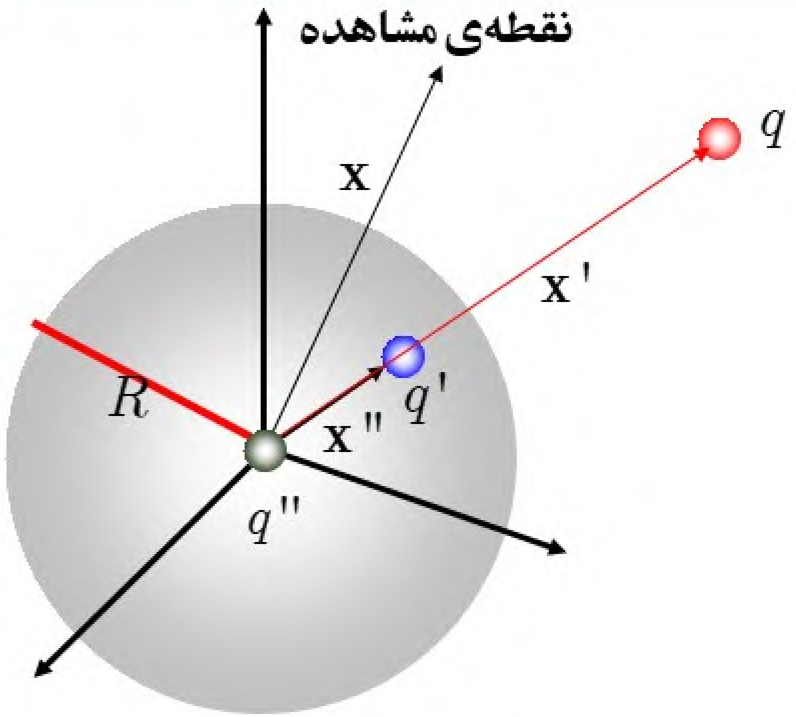
$$q'' = Q - q' = Q + \frac{R}{r'}q$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{-q\,\dfrac{R}{r'}}{\left|\mathbf{x}-\dfrac{R^2}{r'^2}\mathbf{x}'\right|} + \frac{Q+\dfrac{R}{r'}q}{r}\right]}$$

به عنوان تمرین چگالی سطحی بار الکتریکی بر روی سطح کره حساب کنید و نشان دهید

$$\int \sigma da = q'' + q' = Q$$

نیروی وارد بر بار q از طرف کره



$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{qq'}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right|^3}\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right)+\frac{qq''}{\left|\mathbf{x}'\right|^3}\mathbf{x}'\right]$$

توجه کنید که

$$\frac{\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right)}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right|} = \frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

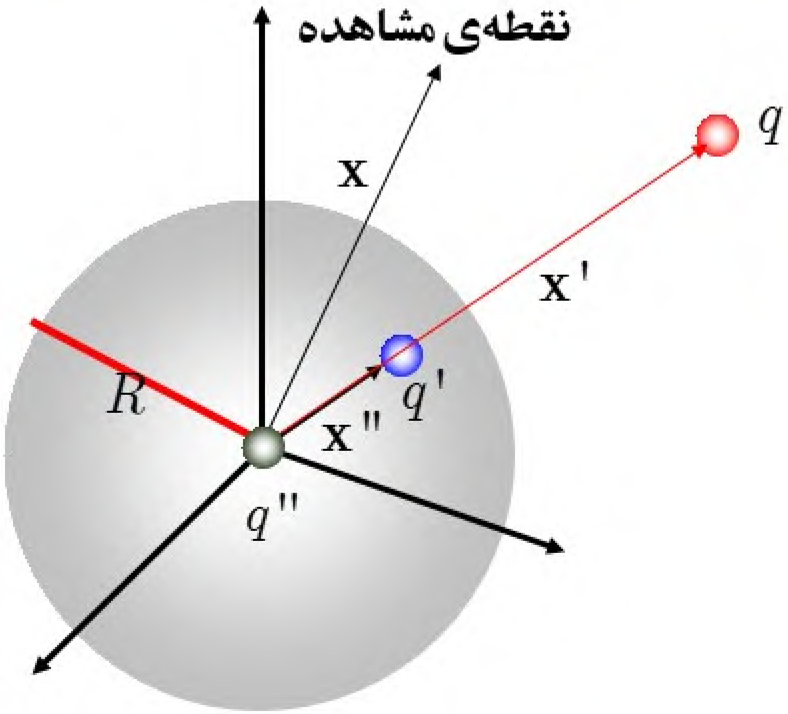
$$q' = -\frac{R}{r'}q$$

$$q'' = Q - q' = Q + \frac{R}{r'}q$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\left[\frac{-\frac{R}{r'}q^2}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right|^2}+\frac{q(Q+\frac{R}{r'}q)}{\left|\mathbf{x}'\right|^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

دانشگاه خوارزمی

نیروی وارد بر بار q از طرف کره



$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-\frac{R}{r'}q^2}{\left|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right|^2} + \frac{q(Q + \frac{R}{r'}q)}{\left|\mathbf{x}'\right|^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

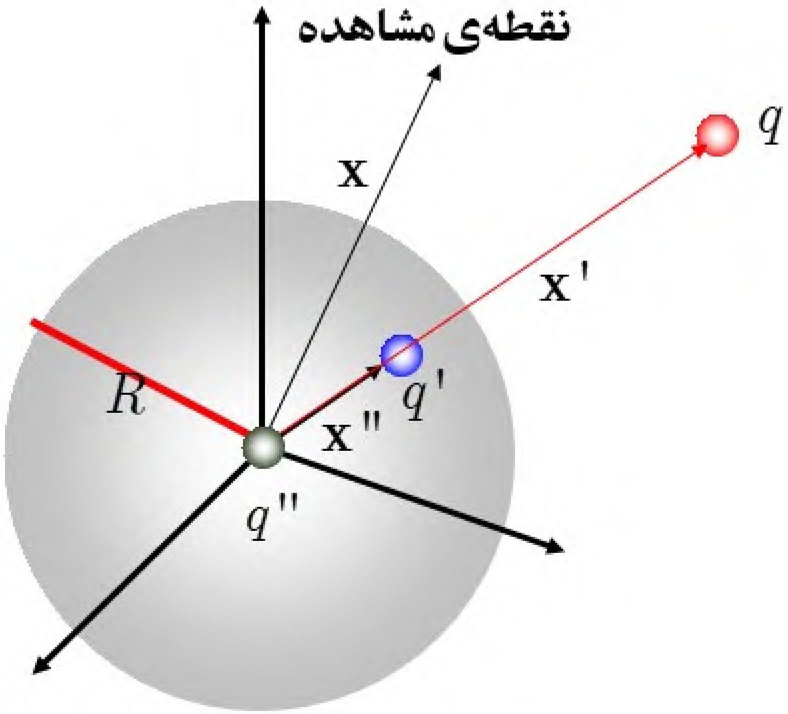
$$\left|\mathbf{x}'\right| = r'; \qquad \left|\mathbf{x}''\right| = r''$$

$$\left|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right| = r' - r'' = r' - \frac{R^2}{r'}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-\frac{R}{r'}q}{\left|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right|^2} + \frac{Q}{\left|\mathbf{x}'\right|^2} + \frac{\frac{R}{r'}q}{\left|\mathbf{x}'\right|^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r'^2} + \frac{-\frac{R}{r'}q}{\left(r' - \frac{R^2}{r'}\right)^2} + \frac{\frac{R}{r'}q}{r'^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

نیروی وارد بر بار q از طرف کره



$$\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r'^2}+\frac{-Rr'q}{\left(r'^2-R^2\right)^2}+\frac{Rq}{r'^3}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

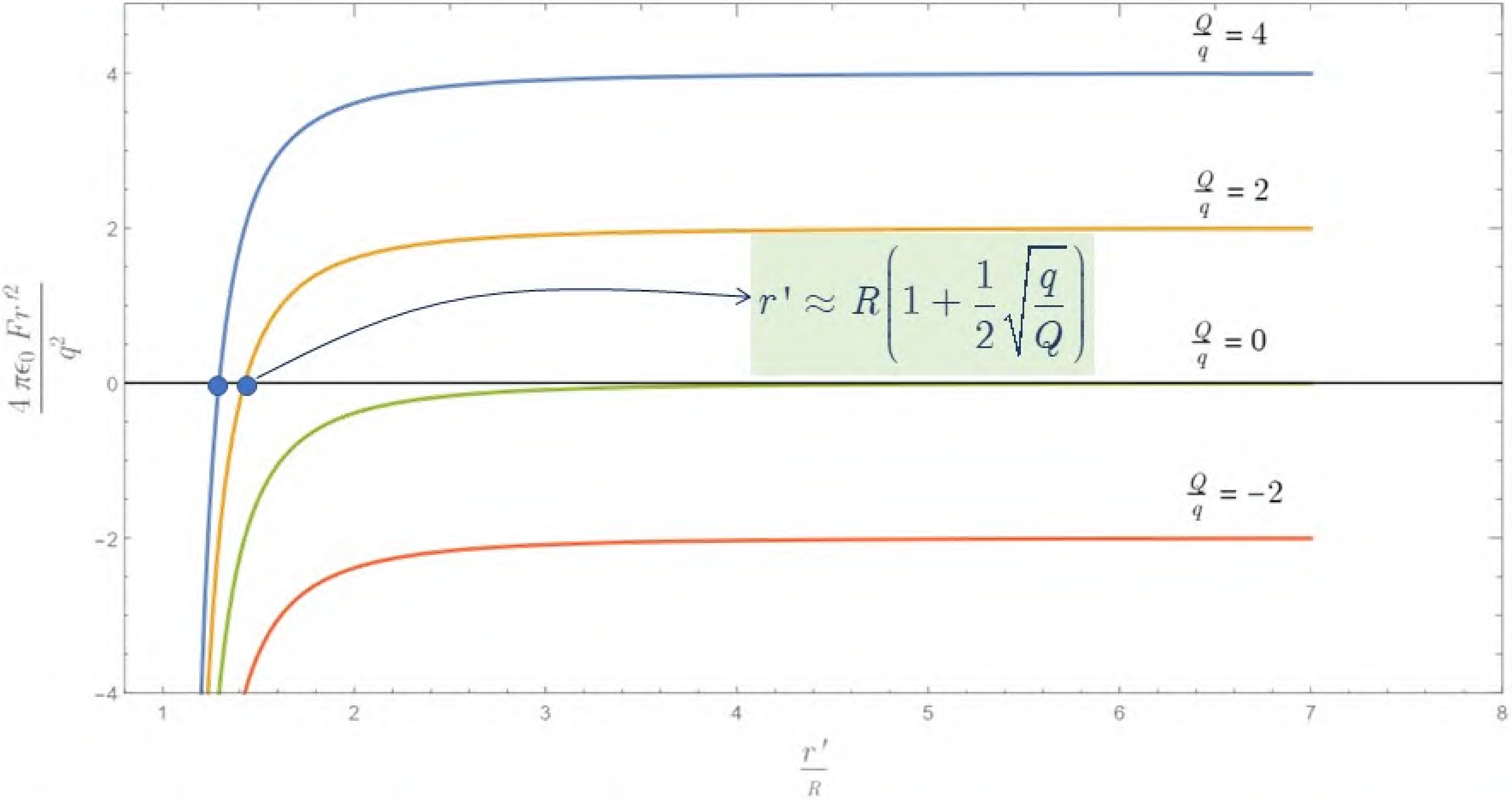
$$\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r'^2}+\frac{-Rq\left(r'^4-\left(r'^2-R^2\right)^2\right)}{r'^3\left(r'^2-R^2\right)^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

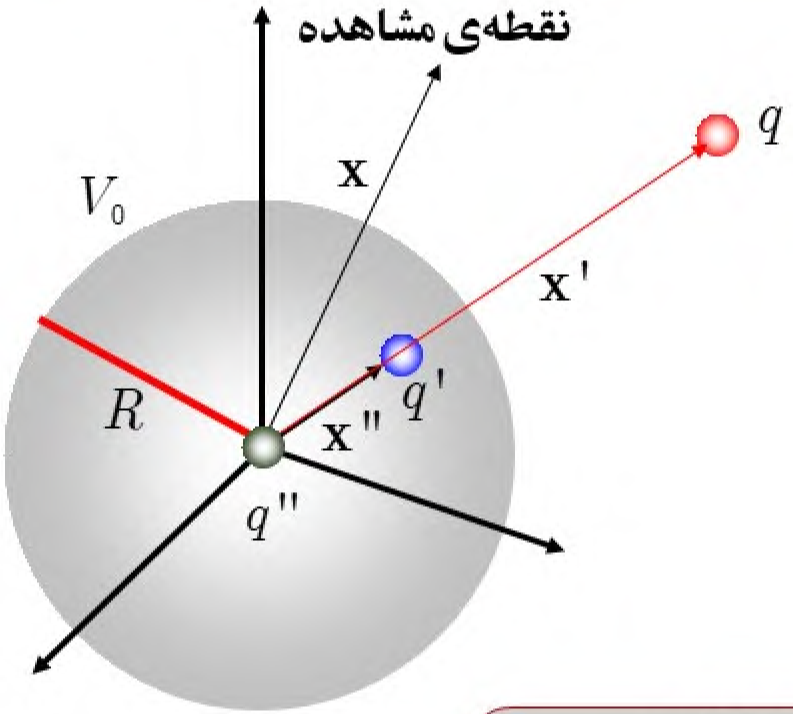
$$\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r'^2}+\frac{-Rq\left(r'^4-\left(r'^4+R^4-2r'^2R^2\right)\right)}{r'^3\left(r'^2-R^2\right)^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

$$\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r'^2}+\frac{-R^3q\left(-R^2+2r'^2\right)}{r'^3\left(r'^2-R^2\right)^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{\left|\mathbf{x}'\right|}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ r'^2}\left[Q - \frac{R^3 q\left(-R^2 + 2r'^2\right)}{r'\left(r'^2 - R^2\right)^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|}$$

می‌خواهیم ببینیم این نیرو در چه شرایطی دافعه و در چه شرایطی جاذبه است. باید علامت تابع داخل کروشه را تعیین کنیم





توجه کنید که برای حل این مسئله به روش تصویر، شرایط مسئله را نمی‌توان تنها با یک بار تصویری برآورده کرد.

ابتدا کره را به زمین وصل می‌کنیم. بار $q' = -\dfrac{R}{r'}q$ در آن القاء می‌شود.

این همان بار تصویری است که مکان آن در $r'' = \dfrac{R^2}{r'}$ است.

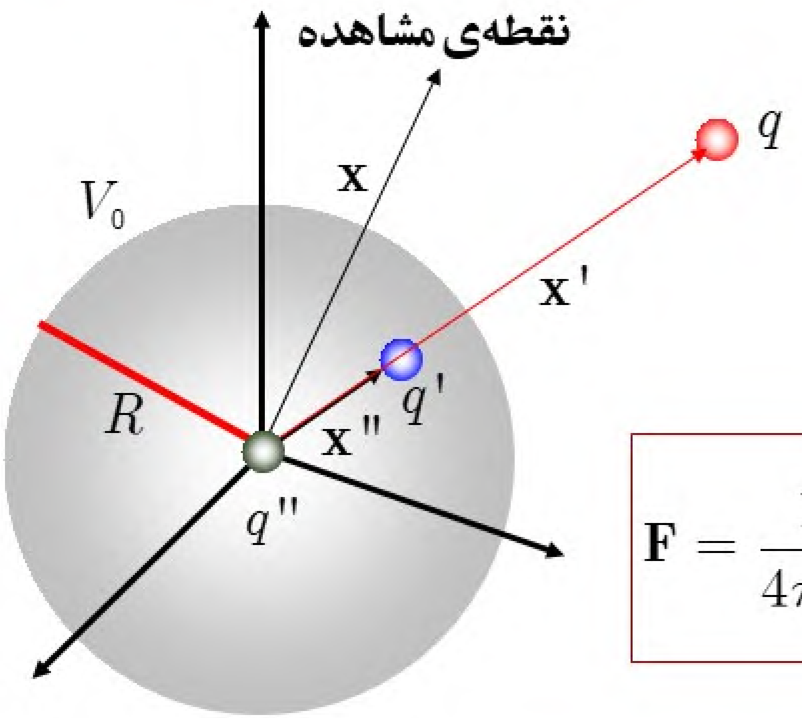
سپس کره را از زمین قطع می‌کنیم. بار q'' به مقداری به کره اضافه می‌کنیم که پتانسیل کره V_0 شود.

واضح است که چون سطح کره یک سطح هم پتانسیل است باید این بار تصویری دوم در مرکز کره قرار گیرد

$$V_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

نیروی وارد بر بار q از طرف کره (یا نیروی وارد بر کره از طرف بار q)

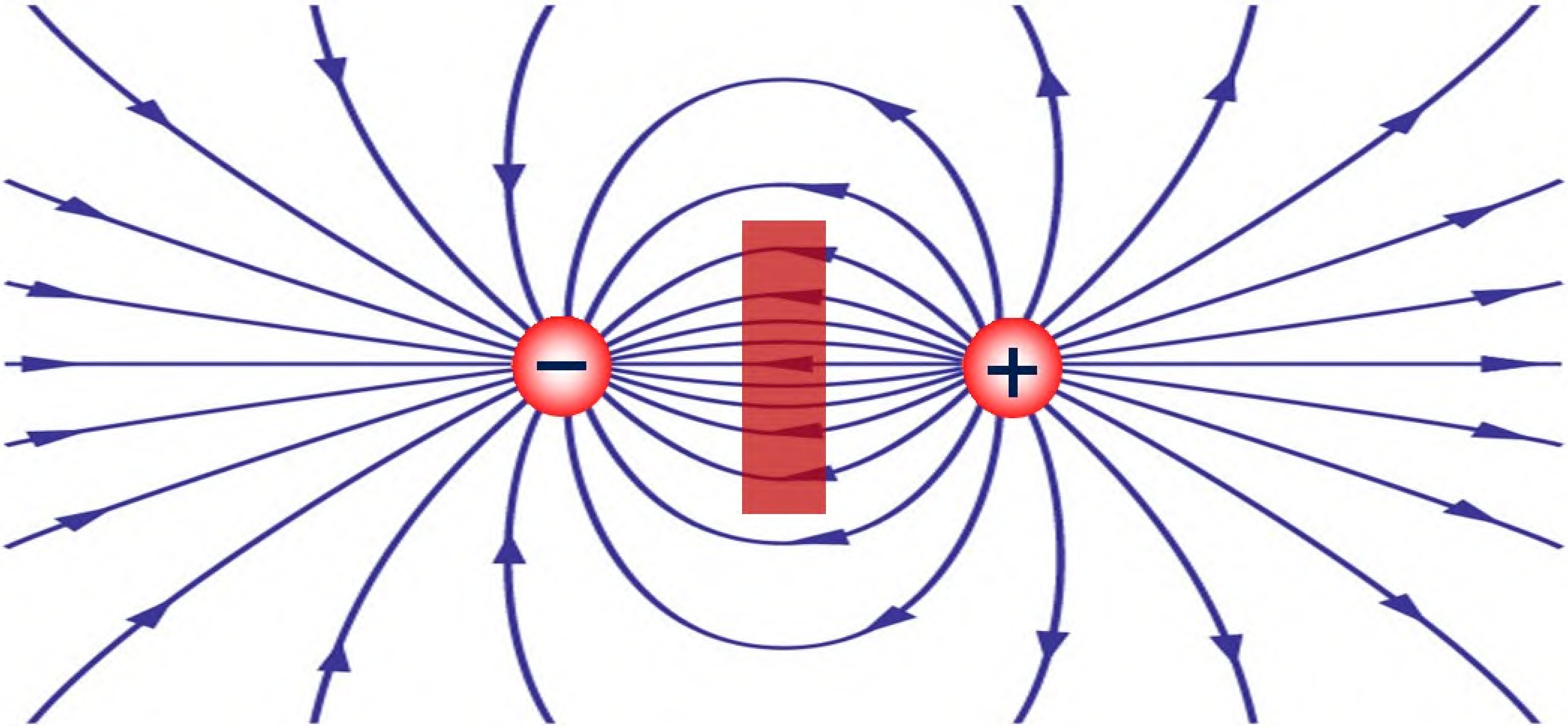


$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{-q\dfrac{R}{r'}}{\left|\mathbf{x}-\dfrac{R^2}{r'^2}\mathbf{x}'\right|}\right] + \frac{V_0 R}{r}$$

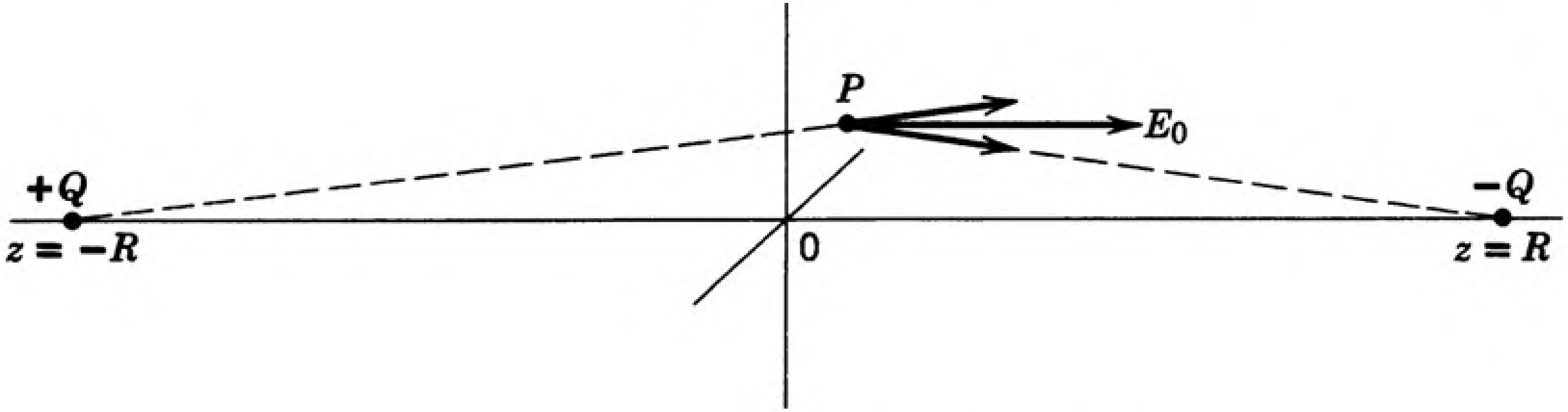
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{qq'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R q}{|\mathbf{x}'|^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|}$$

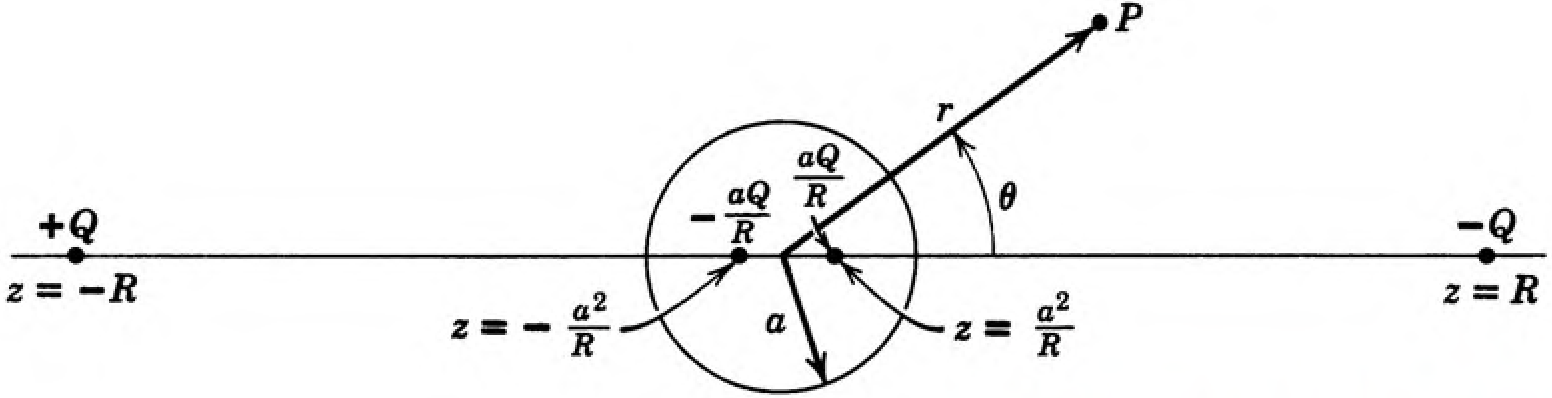
$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-q\dfrac{R}{r'}}{\left(r'-\dfrac{R^2}{r'}\right)^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0 R}{|\mathbf{x}'|^2}\right]\frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\left[\frac{-qRr'^3}{\left(r'^2-R^2\right)^2} + 4\pi\epsilon_0 V_0 R\right]\frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|}$$

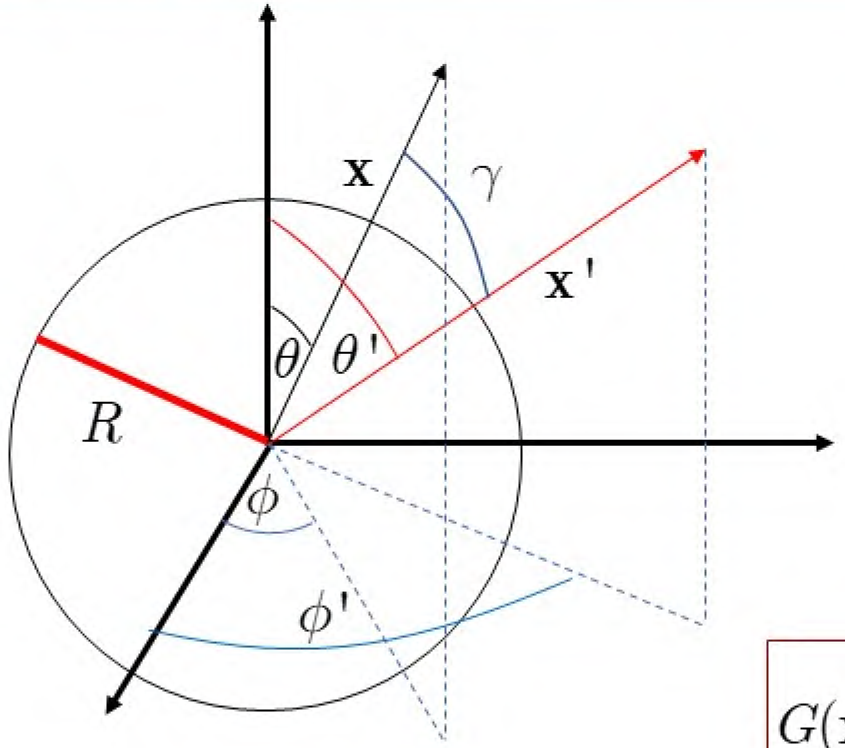


تصاویر از کتاب الکترودینامیک جکسون ویرایش سوم ص ۶۳





لطفا جزئیات حل مسئله را کامل انجام بدهید

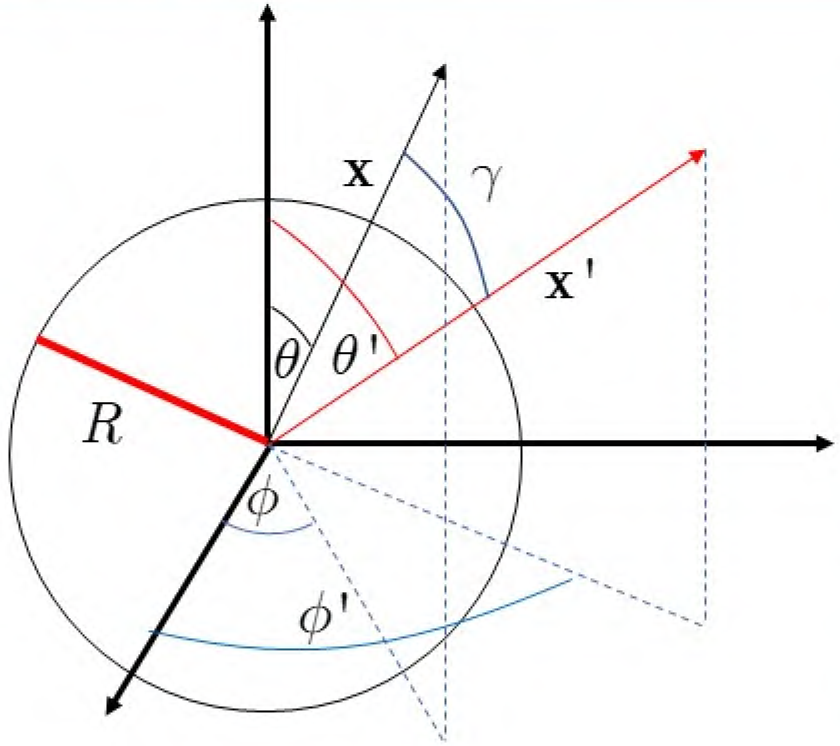


$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} - \frac{R}{r'\left|\mathbf{x}-\dfrac{R^2}{r'^2}\mathbf{x}'\right|}}$$

واضح است که برای $r' = R$ داریم: $G\big|_{r'=R} = 0$

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{R}{r'\sqrt{r^2 + \dfrac{R^4}{r'^2} - \dfrac{2rR^2}{r'}\cos\gamma}}}$$

$$\boxed{\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}$$



$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{R}{r'\sqrt{r^2 + \dfrac{R^4}{r'^2} - \dfrac{2rR^2}{r'}\cos\gamma}}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{r'^2\, r^2}{R^2} + R^2 - 2rr'\cos\gamma}}$$

$$G\Big|_{r'=R} = G\Big|_{r=R} = 0$$

با داشتن تابع گرین می‌توانیم مسائلی شامل توزیع بارهایی در اطراف سطوح کروی حل کنیم.

اگر یک چگالی بار ρ_v در کنار یک سطح کروی با پتانسیل $\Phi(R,\theta,\phi) = f(\theta,\phi)$ داشته باشیم

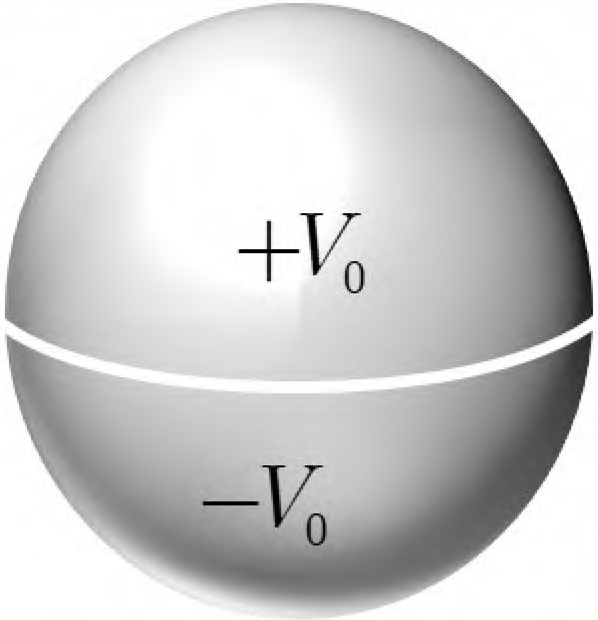
$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \int \rho_v(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi}\oint \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}da'}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\int \rho_v(r',\theta',\phi')\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r^2}{R^2}+R^2-2rr'\cos\gamma}}\right]d^3\mathbf{x}'$$
$$+\frac{1}{4\pi}\oint \Phi(R,\theta',\phi')\frac{r^2-R^2}{R\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}da'$$

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{r^2-R^2}{R\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}}$$

توجه کنید که
$\hat{n}' = -\hat{r}'$

دانشگاه خوارزمی



$$\Phi(R,\theta,\phi) = \begin{cases} +V_0 & 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ \\ -V_0 & \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \end{cases}$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\Phi(R,\theta',\phi')\frac{r^2 - R^2}{R\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}R^2 d(\cos\theta')d\phi'}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) = {} & \frac{V_0}{4\pi}R(r^2 - R^2)\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{d(\cos\theta')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}} \\ & - \frac{V_0}{4\pi}R(r^2 - R^2)\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{0}\frac{d(\cos\theta')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}\end{aligned}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2)\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{d(\cos\theta')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2)\int_0^{2\pi}\int_{-1}^0 \frac{d(\cos\theta')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi - \phi'\right)$$

در انتگرال دوم تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم

$$\theta' = \theta'' - \pi$$

$$\cos\theta' = -\cos\theta''$$

$$d(\cos\theta') = -d(\cos\theta'')$$

$$\cos\gamma = -\cos\theta\cos\theta'' - \sin\theta\sin\theta''\cos\left(\phi - \phi'\right) = -\cos\gamma^*$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d(\cos\theta')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

$$- \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \int_1^0 \frac{-d(\cos\theta'')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 + 2Rr\cos\gamma^*\right)^{3/2}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d(\cos\theta')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

$$- \frac{V_\circ}{4\pi} R(r^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d(\cos\theta'')d\phi'}{\left(r^2 + R^2 + 2Rr\cos\gamma^*\right)^{3/2}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_\circ}{4\pi} R(r^2 - R^2) \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta') \left[\frac{1}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(r^2 + R^2 + 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}} \right]$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2) \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta') \left[\frac{1}{\left(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(r^2 + R^2 + 2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}} \right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2) \frac{1}{\left(r^2 + R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta') \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}} \right]$$

ابتدا مسئله را برای $\theta = 0$ (روی محور $z+$) حل می کنیم

$$\cos\gamma = \cos\theta' \qquad r = z$$

$$\Phi(z) = \frac{V_0}{4\pi} R(z^2 - R^2) \frac{1}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d\left(\cos\theta'\right) \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2Rz}{z^2 + R^2}\cos\theta'\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{2Rz}{z^2 + R^2}\cos\theta'\right)^{3/2}} \right]$$

$$\Phi(z) = \frac{V_0}{4\pi} \frac{R(z^2 - R^2)}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} 2\pi \int_0^1 d\left(\cos\theta'\right) \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2Rz}{z^2 + R^2}\cos\theta'\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{2Rz}{z^2 + R^2}\cos\theta'\right)^{3/2}} \right]$$

انتگرال اول $$= \int_0^1 \frac{d\left(\cos\theta'\right)}{\left(1 - \dfrac{2Rz}{z^2 + R^2}\cos\theta'\right)^{3/2}} = -\frac{z^2 + R^2}{2Rz}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{z^2 + R^2}{2Rz}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{2Rz}{R^2 + z^2}}} - 1\right)$$

انتگرال دوم $$= \int_0^1 \frac{d\left(\cos\theta'\right)}{\left(1 + \dfrac{2Rz}{z^2 + R^2}\cos\theta'\right)^{3/2}} = \frac{z^2 + R^2}{2Rz}\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{z^2 + R^2}{2Rz}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2Rz}{R^2 + z^2}}} - 1\right)$$

$$\boxed{\Phi(z) = V_0\left(1 - \frac{z^2 - R^2}{z\sqrt{z^2 + R^2}}\right)}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi} R(r^2 - R^2) \frac{1}{\left(r^2 + R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta') \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}} \right]$$

توجه کنید که $\left(r^2 + R^2 - 2rR\right) = (r - R)^2 > 0 \Leftarrow \left(r^2 + R^2\right) > 2rR \Leftarrow \frac{2rR}{r^2 + R^2} < 1$

$$\boxed{\left| \frac{2rR}{r^2 + R^2} \cos\gamma \right| < 1}$$

می‌خواهیم عبارت زیر را بسط دهیم:

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

$$x = \frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma$$

$$\left(1 + x\right)^{-3/2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-\frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - 1\right)x^2 \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n+1}{2}\right)x^n \cdots$$

$$\left(1 + x\right)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n} x^n$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{2Rr}{r^2+R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n}\left(\frac{2Rr}{r^2+R^2}\right)^n\cos^n\gamma$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2Rr}{r^2+R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(2n+1)!!}{2^n}\left(\frac{2Rr}{r^2+R^2}\right)^n\cos^n\gamma$$

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{V_0}{4\pi}\frac{R(r^2-R^2)}{\left(r^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2Rr}{r^2+R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}}-\frac{1}{\left(1+\frac{2Rr}{r^2+R^2}\cos\gamma\right)^{3/2}}\right]$$

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{V_0}{4\pi}\frac{R(r^2-R^2)}{\left(r^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(2n+1)!!}{2^n}\left(\frac{2Rr}{r^2+R^2}\right)^n\left[\cos^n\gamma-(-1)^n\cos^n\gamma\right]$$

جملات با n زوج صفر می‌شوند

$n = 1 \Rightarrow$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi}\frac{R(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{3/2}}\left(\frac{3}{2}\right)(2)\left(\frac{2Rr}{r^2 + R^2}\right)\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta')\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')\right]$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4\pi}\frac{R(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{3/2}}\left(\frac{3}{2}\right)(2)\left(\frac{2Rr}{r^2 + R^2}\right)\left(\pi\cos\theta\right)$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{3V_0}{2}\frac{R^2 r(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{5/2}}\cos\theta$$

$n = 3 \Rightarrow$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \frac{35V_0}{4\pi}\frac{R^4 r^3(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{9/2}}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta')\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')\right]^3$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \frac{35V_0}{4\pi}\frac{R^4 r^3(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{9/2}}\frac{\pi}{4}\cos\theta\left(3 - \cos^2\theta\right)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_3(\mathbf{x}) \cdots$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3V_0}{2}\frac{R^2 r(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{5/2}}\cos\theta + \frac{35V_0}{4\pi}\frac{R^4 r^3(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{9/2}}\frac{\pi}{4}\cos\theta\left(3 - \cos^2\theta\right) + \cdots$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3V_0}{2r^2}\frac{R^2 r^3(r^2 - R^2)}{\left(r^2 + R^2\right)^{5/2}}\left(\cos\theta + \frac{35}{24}\frac{R^2 r^2}{\left(r^2 + R^2\right)^2}\cos\theta\left(3 - \cos^2\theta\right) + \cdots\right)}$$

همان‌طور که از تقارن مسئله انتظار می‌رود، فقط توان‌های فرد $\cos\theta$ ظاهر می‌شود

اگر بجای $\frac{2Rr}{r^2 + R^2}\cos\gamma$ برحسب $\frac{R}{r}\cos\gamma$ بسط می‌دادیم:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3V_0 R^2}{2r^2}\left(\cos\theta - \frac{7R^2}{12r^2}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right) + \cdots\right)}$$

به ازای $\frac{R}{r} = \frac{1}{5}$ جمله‌ی دوم تنها دو درصد نقش دارد.

> نشان دهید به ازای $\theta = 0$ پاسخ به دست آمده با آن‌چه قبلا برای پتانسیل روی محور z به دست آوردیم یکسان است

به عنوان تمرین تابع گرین را برای داخل کره بنویسید

شاد و مهربان باشید