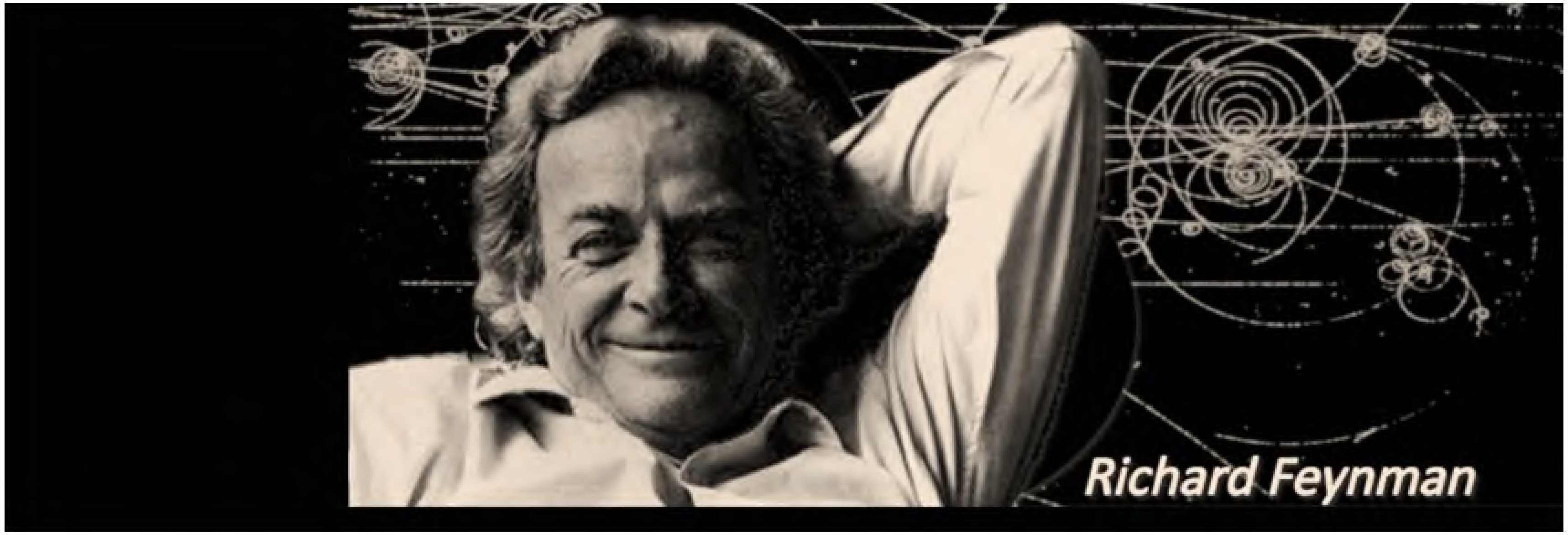
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس شانزدهم

توابع متعامد و بسط توابع

Orthogonal Functions and Expansions

دانشگاه خوارزمی

تعریف ضرب درونی دو تابع (در بازه‌ی (a,b))

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) dx$$

اگر حاصل این انتگرال صفر باشد، گوییم این دو تابع در بازه‌ی (a,b) متعامدند.

توابع $f(x)$ و $g(x)$ متعامدند $\langle f | g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) dx = 0 \rightarrow$

اگر حاصل ضرب درونی یک تابع در خودش برابر با ۱ شود، آن تابع را بهنجار می‌نامیم.

تابع $f(x)$ تابعی بهنجار است $\langle f | f \rangle = \int_a^b \left| f(x) \right|^2 dx = 1 \rightarrow$

دانشگاه خوارزمی

دنباله‌ی توابع $\left\{u_n(x)\right\} = \left\{u_1(x), u_2(x), \ldots\right\}$ را در نظر بگیرید.

اگر این توابع، انتگرال‌پذیر مجذوری باشند یعنی:

$$\left\langle u_i(x) \middle| u_i(x) \right\rangle = \int_a^b u_i^*(x) u_i(x) dx < \infty$$

و نیز این توابع دو به دو متعامد باشند،

$$\left\langle u_i(x) \middle| u_j(x) \right\rangle = \int_a^b u_i^*(x) u_j(x) dx = 0; \quad i \neq j$$

در این صورت، مجموعه‌ی $\left\{u_n(x)\right\}$ را یک مجموعه‌ی متعامد orthogonal در بازه‌ی (a,b) می‌نامیم.

اگر توابع $u_i(x)$ بهنجار باشند، $\left\langle u_i(x) \middle| u_i(x) \right\rangle = \int_a^b u_i^*(x) u_i(x) dx = 1$

آن‌گاه مجموعه‌ی $\left\{u_n(x)\right\}$ را یک مجموعه‌ی خودبهنجار orthonormal در بازه‌ی (a,b) می‌نامیم.

$$\boxed{\left\langle u_i(x) \middle| u_j(x) \right\rangle = \int_a^b u_i^*(x) u_j(x) dx = \delta_{ij}}$$

دانشگاه خوارزمی

تابعی مانند $f(x)$ را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی (a,b) انتگرال‌پذیر مجذوری باشد.

یک نمایش برای این تابع بر حسب چند جمله از u_n ها را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x) \quad \leftrightarrow \quad \sum_{n=۱}^{N} a_n u_n(x)$$

سؤالی که مطرح است که a_n ها را چگونه انتخاب کنیم که نمایش فوق «بهترین» نمایش برای $f(x)$ باشد.

منظور از کلمه‌ی «بهترین» چیست؟

بهترین نمایش را بدین صورت تعریف می‌کنیم که خطای میانگین مربعی، کمینه باشد

$$M_N = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n(x) \right|^2 dx$$

می‌توان نشان داد که M_N در صورتی کمینه است که a_n به شکل زیر باشند:

$$\boxed{M_N \text{ شرط کمینه شدنِ } \quad \rightarrow \quad a_n = \int_a^b u_n^*(x) f(x) dx}$$

هرچه مقدار N بیش‌تر باشد، انتظار می‌رود که سریِ نمایش $f(x)$ در هر نقطه به مقدار $f(x)$ در آن نقطه نزدیک‌تر شود

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} M_N = 0}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)}$$

در این صورت گوییم u_n ها یک مجموعه‌ی کامل تشکیل می‌دهند

دانشگاه خوارزمی

$$M_N = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n(x) \right|^2 dx$$

نشان دهید که M_N در صورتی کمینه است که a_n به شکل زیر باشند:

$$\boxed{M_N \text{ شرط کمینه شدنِ } \rightarrow \; a_n = \int_a^b u_n^*(x) f(x) dx}$$

حل: **در حالت کلی a_n ها کمیت‌های مختلطی هستند. آن‌ها را به شکل زیر می نویسیم**

$$a_n = a_{1n} + i a_{2n}$$

بدین ترتیب می‌توان گفت که خطای میانگین مربعی، M_N ، تابعی از $2N$ متغیر حقیقی a_{1n} و a_{2n} است. شرط کمینه شدنِ M_N عبارت است از:

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_{1n}} = 0\,, \qquad \frac{\partial M_N}{\partial a_{2n}} = 0$$

دانشگاه خوارزمی

$$M_N = \int_a^b \left[f^*(x) - \sum_{k=1}^{N} (a_{1k} - i a_{2k}) u_k^*(x) \right] \left[f(x) - \sum_{m=1}^{N} (a_{1m} + i a_{2m}) u_m(x) \right] dx$$

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_{1n}} = -\int_a^b u_n^*(x) \left[f(x) - \sum_{m=1}^{N} (a_{1m} + i a_{2m}) u_m(x) \right] dx \\ - \int_a^b u_n(x) \left[f^*(x) - \sum_{k=1}^{N} (a_{1k} - i a_{2k}) u_k^*(x) \right] dx = 0$$

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_{2n}} = i \int_a^b u_n^*(x) \left[f(x) - \sum_{m=1}^{N} (a_{1m} + i a_{2m}) u_m(x) \right] dx \\ - i \int_a^b u_n(x) \left[f^*(x) - \sum_{k=1}^{N} (a_{1k} - i a_{2k}) u_k^*(x) \right] dx = 0$$

با توجه با تعامد مجموعه توابع $\{u_n(x)\}$ ، روابط فوق به شکل زیر در می‌آیند:

$$-\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx + \sum_{m=1}^{N}(a_{1m} + ia_{2m})\delta_{nm} - \int_a^b u_n(x)f^*(x)dx + \sum_{k=1}^{N}(a_{1k} - ia_{2k})\delta_{nk} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$-\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx + (a_{1n} + ia_{2n}) - \int_a^b u_n(x)f^*(x)dx + (a_{1n} - ia_{2n}) = 0$$

$$i\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx - i\sum_{m=1}^{N}(a_{1m} + ia_{2m})\delta_{nm} - i\int_a^b u_n(x)f^*(x)dx + i\sum_{k=1}^{N}(a_{1k} - ia_{2k})\delta_{nk} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$i\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx - i(a_{1n} + ia_{2n}) - i\int_a^b u_n(x)f^*(x)dx + i(a_{1n} - ia_{2n}) = 0$$

دانشگاه خوارزمی

در نتیجه

$$\boxed{\begin{aligned} 2a_{1n} &= \int_a^b u_n^*(x)f(x)dx + \left(\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx\right)^* = 2Re\left(\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx\right) \\ 2ia_{2n} &= \int_a^b u_n^*(x)f(x)dx - \left(\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx\right)^* = 2iIm\left(\int_a^b u_n^*(x)f(x)dx\right) \end{aligned}}$$

و در نهایت

$$\boxed{a_n = \int_a^b u_n^*(x)f(x)dx}$$

دانشگاه خوارزمی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

$$a_n = \int_a^b u_n^*(x) f(x) dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n^*(x') f(x') dx' \right) u_n(x)$$

$$f(x) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x') u_n(x) \right) f(x') dx'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x') u_n(x) = \delta(x - x')$$

Completeness or closure relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x')u_n(x) = \delta(x - x')$$ شرط کامل بودن

$$\int_a^b u_n{}^*(x)u_m(x)dx = \delta_{nm}$$ شرط تعامد

این مطالب به راحتی قابل تعمیم به دو بعد و سه بعد است:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_n^{\infty}\sum_m^{\infty} A_{nm}u_n(x)v_m(y) \\ A_{nm} &= \int_a^b dx \int_c^d dy u_n^*(x)v_m^*(y)f(x,y) \end{aligned}}$$

از توابع متعامد معروف، توابع سینوس و کسینوس هستند. بسط یک تابع برحسب این توابع را بسط فوریه یا سری فوریه می‌نامیم. در بازه‌ی $(-a/2, a/2)$ توابع خودبهنجار سینوس و کسینوس به شکل زیرند:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}; \quad \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{2n\pi}{a}x; \quad \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2n\pi}{a}x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2n\pi}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2n\pi}{a}x; \qquad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$$

$$A_n = \frac{2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)dx$$

$$n = 0,1,2,\ldots$$

$$B_n = \frac{2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}; \quad \sqrt{\frac{1}{a}}e^{\pm i\frac{2\pi}{a}x}; \quad \sqrt{\frac{1}{a}}e^{\pm i\frac{4\pi}{a}x}; \quad \sqrt{\frac{1}{a}}e^{\pm i\frac{6\pi}{a}x}; \cdots$$

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}e^{i\frac{2n\pi}{a}x}; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad x \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\frac{2n\pi}{a}x}; \qquad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x) e^{-i\frac{2n\pi}{a}x} dx$$

دانشگاه خوارزمی

اگر بازه‌ی (a,b) به بی‌نهایت میل کند، مجموعه توابع $u_n(x)$ به یک مجموعه‌ی پیوسته از توابع تبدیل می‌شوند.

یک مثال مهم انتگرال فوریه است

$$\left(-\frac{a}{2},+\frac{a}{2}\right) \rightarrow (-\infty,+\infty)$$

$$k = \frac{2\pi n}{a}; \qquad \Delta k = \frac{2\pi \Delta n}{a};$$

$$A_n \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{a}}A(k)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dn = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}dx = \delta(k-k')$$ شرط تعامد

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')k}dk = \delta(x-x')$$ شرط کامل بودن

شاد و مهربان باشید