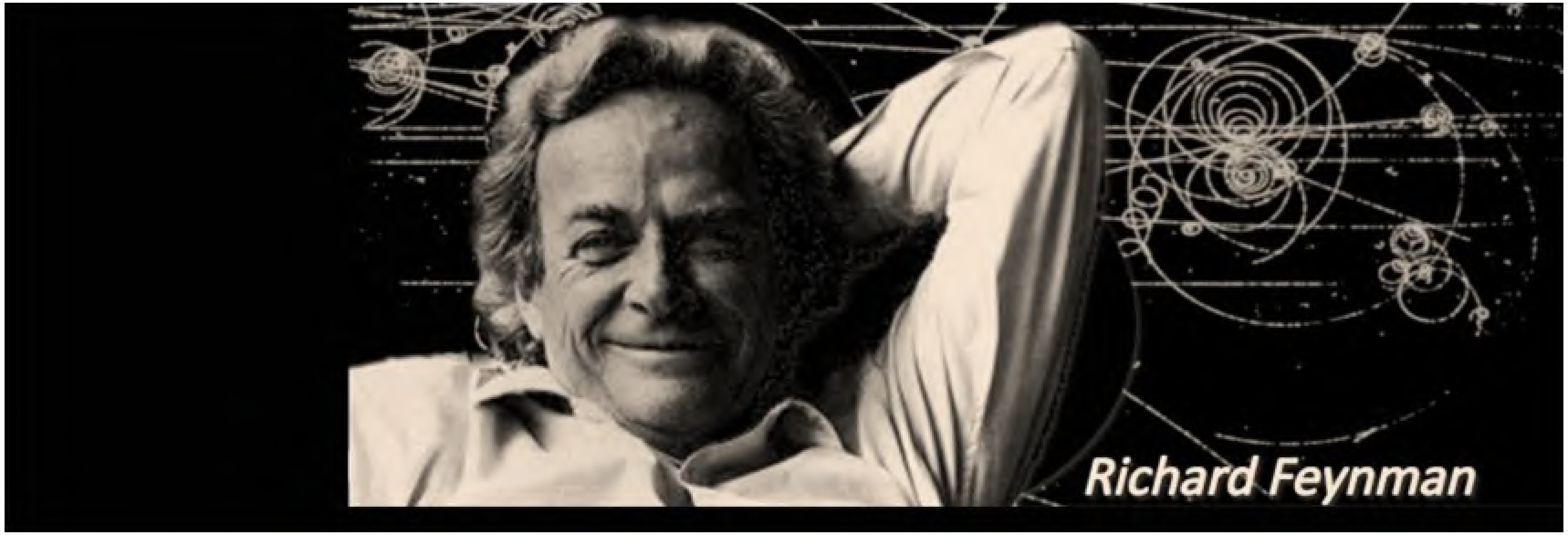
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس هفدهم

معادله‌ی لاپلاس در دستگاه مختصات کارتزین

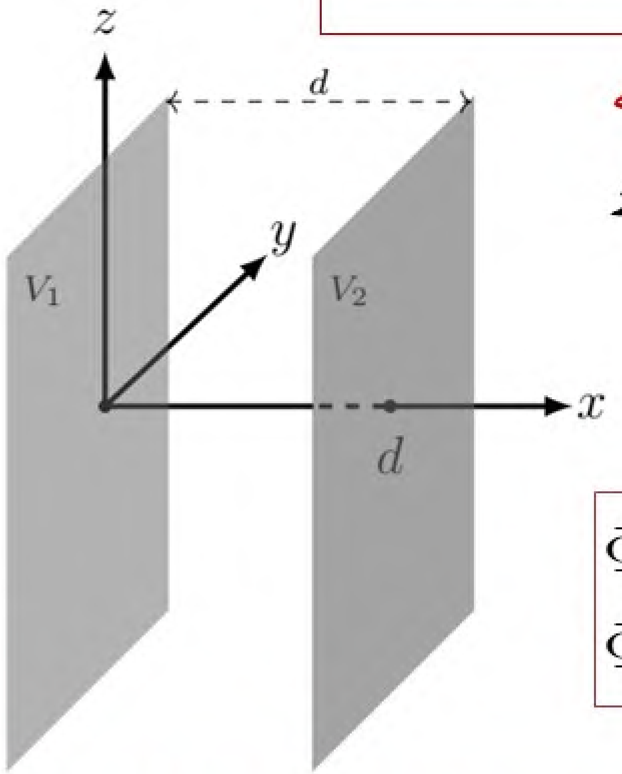
Laplace Equation in Rectangular Coordinates

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی فقط تابعی از یک مختصه مثلاً x باشد

$$\Phi = \Phi(x)$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow \Phi(x) = ax + b}$$



مثال: دو صفحه‌ی رسانای تخت موازی به فاصله‌ی d از هم در نظر بگیرید. **فاصله‌ی دو صفحه نسبت به ابعاد آن‌ها بسیار کوچک است.** یکی از صفحات در پتانسیل V_1 و صفحه‌ی دیگر در پتانسیل V_2 قرار دارد.

پتانسیل الکتریکی بین این صفحات را به دست آورید.

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(0) &= V_1 = 0 + b \\ \Phi(d) &= V_2 = ad + b\end{aligned}}$$

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1}$$

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی مستقل از مختصه‌ی z و فقط تابعی از مختصات x و y باشد

$$\Phi = \Phi(x, y)$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0}$$

پتانسیل را به شکل حاصل‌ضرب دو تابع به شکل زیر می‌نویسیم: $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$

$$\boxed{Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

ثابت جداسازی α ممکن است منفی، مثبت یا صفر باشد.

شرایط مرزی تعیین کننده‌ی ثابت جداسازی است

الف) اگر $\alpha = 0$

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0 \qquad X(x) = ax + b$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0 \qquad Y(y) = cy + d$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = Axy + Bx + Cy + D}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

ب) اگر $\alpha < 0$

$\alpha = -k^2$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

$$Y(y) = C\sinh ky + D\cosh ky$$

و یا

$$X(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx}$$

$$Y(y) = ce^{ky} + de^{-ky}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

ج) اگر $\alpha > 0$

$$\alpha = k^2$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - k^2X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k^2Y(y) = 0$$

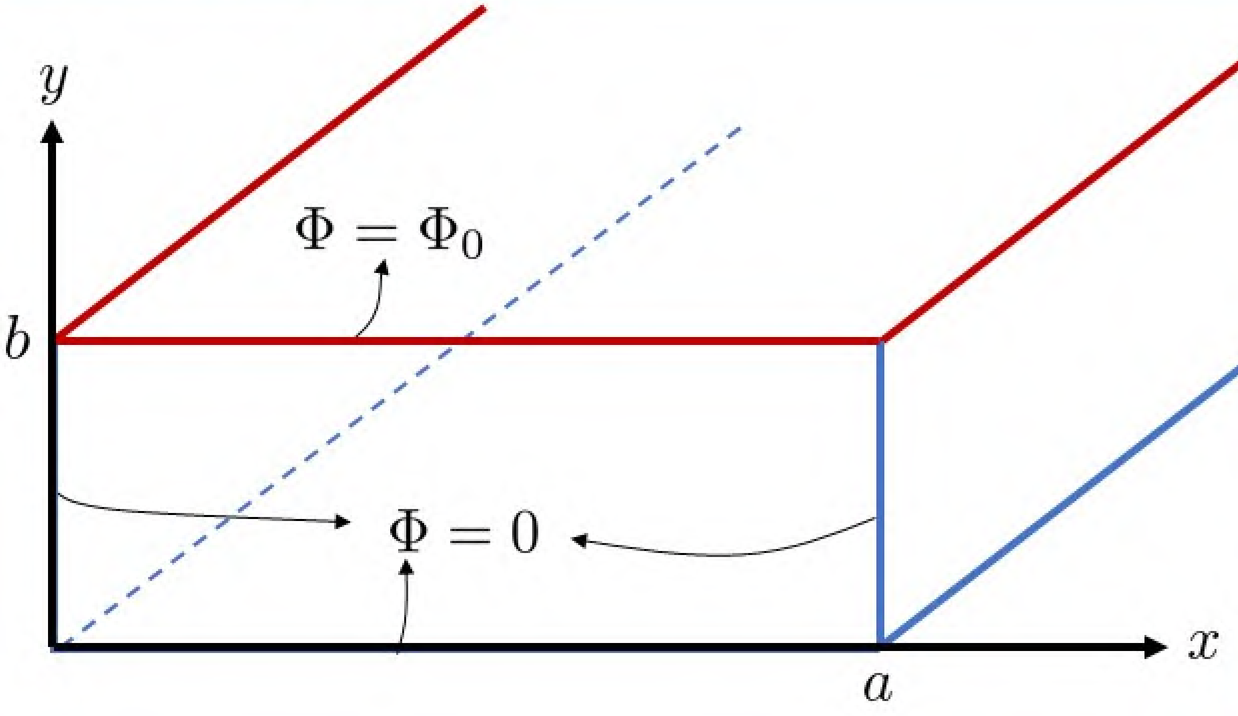
$$X(x) = A\sinh kx + B\cosh kx$$

$$Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

و یا

$$X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$$

$$Y(y) = ce^{iky} + de^{-iky}$$



کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. پتانسیل دیواره‌ها مطابق شکل روبرو است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.

حل:

ابتدا فرض می‌کنیم ثابت جدا سازی صفر باشد. نشان خواهیم داد که این فرض منجر به پاسخ درست نمی‌شود

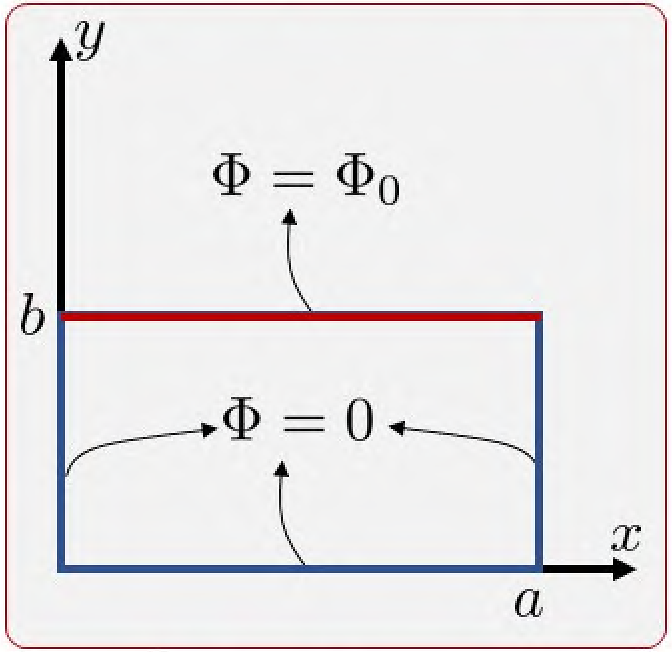
$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\Phi(x,y) = Axy + Bx + Cy + D}$$

$$\boxed{\Phi(0,y) = 0 \Rightarrow Cy + D = 0 \Rightarrow C = 0, D = 0}$$

$$\boxed{\Phi(x,0) = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B = 0}$$

$$\boxed{\Phi(a,y) = 0 \Rightarrow Aay = 0 \Rightarrow A = 0}$$

همه‌ی ضرائب صفر شدند. یعنی پتانسیل همه‌جا صفر به دست آمد!
بنابر این ثابت جدا سازی در این مسئله نمی‌توان برابر با صفر باشد.



$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

نشان دهید که ثابت جدا سازی در این مسئله نمی تواند مثبت باشد.

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

بنابر این در این مسئله ثابت جدا سازی منفی است $\alpha = -k^2$

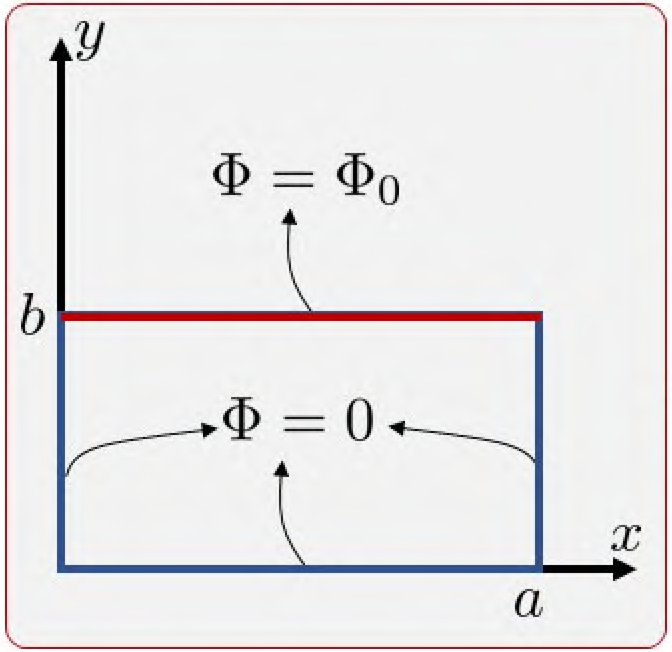
$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky + D\cosh ky$$

$$\Phi(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$\Phi(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$X(x) = A\sin kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky$$

$$\Phi(a,y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \Rightarrow A\sin ka = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}; n = 1,2,\cdots$$

$$X_n(x) = \sin k_n x; \quad Y_n(y) = \sinh k_n y$$



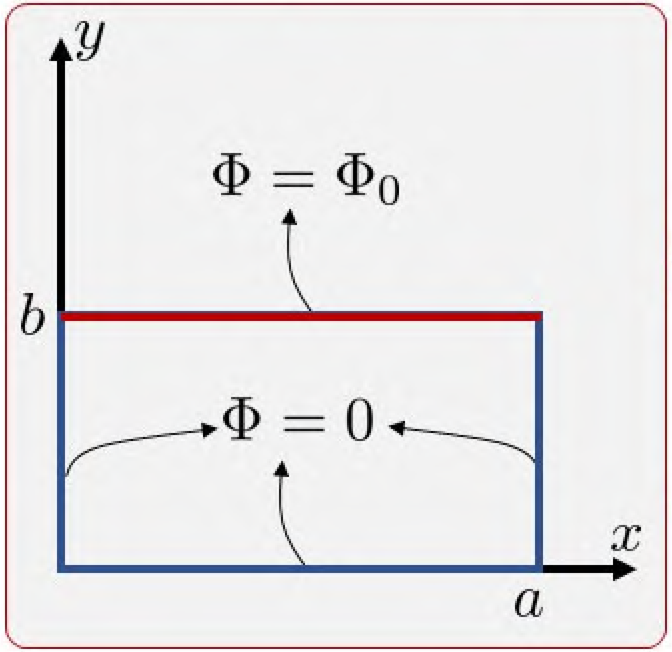
$$\Phi_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \Phi_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x) Y_n(y)$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y; \quad 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le b}$$

$$\boxed{\Phi(x,b) = \Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}b}$$

$$\boxed{\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\frac{n\pi}{a}b \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x dx}$$



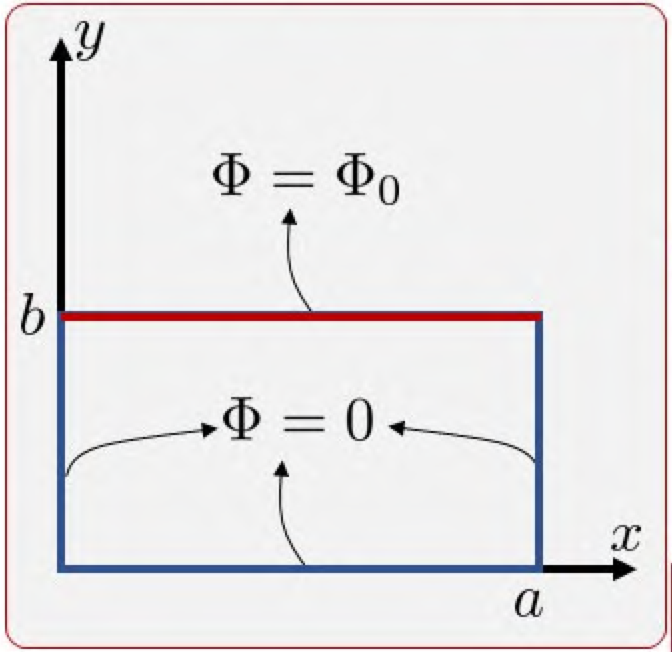
$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\frac{n\pi}{a}b \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{a}{2}\delta_{mn} \sinh\frac{n\pi}{a}b$$

$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = F_m \frac{a}{2}\sinh\frac{m\pi}{a}b$$

$$F_m = \frac{2\Phi_0}{a\sinh\frac{m\pi}{a}b}\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$



$$F_m = \frac{2\Phi_0}{a \sinh \frac{m\pi}{a} b} \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x dx$$

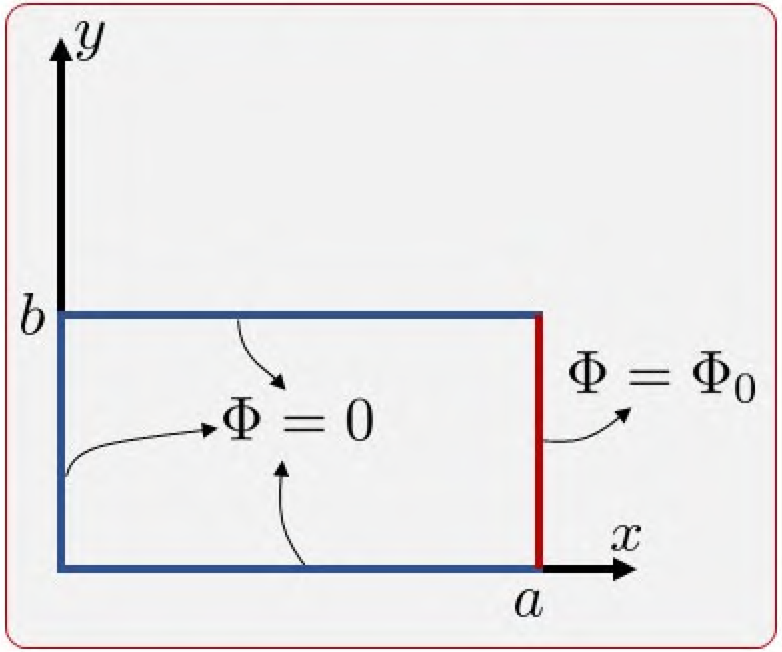
$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & m = 2k \\ \frac{2a}{m\pi} & m = 2k+1 \end{cases}$$

$$F_n = \frac{4\Phi_0}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}}$$

برای n های فرد

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{n=\mathrm{odd}}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \frac{\sinh \frac{n\pi}{a} y}{n \sinh \frac{n\pi b}{a}} ; \qquad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sin \frac{(2k+1)\pi}{a} x \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi}{a} y}{(2k+1) \sinh \frac{(2k+1)\pi b}{a}} ; \qquad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$



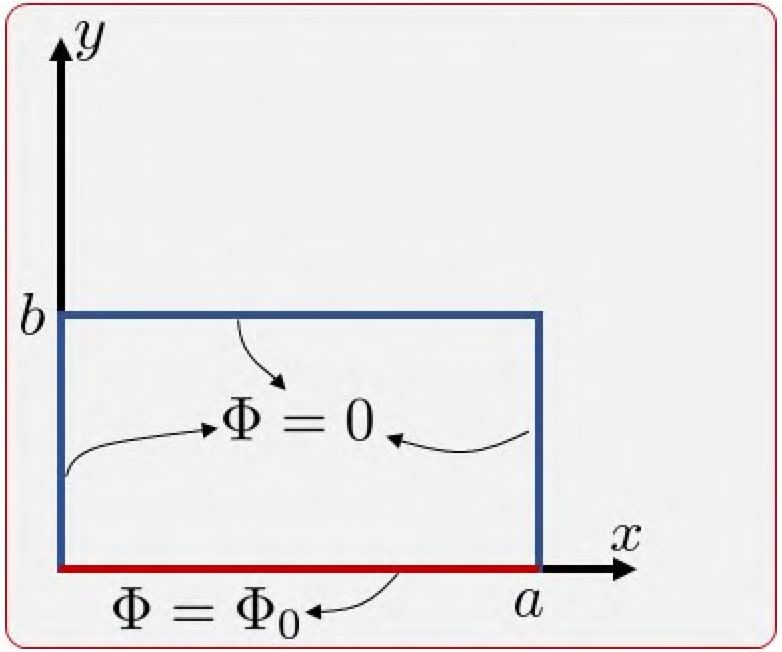
کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. پتانسیل دیواره‌ها مطابق شکل روبرو است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.

حل:

روش حل کاملاً شبیه مثال قبل است.

در این حالت نشان دهیدکه ثابت جداسازی مثبت است و پاسخ مسئله به شکل زیر است

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \sin\frac{(2k+1)\pi}{b} y \frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi}{b}x}{(2k+1)\sinh\frac{(2k+1)\pi a}{b}}; \qquad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$



کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. پتانسیل دیواره‌ها مطابق شکل روبرو است. پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.

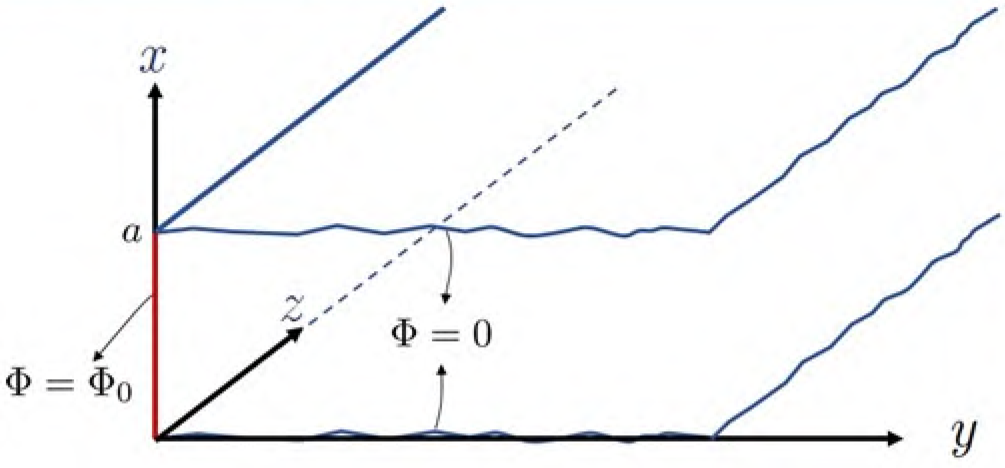
حل:

روش حل کاملاً شبیه مثال قبل است.

با نوشتن تابع Y به شکل زیر می توان به راحتی شرط مرزی را بر روی صفحه‌ی $y=0$ تضمین کرد

$$\boxed{Y(y) = \sinh k(b-y)}$$

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x\,\frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi}{a}(b-y)}{(2k+1)\sinh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\,; \qquad 0\le x\le a,\, 0\le y\le b}$$



$$\Phi(0,y) = 0$$
$$\Phi(a,y) = 0$$
$$\lim_{y\to\infty} \Phi(x,y) = 0$$
$$\Phi(x,0) = \Phi_0$$

دو نیم‌صفحه‌ی رسانا، موازی صفحه‌ی yz در $x=0$ و $x=a$ قرار دارند و در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند. انتهای محدود این نیم‌صفحه‌ها (در $y=0$) با یک نوار به پهنای a بسته شده است. پتانسیل این نوار Φ_0 است. پتانسیل الکتریکی را در ناحیه‌ی محصور بین این دو نیم‌صفحه و نوار پیدا کنید.

حل:

$$\nabla^2\Phi(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

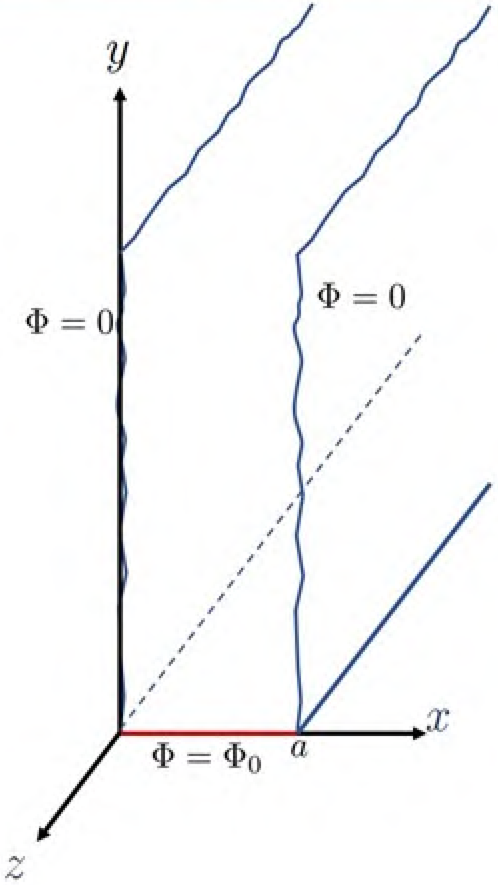
$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \alpha$$

در این حالت نشان دهیدکه ثابت جداسازی منفی است

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0; \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

با اِعمالِ سه شرطِ مرزیِ اول، دیده می‌شود که پتانسیل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}; \quad 0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$$



$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}; \quad 0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$$

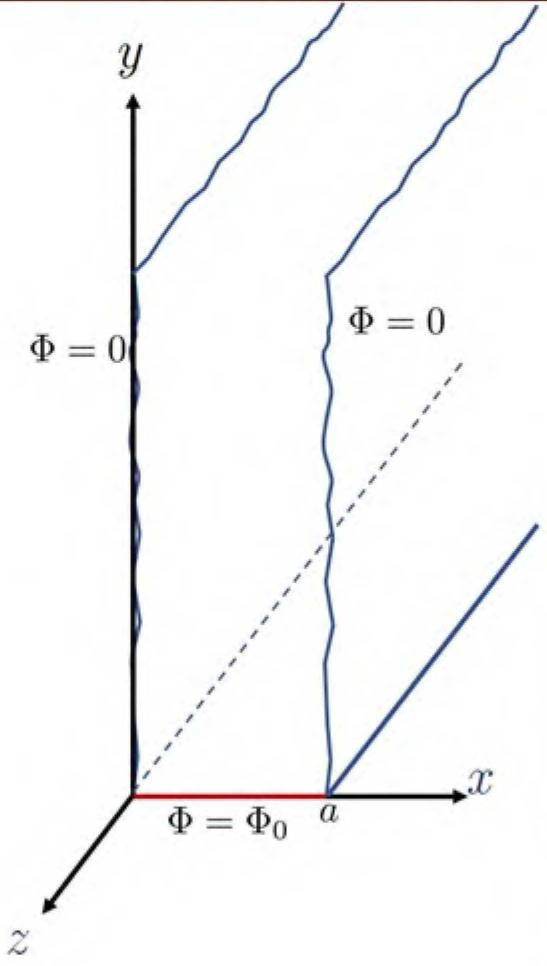
$$\Phi(x,0) = \Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\int_0^a \Phi_0 \sin\frac{m\pi}{a} x dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a} x \sin\frac{m\pi}{a} x dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

$$F_n = \frac{2\Phi_0}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a} x dx$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{2a}{n\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a} e^{\frac{-(2k+1)\pi y}{a}}; \quad 0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$$



$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}e^{\frac{-(2k+1)\pi y}{a}}; \quad 0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$$

پاسخ مسئله را به شکل یک سری نامتناهی نوشته‌ایم. می‌خواهیم ببینیم این سری به چه تابعی همگرا می‌شود. یا به بیان دیگر می‌خواهیم شکل بسته‌ی تابع پتانسیل را به دست آوریم.

تابع جدید زیر را تعریف می‌کنیم:

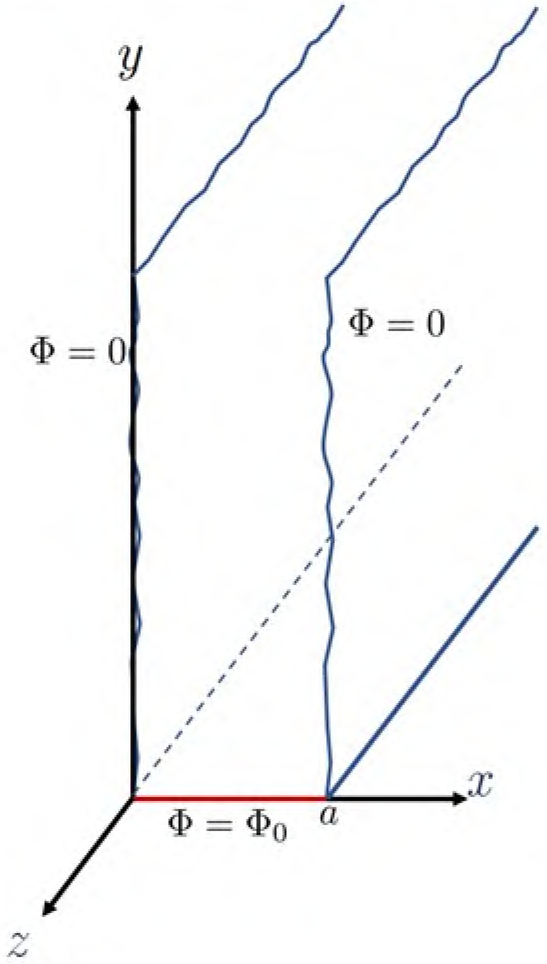
$$\Psi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{a}e^{\frac{-(2k+1)\pi y}{a}}; \quad 0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$$

$$\Psi + i\Phi = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{i\frac{(2k+1)\pi x}{a}}e^{\frac{-(2k+1)\pi y}{a}} = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{a}\right)(x+iy)}$$

$$u = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)}$$

$$\Psi + i\Phi = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}$$



$$\Psi + i\Phi = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

$$\Psi + i\Phi = \frac{2\Phi_0}{\pi}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

$$\Phi(x,y) = \operatorname{Im}\left(\frac{2\Phi_0}{\pi}\ln\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$W = \frac{1+u}{1-u} = \left|W\right|e^{i\Theta}$$

$$\ln W = \ln\frac{1+u}{1-u} = \ln\left|W\right| + i\Theta$$

$$\Phi(x,y) = \frac{2\Phi_0}{\pi}\Theta$$

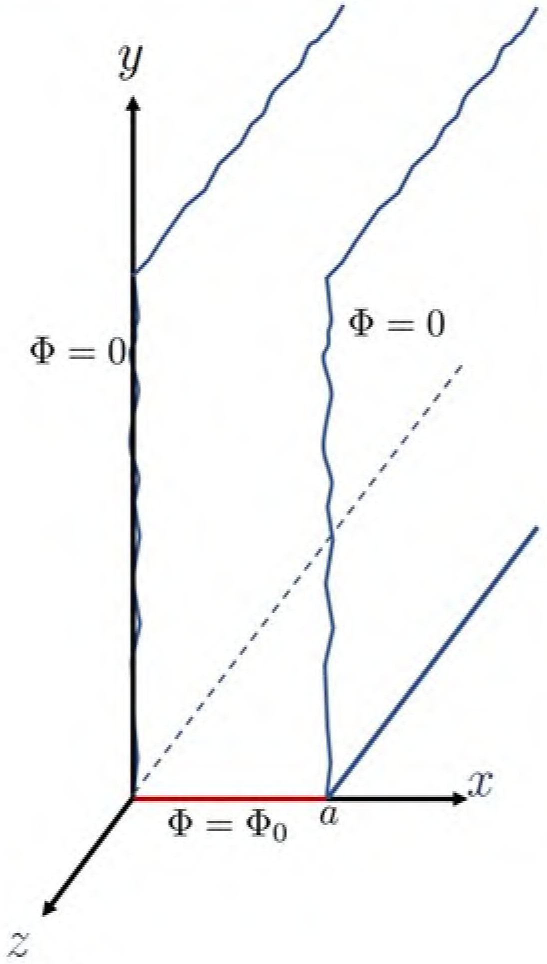
$$\Theta = \tan^{-1}\frac{\operatorname{Im}W}{\operatorname{Re}W}$$

$$W = \frac{1+u}{1-u}\times\frac{(1-u)^*}{(1-u)^*} = \frac{1-|\,u\,|^2 + u - u^*}{\left|1-u\right|^2} = \frac{1-|\,u\,|^2 + 2i\operatorname{Im}u}{\left|1-u\right|^2}$$

$$W = \frac{1-|\,u\,|^2}{\left|1-u\right|^2} + i\frac{2\operatorname{Im}u}{\left|1-u\right|^2}$$

$$\Theta = \tan^{-1}\frac{2\operatorname{Im}u}{1-|\,u\,|^2}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\Theta = \tan^{-1}\frac{2\,\mathrm{Im}\,u}{1-|u|^2}$$

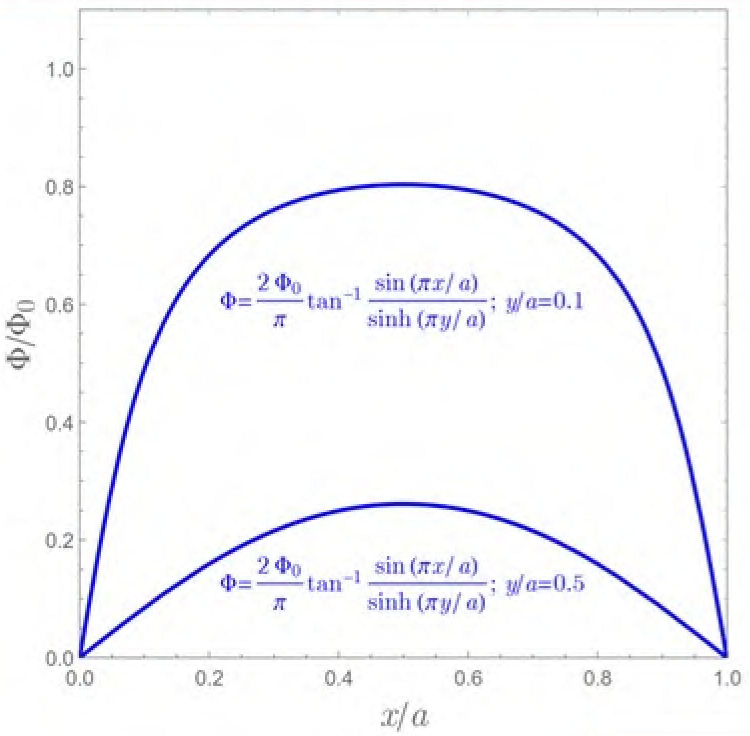
$$u = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)} = e^{i\frac{\pi}{a}x}e^{-\frac{\pi}{a}y} = e^{-\frac{\pi}{a}y}\left(\cos\frac{\pi}{a}x + i\sin\frac{\pi}{a}x\right)$$

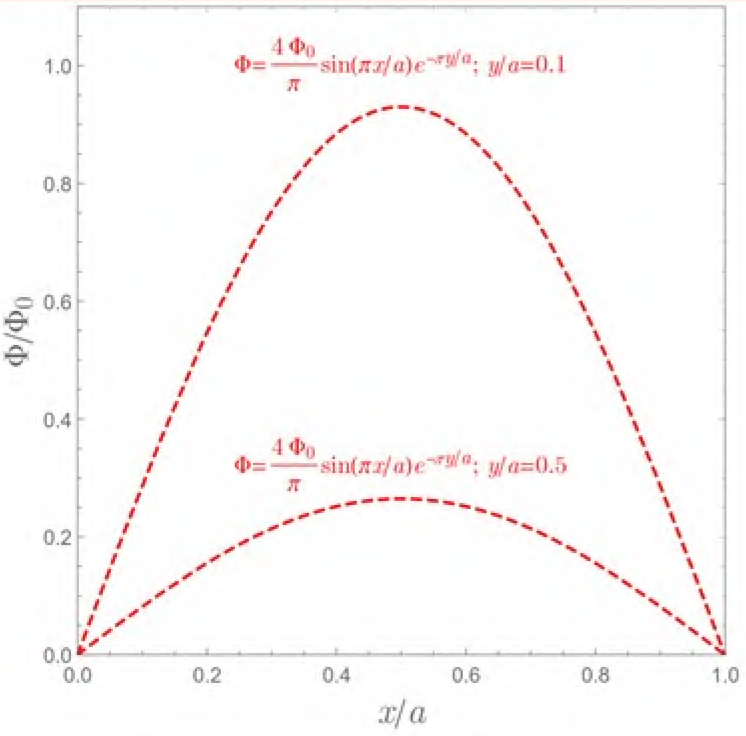
$$\Theta = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\pi x}{a}e^{-\frac{\pi y}{a}}}{1-e^{-2\frac{\pi y}{a}}}$$

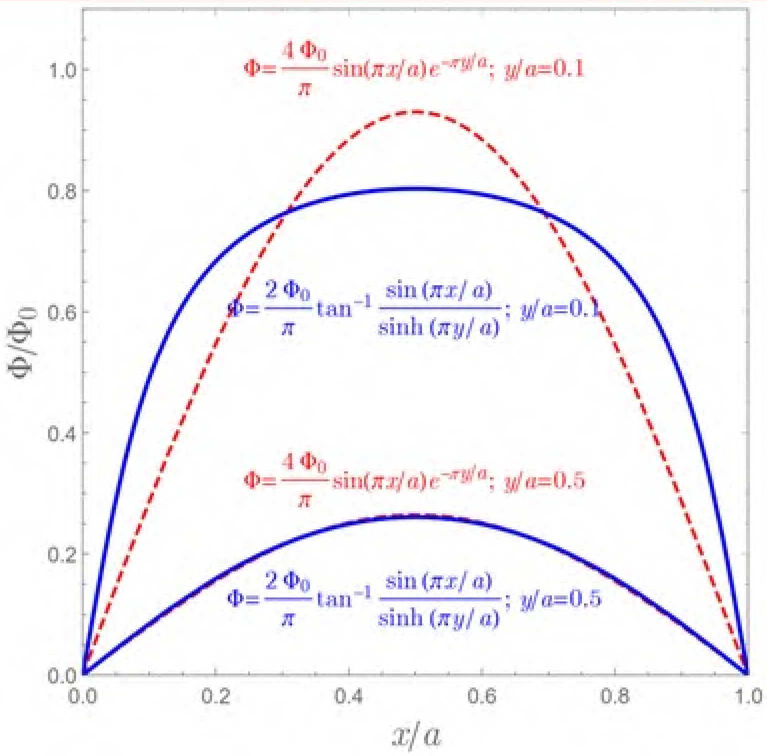
$$\Theta = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\pi x}{a}}{e^{\frac{\pi y}{a}}-e^{-\frac{\pi y}{a}}} = \tan^{-1}\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{2\Phi_0}{\pi}\Theta$$

$$\Phi(x,y) = \frac{2\Phi_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}\right)$$

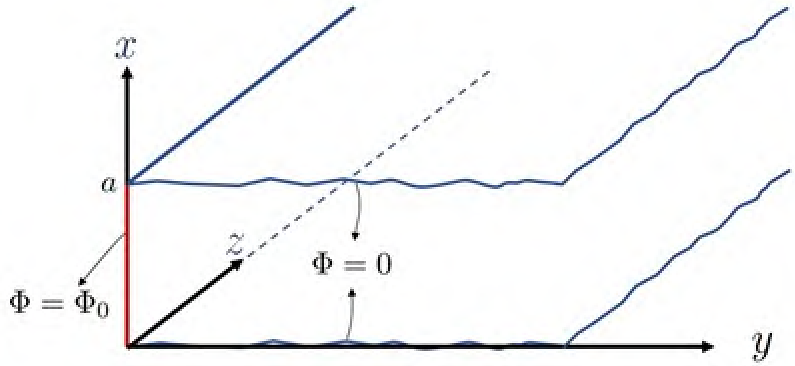






$$\Phi(x,y)=\frac{2\Phi_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{a}}{\sinh\dfrac{\pi y}{a}}$$

$$\Phi(x,y)=\frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}\,e^{\frac{-(2k+1)\pi y}{a}}$$



$$\Phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = +k_z^2$$

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$X = e^{\pm ik_x x}$$
$$Y = e^{\pm ik_y y}$$
$$Z = e^{\pm k_z z}$$

$\longrightarrow$ این جواب‌ها برای وقتی است که ثابت‌های جدا سازی مخالف صفر باشند

در صورتی که ثابت های جدا سازی برابر با صفر باشند، آن گاه:

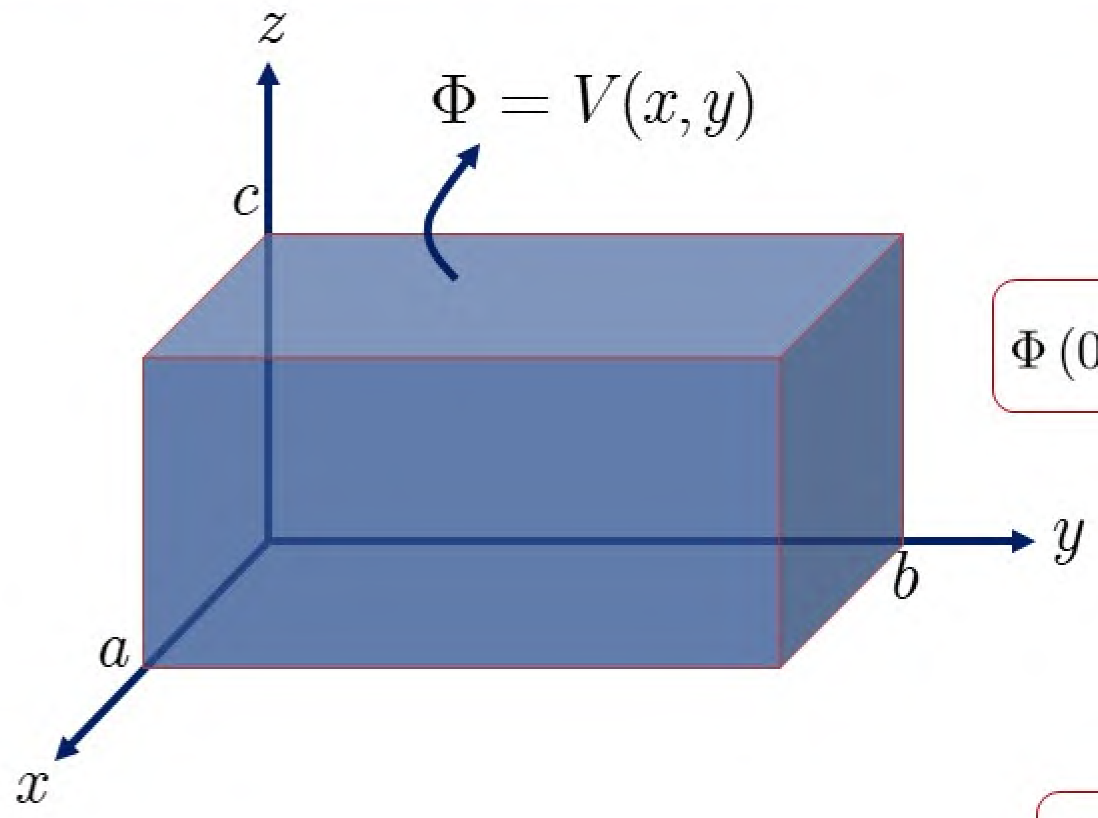
$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = 0$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

$$X = a_1 x + b_1$$
$$Y = a_2 y + b_2$$
$$Z = a_3 z + b_3$$

$$\Phi(x,y,z) = A_1xyz + A_2xy + A_3xz + A_4yz + A_5x + A_6y + A_7z + A_8$$

پتانسیل روی همه‌ی سطوح صفر است به جز وجه نشان داده شده.

پتانسیل الکتریکی را درون مکعب پیدا کنید

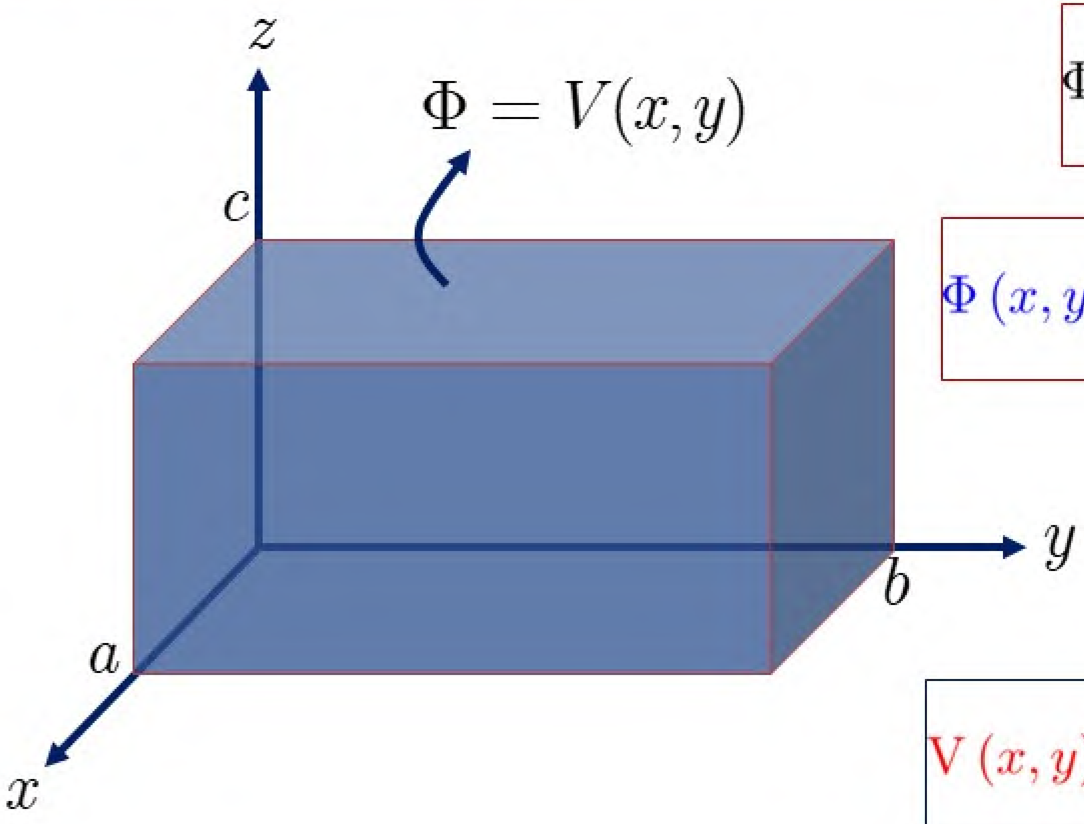


$$\Phi\left(0,y,z\right) = \Phi\left(x,0,z\right) = \Phi\left(x,y,0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$X = \sin k_x x$$
$$Y = \sin k_y y$$
$$Z = \sinh k_z z$$

$$\Phi\left(a,y,z\right) = \Phi\left(x,b,z\right) = 0 \Rightarrow$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$
$$k_y = \frac{m\pi}{b}$$
$$k_z = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$



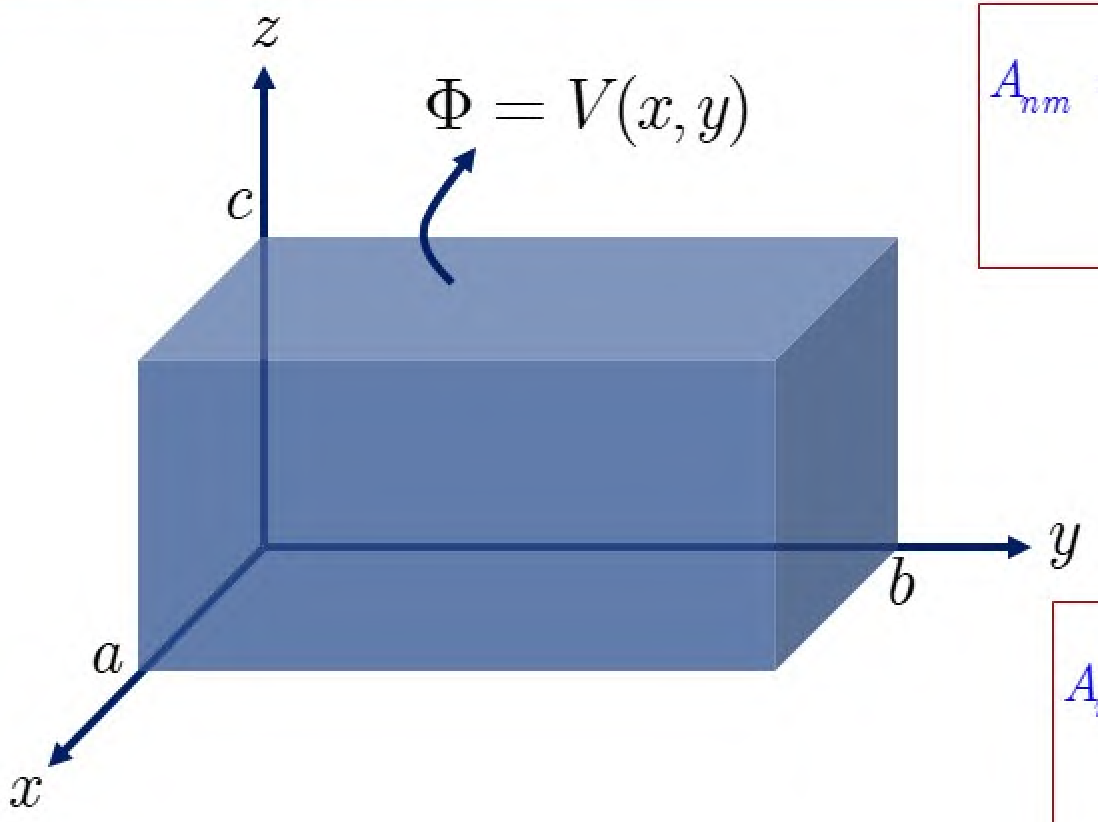
$$\Phi_{nm}\left(x,y,z\right)=\sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, z$$

$$\Phi\left(x,y,z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, z$$

$$\boxed{\Phi(x,y,c)=V(x,y)}$$

$$\mathrm{V}\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{n\pi\, x}{a}\sin\frac{m\pi\, y}{b}\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right)\pi\, c$$

$$A_{nm}=\frac{4}{ab\sinh\left(\pi c\sqrt{\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}}\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy V(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$



$$A_{nm} = \frac{4}{ab\sinh\left(\pi c\sqrt{\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}}\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy V(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

اگر $\boxed{V(x,y) = V_0}$

$$A_{nm} = \frac{4V_0}{ab\sinh\left(\pi c\sqrt{\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}}\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

$$\int_0^a dx\int_0^b dy \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} = \begin{cases} 0 & n = 2k, m = 2l \\ \frac{4ab}{nm\pi^2} & n = 2k+1, m = 2l+1 \end{cases}$$

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{16V_0}{(2k+1)(2l+1)\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}\sin\frac{(2l+1)\pi y}{b}\frac{\sinh\left(\pi z\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{a^2}+\frac{(2l+1)^2}{b^2}}\right)}{\sinh\left(\pi c\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{a^2}+\frac{(2l+1)^2}{b^2}}\right)}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید