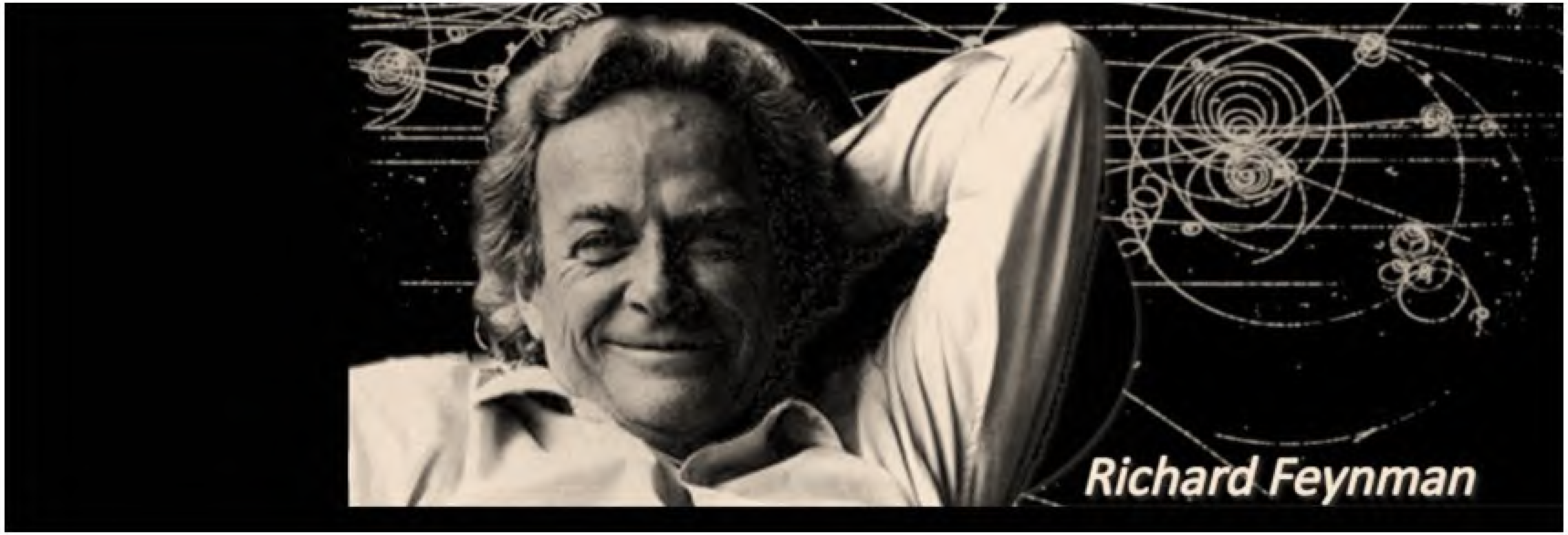
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

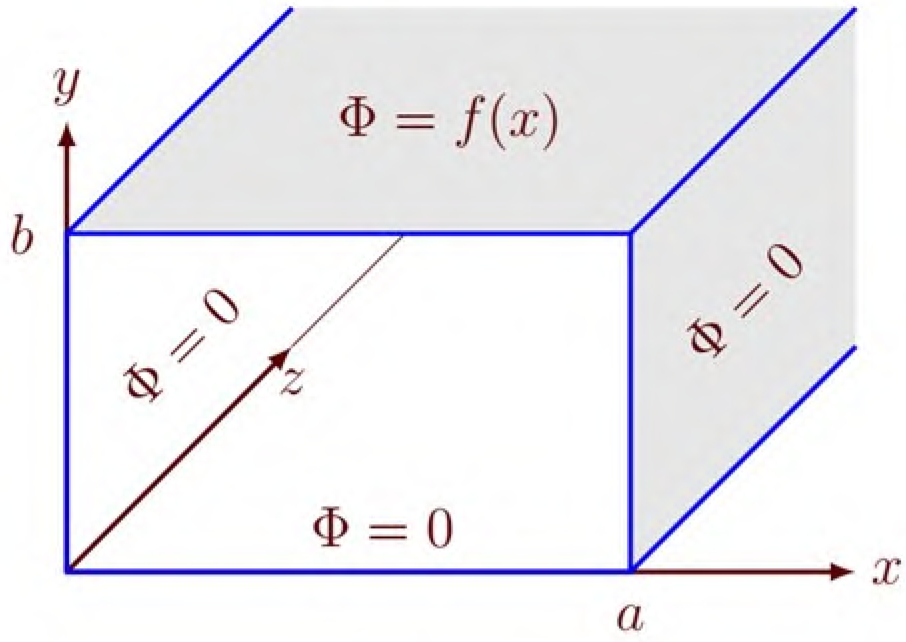
فاینمن

درس هیجدهم

حل چند مسئله

Solved Problems

دانشگاه خوارزمی



کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید.

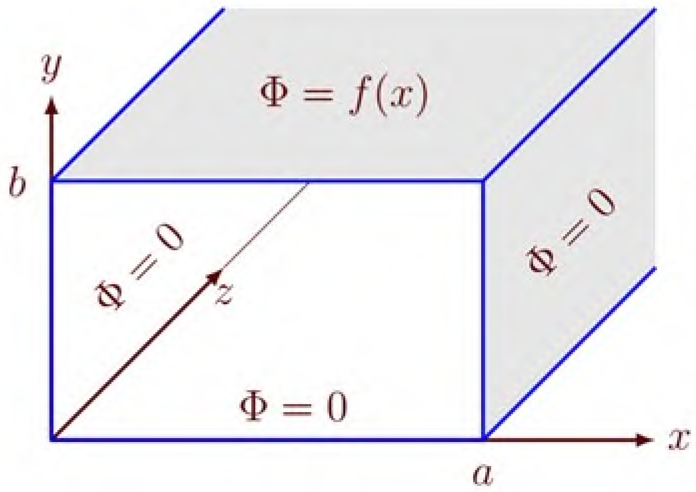
دیواره‌ها با معادلاتِ $x = 0$، $x = a$، $y = 0$ و $y = b$ مشخص می‌شوند

دیواره‌های $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ در پتانسیلِ صفر قرار دارند.

دیواره‌ی $y = b$ نسبت به دیواره‌های دیگر عایق بندی شده است

و در پتانسیلی که با تابع $f(x)$ تعیین می‌شود، نگه داشته شده است.

پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.



قبل از هر چیز توجه می‌کنیم که پتانسیل درون کانال مستقل از مختصه‌ی z است.

پس با یک مسئله‌ی دو بعدی سر و کار داریم. مسئله را به روش جداسازی متغیرها حل می‌کنیم

ابتدا فرض می‌کنیم ثابت جدا سازی صفر باشد.

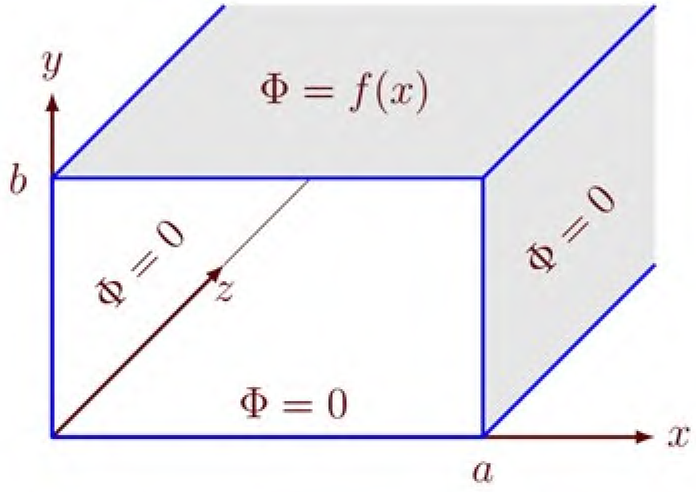
نشان خواهیم داد که این فرض منجر به پاسخ درست نمی‌شود.

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi(0,y)=0 \\ &\Phi(x,0)=0 \\ &\Phi(a,y)=0 \\ &\Phi(x,b)=f(x) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\alpha = 0 \Longrightarrow \Phi(x,y) = Axy + Bx + Cy + D}$$

برای تعیین ضرایب، شرایط مرزی را بر روی هر یک از دیواره‌ها بررسی می‌کنیم

دانشگاه خوارزمی



$$\Phi(0,y) = 0 \Rightarrow Cy + D = 0 \Rightarrow C = 0, D = 0$$

$$\Phi(x,0) = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi(a,y) = 0 \Rightarrow Aay = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Phi(0,y) = 0$$

$$\Phi(x,0) = 0$$

$$\Phi(a,y) = 0$$

$$\Phi(x,b) = f(x)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، همه‌ی ضرایب صفر به دست آمدند.

یعنی پتانسیل همه جا درون کانال صفر به دست می‌آید.

واضح است که این پاسخی برای این مسئله نیست.

بنابر این در این مسئله ثابت جداسازی نمی‌تواند صفر باشد.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که ثابت جداسازی در این مسئله مثبت هم نمی‌تواند باشد.

بنابر این با فرض $\alpha = -k^2$ مسئله را حل می کنیم.

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky + D\cosh ky$$

$$\Phi(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$\Phi(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$X(x) = A\sin kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky$$

از سوی دیگر شرط مرزی بر روی دیواره‌ی $x = a$ ایجاب می کند که

$$\Phi(a,y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \Rightarrow A\sin ka = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}; \qquad n = 1, 2, \cdots$$

یعنی به ازای nهای مختلف، پاسخ‌های مختلف داریم.

$$\boxed{\Phi_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y}$$

بنا به قضیه‌ی برهم‌نهی، ترکیب این پاسخ‌ها هم پاسخ معادله‌ی لاپلاس است

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y}$$

در واقع ترکیبی را پیدا می‌کنیم که شرایط مرزی برای این مسئله را برقرار کند.

رابطه‌ی اخیر سه تا از شرط‌های مرزی را برقرار می‌کند.

F_nها را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که شرط چهارم نیز برقرار شود

$$\Phi(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}b$$

طرفین رابطه را در $\sin\frac{m\pi}{a}x$ ضرب و از 0 تا a روی x انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\frac{n\pi}{a}b \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

دانشگاه خوارزمی

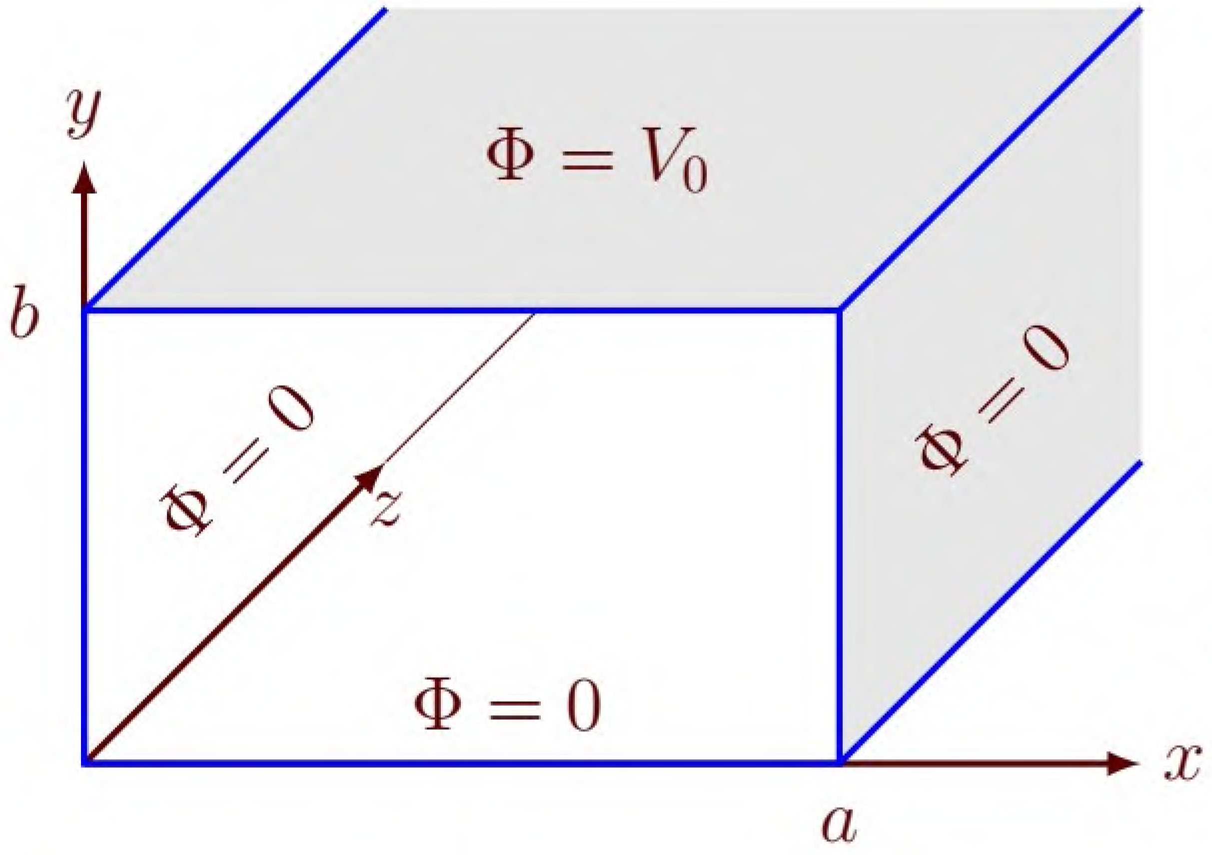
$$\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x dx=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\sinh\frac{n\pi}{a}b\frac{a}{2}\delta_{mn}=\frac{a}{2}F_m\sinh\frac{m\pi}{a}b$$

$$F_n=\frac{2}{a}\frac{\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x dx}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}$$

$$\Phi(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi}{a}x'dx'$$

دانشگاه خوارزمی

مثال قبل را برای حالتی که $f(x) = V_0$ حل کنید



$$\Phi(0, y) = 0$$

$$\Phi(x, 0) = 0$$

$$\Phi(a, y) = 0$$

$$\Phi(x, b) = V_0$$

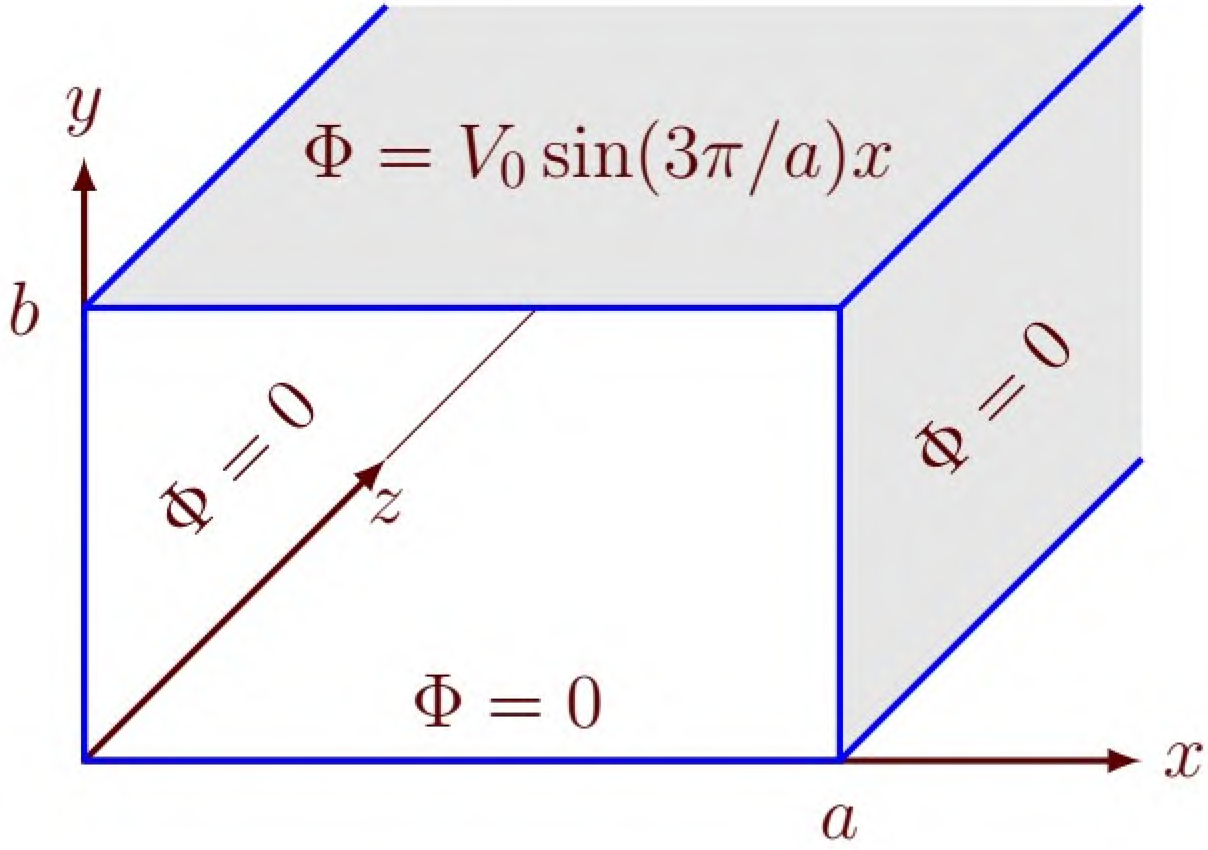
طبق نتیجه‌ی مثال قبل پتانسیل الکتریکی درون کانال برابر است با

$$\Phi(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}xV_0\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x'dx'$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}xdx = \frac{a}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{a}\right]_0^a = \frac{a}{n\pi}\left[-(-1)^n+1\right] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \dfrac{2a}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x \\ &= \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\frac{\sinh[(2k+1)\pi/a]y}{\sinh[(2k+1)\pi/a]b}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x\end{aligned}$$

مسئله‌ی قبل را برای وقتی که $f(x) = V_0 \sin(3\pi/a)x$ حل کنید.



$$\Phi(0, y) = 0$$

$$\Phi(x, 0) = 0$$

$$\Phi(a, y) = 0$$

$$\Phi(x, b) = V_0 \sin \frac{3\pi}{a} x$$

طبق نتیجه‌ی مثال قبل پتانسیل الکتریکی درون کانال برابر است با

$$\boxed{\Phi(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi}{a}x'dx'}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y)&=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x\int_0^a V_0\sin\frac{3\pi}{a}x'\sin\frac{n\pi}{a}x'dx'\\
&=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi/a)y}{\sinh(n\pi/a)b}\sin\frac{n\pi}{a}x\left(V_0\frac{a}{2}\delta_{3,n}\right)\\
&=V_0\frac{\sinh(3\pi/a)y}{\sinh(3\pi/a)b}\sin\frac{3\pi}{a}x
\end{aligned}$$

کانالی با مقطع مستطیل و طول نامتناهی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید.

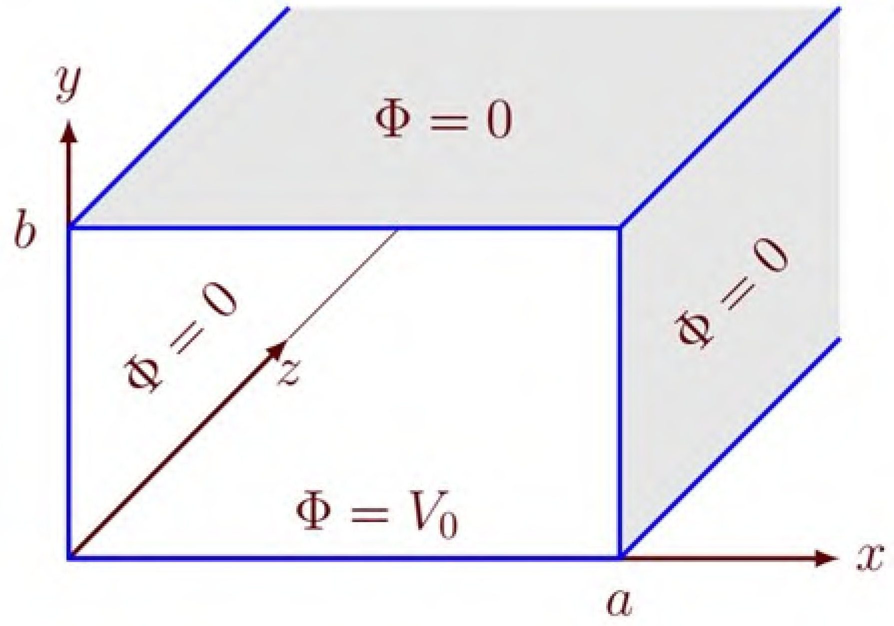
دیواره‌ها با معادلاتِ $x=0$، $x=a$، $y=0$ و $y=b$ مشخص می‌شوند.

دیواره‌های $x=a, \quad y=b, \quad x=0$ در پتانسیلِ صفر قرار دارند.

دیواره‌ی $y=0$ نسبت به دیواره‌های دیگر عایق بندی شده است

و در پتانسیل V_0 نگه داشته شده است.

پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.



$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(0,y) &= 0 \\ \Phi(x,0) &= V_0 \\ \Phi(a,y) &= 0 \\ \Phi(x,b) &= 0 \end{aligned}}$$

اگر تابع $Y(y)$ را به شکل زیر انتخاب کنیم

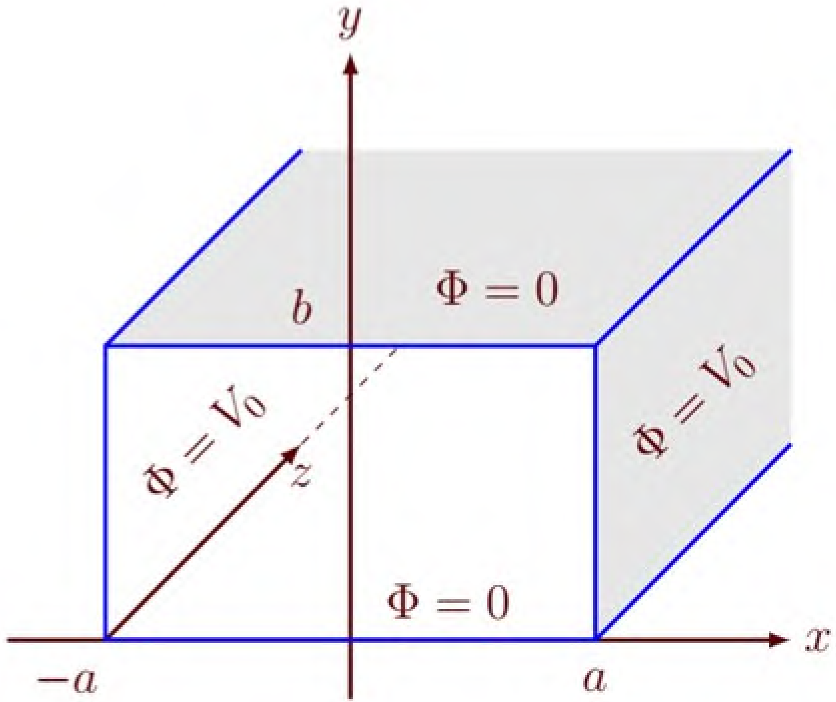
$$Y(y) = \sinh k(b-y)$$

در این صورت شرط مرزی بر روی دیواره ی $y=b$ به سادگی اعمال می‌شود.

در نهایت به روشی کاملاً مشابه با مثال قبل پتانسیل درون کانال به شکل زیر به دست می‌آید

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi(b-y)}{a}}{\sinh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x}$$

یک کانال نامتناهی با مقطع مستطیل و دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید.

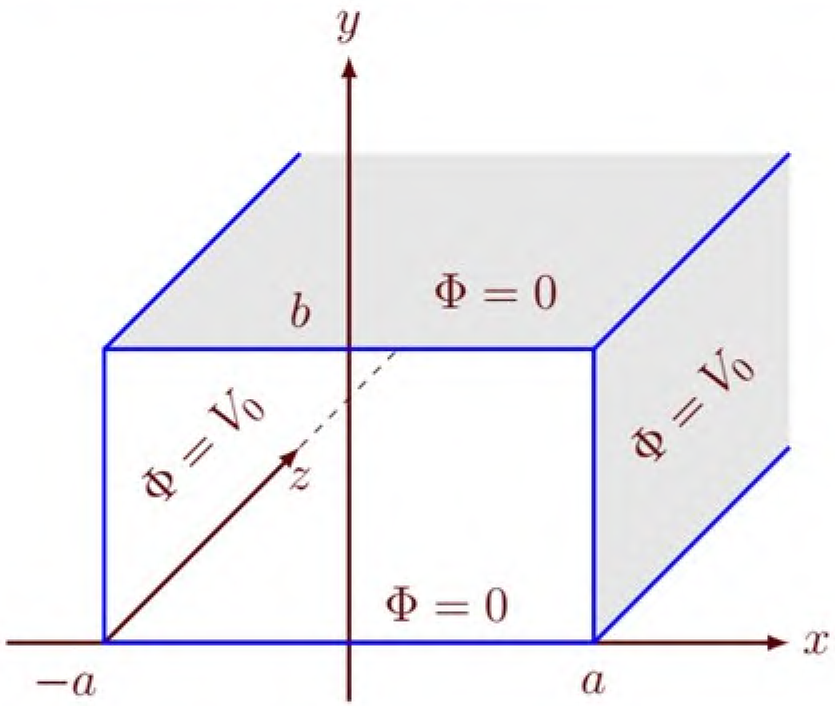


دیواره‌های کانال در $y = 0$ و $y = b$ و $x = +a$ و $x = -a$ قرار دارند.

پتانسیل الکتریکی بر روی دیواره‌های این کانال به شرح زیر است

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi(x,0) = 0 \\ &\Phi(x,b) = 0 \\ &\Phi(+a,0) = V_0 \\ &\Phi(-a,y) = V_0 \end{aligned}}$$

پتانسیل الکتریکی را درون این کانال به دست آورید.



در فضای درون این کانال معادله‌ی لاپلاس برای پتانسیل الکتریکی برقرار است

با توجه به تقارن مسئله می‌توان دریافت که پتانسیل مستقل از مختصه‌ی z است

$$\nabla^2\Phi(x,y) = \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها مسئله را حل می‌کنیم

$$\boxed{\Phi(x,y) = X(x)Y(y) \Longrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2}$$

ثابت جداسازی را در این‌جا $+k^2$ گرفته‌ایم زیرا تنها در این صورت است

که می‌توان تابعی یافت که شرایط مرزی را برقرار کند

بدین ترتیب دو معادله‌ی دیفرانسیل معمولی داریم

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - k^2X(x) = 0$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k^2Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sinh kx + B\cosh kx$$
$$Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

شرایط مرزی را بر روی دیواره‌های $y=0$ و $y=b$ اِعمال می‌کنیم:

$$\Phi(x,0) = 0 \longrightarrow X(x)Y(0) = 0 \longrightarrow Y(0) = 0 \Longrightarrow D = 0$$

$$\Phi(x,b) = 0 \longrightarrow X(x)Y(b) = 0 \longrightarrow Y(b) = 0$$

$$\Longrightarrow \sin kb = 0 \Longrightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{b}$$

دانشگاه خوارزمی

n می‌تواند مقادیر $1, 2, 3, \cdots$ داشته باشد $k = k_n = \dfrac{n\pi}{b}$

یعنی به ازای هر n یک پاسخ داریم:

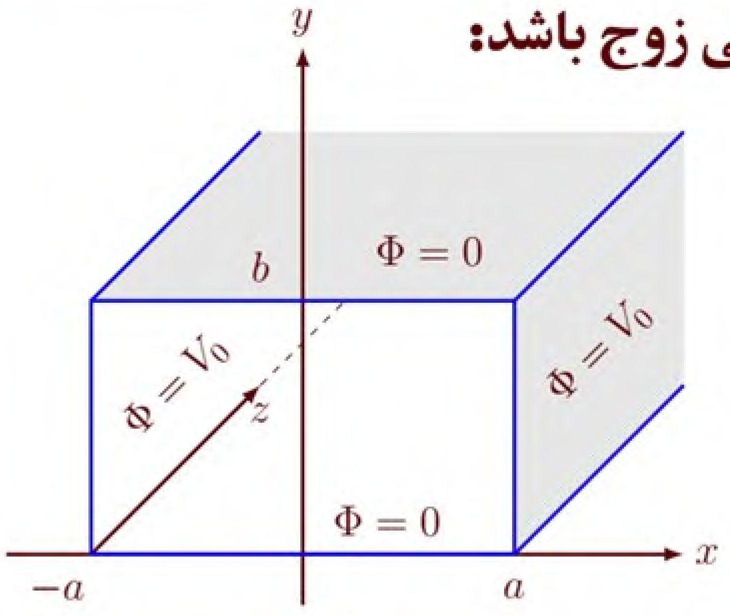
$$\boxed{\Phi_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \left[A_n \sinh\frac{n\pi}{b}x + B_n \cosh\frac{n\pi}{b}x\right]\sin\frac{n\pi}{b}y}$$

ترکیبی از همه‌ی این پاسخ‌ها را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم

که شرایط مرزی برای این مسئله برقرار باشد

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sinh\frac{n\pi}{b}x + B_n \cosh\frac{n\pi}{b}x\right]\sin\frac{n\pi}{b}y}$$

یعنی با توجه به شرایط مرزی ضرائب A_n و B_n را پیدا می‌کنیم



اما شرط مرزی در نقاط $\pm a$ نشان می‌دهد که تابع پتانسیل نسبت به x باید تابعی زوج باشد:

$$\Phi(x,y) = \Phi(-x,y)$$

در نتیجه ضریب جمله‌ی $\sinh k_n x$ یعنی A_n باید صفر باشد

این را می‌توانیم مستقیماً هم اثبات کنیم

شرط مرزی در نقاط $\pm a$

$$\boxed{\Phi(-a,y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-A_n \sinh\frac{n\pi}{b}a + B_n \cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\sin\frac{n\pi}{b}y}$$

$$\boxed{\Phi(a,y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sinh\frac{n\pi}{b}a + B_n \cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\sin\frac{n\pi}{b}y}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(-a,y)=V_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-A_n\sinh\frac{n\pi}{b}a+B_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$\Phi(a,y)=V_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sinh\frac{n\pi}{b}a+B_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\sin\frac{n\pi}{b}y$$

اگر این دو رابطه را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$2V_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[2B_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\sin\frac{n\pi}{b}y$$

و اگر تفاضل دو رابطه را حساب کنیم، خواهیم داشت

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[2A_n\sinh\frac{n\pi}{b}a\right]\sin\frac{n\pi}{b}y$$

از آن‌جا که این رابطه برای همه‌ی مقادیر y برابر با صفر است، هر یک از ضرایب A_n باید برابر با صفر باشد.

برای پیدا کردن B_nها، رابطه‌ی قبل را در $\sin\dfrac{m\pi y}{b}$ضرب می‌کنیم و روی y از 0 تا b انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^b V_0 \sin\frac{m\pi}{b}y dy = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\int_0^b \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\frac{m\pi}{b}y dy$$

$$\int_0^b V_0 \sin\frac{m\pi}{b}y dy = V_0\frac{b}{m\pi}\left[-(-1)^m - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ \dfrac{2V_0 b}{m\pi} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\frac{m\pi}{b}y dy = \frac{b}{2}\delta_{mn}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right]\frac{b}{2}\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ \dfrac{2V_0 b}{m\pi} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\left[B_m \cosh \frac{m\pi}{b} a\right] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ \dfrac{4V_0}{m\pi} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$$B_{2k} = 0$$

$$B_{2k+1} = \frac{4V_0}{(2k+1)\pi} \frac{1}{\cosh \dfrac{(2k+1)\pi a}{b}}$$

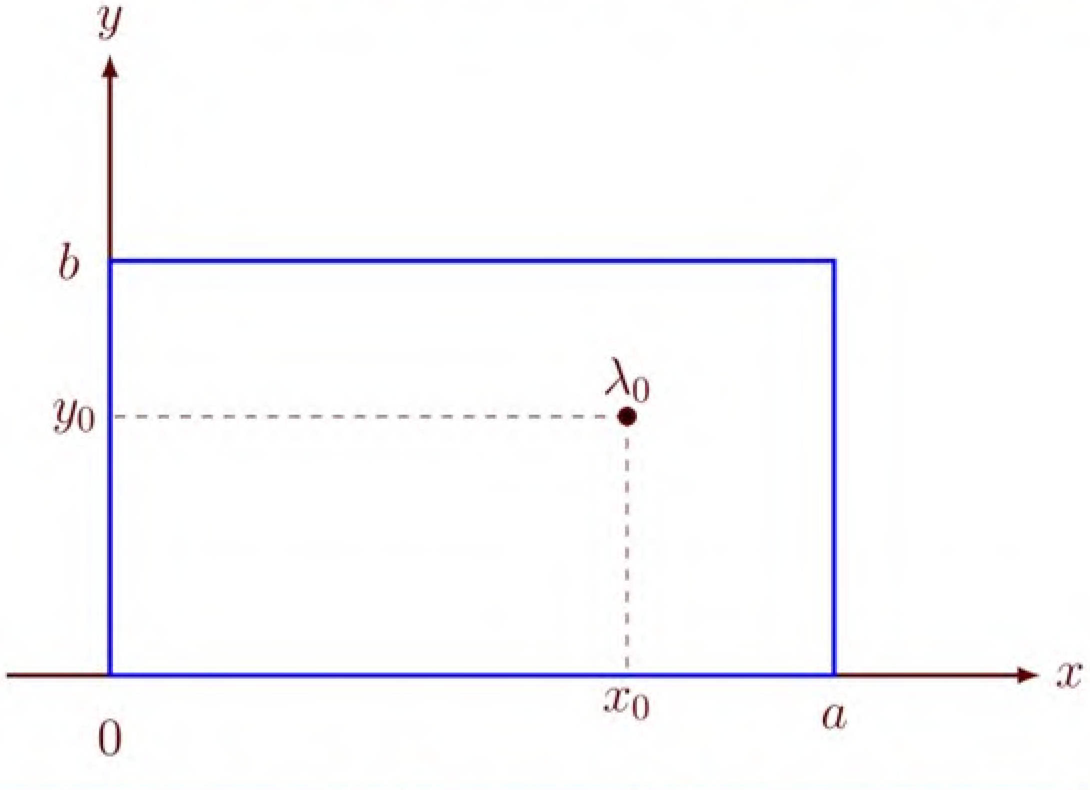
$$\Phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{\cosh \dfrac{(2k+1)\pi}{b} x}{\cosh \dfrac{(2k+1)\pi}{b} a} \sin \frac{(2k+1)\pi}{a} y$$

کانالی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. همه‌ی دیواره‌ها در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند.

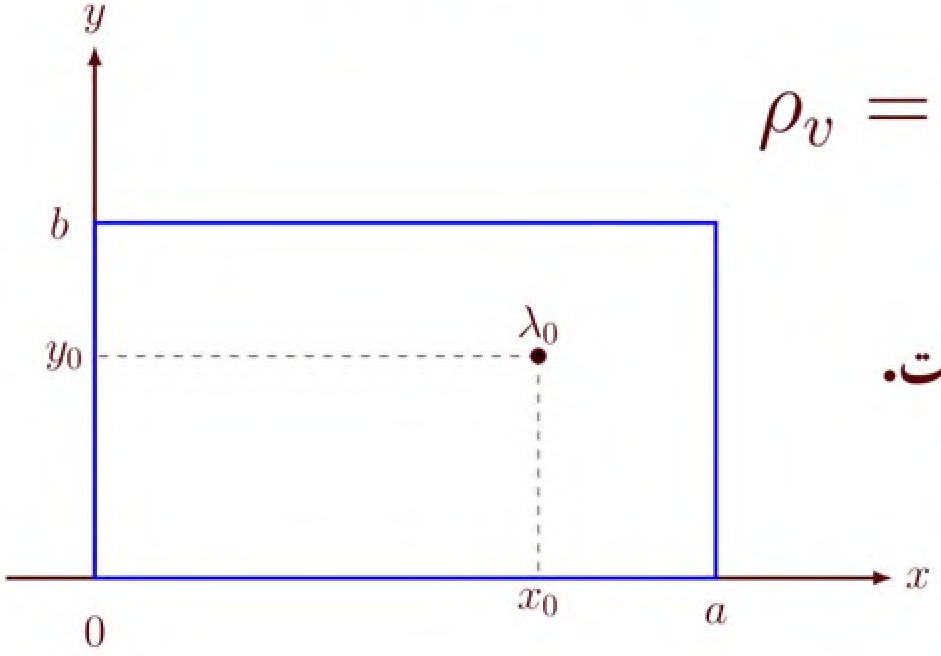
دیواره‌های کانال در $x=0$ و $y=0$ و $x=a$ و $y=b$ قرار دارند.

درون کانال یک خط بار با چگالی خطی λ_0 موازی محور z در نقطه‌ی (x_0, y_0) قرار دارد.

پتانسیل الکتریکی را درون کانال پیدا کنید.



به کمک تابع دلتای دیراک، می‌توان برای این خط بار یک چگالی حجمی بار به شکل زیر نوشت



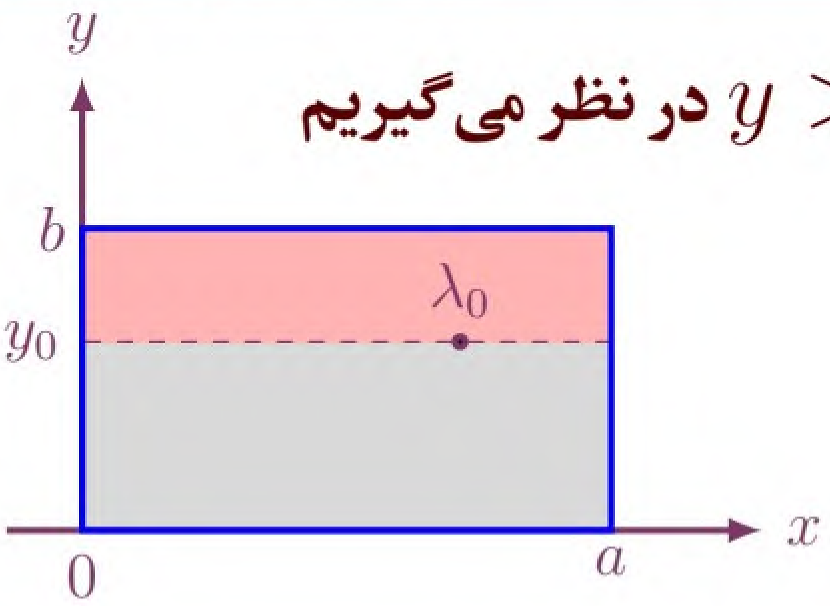
$$\rho_v = \lambda_0 \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$$

واضح است که در این مسئله، پتانسیل الکتریکی مستقل از مختصه‌ی z است.

بدین ترتیب معادله‌ی پواسون درون کانال به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} = -\frac{\lambda_0}{\epsilon_0}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$$

$$\Phi(0, y) = \Phi(a, y) = \Phi(x, 0) = \Phi(x, b) = 0$$



ناحیه‌ی درون کانال را به صورت دو ناحیه‌ی $y < y_0$ و $y > y_0$ در نظر می گیریم

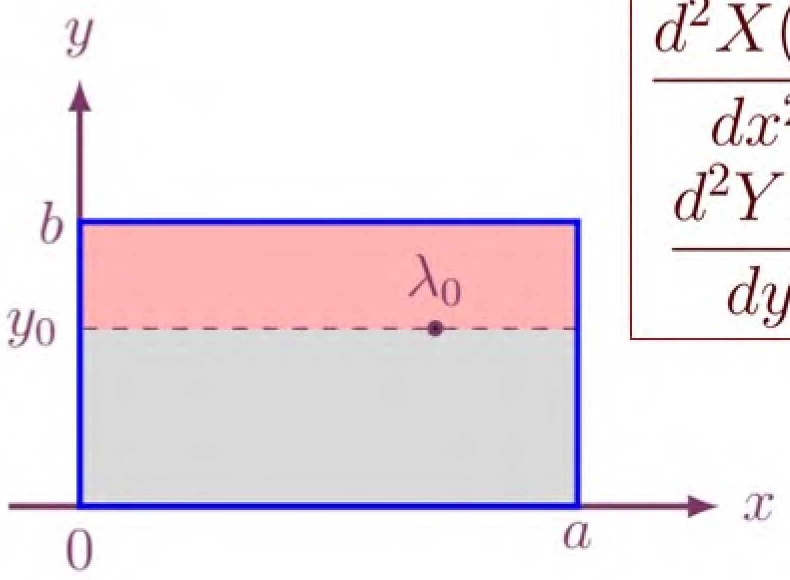
برای هر یک از این نواحی می‌توان نوشت

$$\nabla^2\Phi_1(x,y) = 0, \quad y < y_0, \quad \Phi(x,0) = 0, \quad \Phi(0, y < y_0) = 0, \; \Phi(a, y < y_0) = 0$$

$$\nabla^2\Phi_2(x,y) = 0, \quad y > y_0, \quad \Phi(x,b) = 0, \quad \Phi(0, y > y_0) = 0, \; \Phi(a, y > y_0) = 0$$

این دو معادله را به روش جدا سازی متغیرها حل می کنیم

$$\boxed{\Phi(x,y) = X(x)Y(y) \Longrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2}$$



$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$
$$Y(y) = C\sinh ky + D\cosh ky$$

شرط مرزی $\Phi(0,y)=0$ و $\Phi(a,y)=0$ برای هر دو حالت $y<y_0$ و $y>y_0$ ایجاب می‌کند که $X(0)=0$ و $X(a)=0$ و در نتیجه $B=0$ و $k=k_n=n\pi/a$ از سوی دیگر، برای $y<y_0$ شرطِ $\Phi(x,0)=0$ ایجاب می‌کند که $Y(0)=0$ بنابر این برای $y<y_0$ ضریب D صفر می‌شود $D=0$ بدین ترتیب برای ناحیه‌ی $y<y_0$ می‌توان نوشت

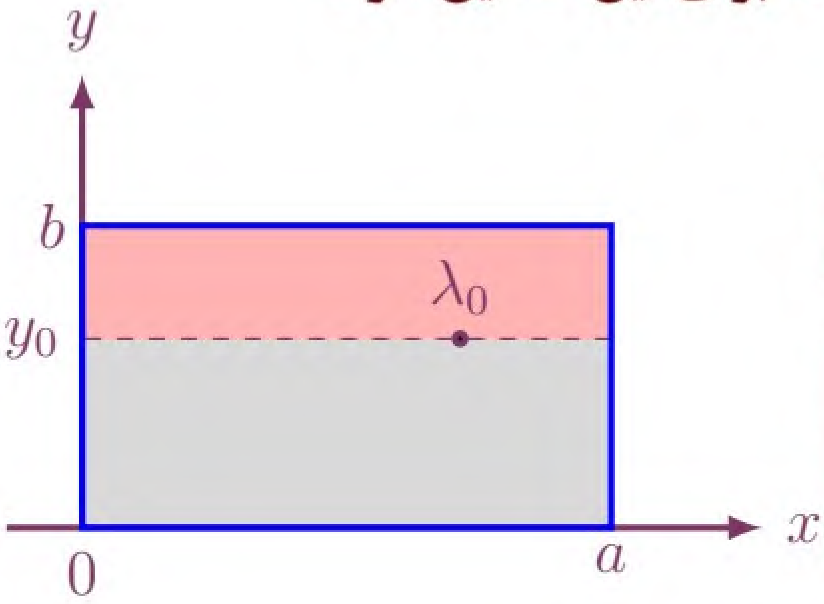
$$\boxed{\Phi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\Phi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y}$$

برای ناحیه‌ی $y > y_0$ شرط $\Phi(x,b) = 0$ ایجاب می کند که $Y(b) = 0$ برای این که این شرط

برقرار باشد کافی است که پاسخ $Y(y)$ را به شکل زیر انتخاب کنیم



$$\boxed{Y(y) = C\sinh k(b-y)}$$

$$\boxed{\Phi_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) \qquad y > y_0}$$

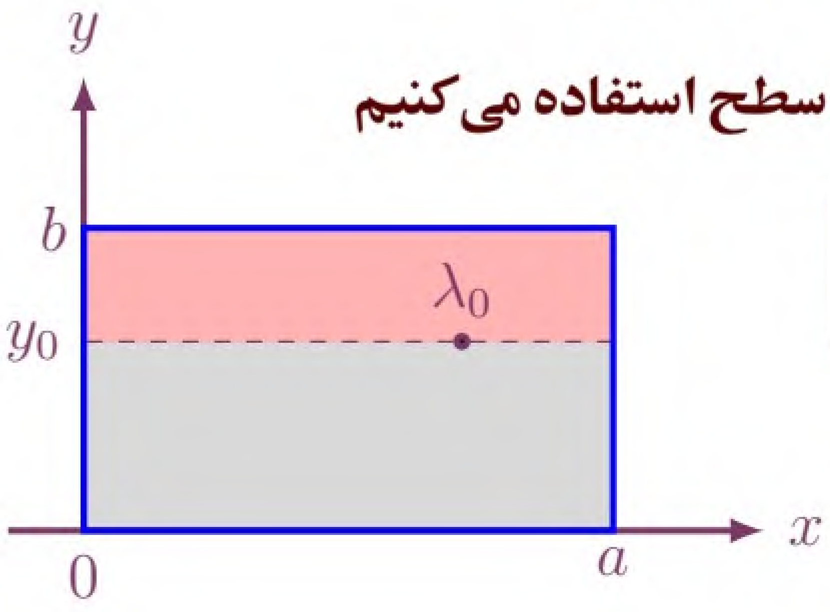
حال باید A_n و C_n را تعیین کنیم

برای این کار توابع Φ_1 و Φ_2 را بر روی سطح $y = y_0$ بررسی می کنیم

با توجه به قرار داشتن بار خطی λ_0 در نقطه‌ی (x_0, y_0)، می‌توان چنین گفت

که سطح $y = y_0$ سطحی با چگالی سطحی بار به شکل $\sigma = \lambda_0 \delta(x - x_0)$ است

از شرط پیوستگی پتانسیل و همچنین گسستگی مؤلفه‌ی عمودی میدان بر این سطح استفاده می‌کنیم



پیوستگی پتانسیل

$$\Phi_1(x, y_0) = \Phi_2(x, y_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}(b - y_0)$$

$$A_n \sinh\frac{n\pi}{a}y_0 = C_n \sinh\frac{n\pi}{a}(b - y_0)$$

و شرط گسستگی مؤلفه‌ی عمودی میدان بر سطح $y = y_0$ به شکل زیر است

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow \Big[(-\nabla\Phi_2)\cdot\hat{\boldsymbol{j}} - (-\nabla\Phi_1)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}\Big]_{y=y_0} = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0}\delta(x-x_0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y_0 + C_n\cosh\frac{n\pi}{a}(b-y_0)\right]\sin\frac{n\pi}{a}x = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0}\delta(x-x_0)$$

طرفین را در $\sin\frac{m\pi x}{a}$ ضرب می‌کنیم و روی x از 0 تا a انتگرال می‌گیریم

از شرط تعامد توابع سینوسی استفاده می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y_0 + C_n\cosh\frac{n\pi}{a}(b-y_0)\right]\frac{a}{2}\delta_{mn} = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0}\sin\frac{m\pi x_0}{a}$$

$$A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y_0 = C_n \sinh \frac{n\pi}{a}(b - y_0)$$

$$\frac{n\pi}{a}\left[A_n \cosh \frac{n\pi}{a} y_0 + C_n \cosh \frac{n\pi}{a}(b - y_0)\right]\frac{a}{2} = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0} \sin \frac{n\pi x_0}{a}$$

$$A_n = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0}\frac{2}{n\pi}\frac{\sinh \dfrac{n\pi(b - y_0)}{a}}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x_0}{a}$$

$$C_n = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0}\frac{2}{n\pi}\frac{\sinh \dfrac{n\pi y_0}{a}}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x_0}{a}$$

دانشگاه خوارزمی

در نهایت پتانسیل الکتریکی درون کانال به شکل زیر به دست می‌آید

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda_0}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi(b-y_0)}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x_0}{a} & y<y_0\\[2em] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda_0}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}\sinh\frac{n\pi y_0}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x_0}{a} & y>y_0\end{cases}$$

$$\boxed{\Phi(x,y)=\frac{2\lambda_0}{\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sinh\frac{n\pi(b-y_>)}{a}\sinh\frac{n\pi y_<}{a}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}}$$

$y_<$ و $y_>$ مقایسه‌ی بین y و y_0 است؛

دانشگاه خوارزمی

توجه کنید که اگر بخواهیم تابع گرین این مسئله را پیدا کنیم، باید مسئله‌ی زیر را حل کنیم

$$\nabla^2 G(x,y;x',y') = -4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')$$

$$G(x,y;x',y')\Big|_{\text{روی مرزها}} = 0$$

ولی این در واقع همین مسئله‌ای است که الآن حل کردیم. فقط کافی است λ_0 را برابر با یک قرار دهیم و پتانسیل به دسته آمده را در $4\pi\epsilon_0$ ضرب کنیم. بنابر این تابع گرین برای این مسئله برابر است با

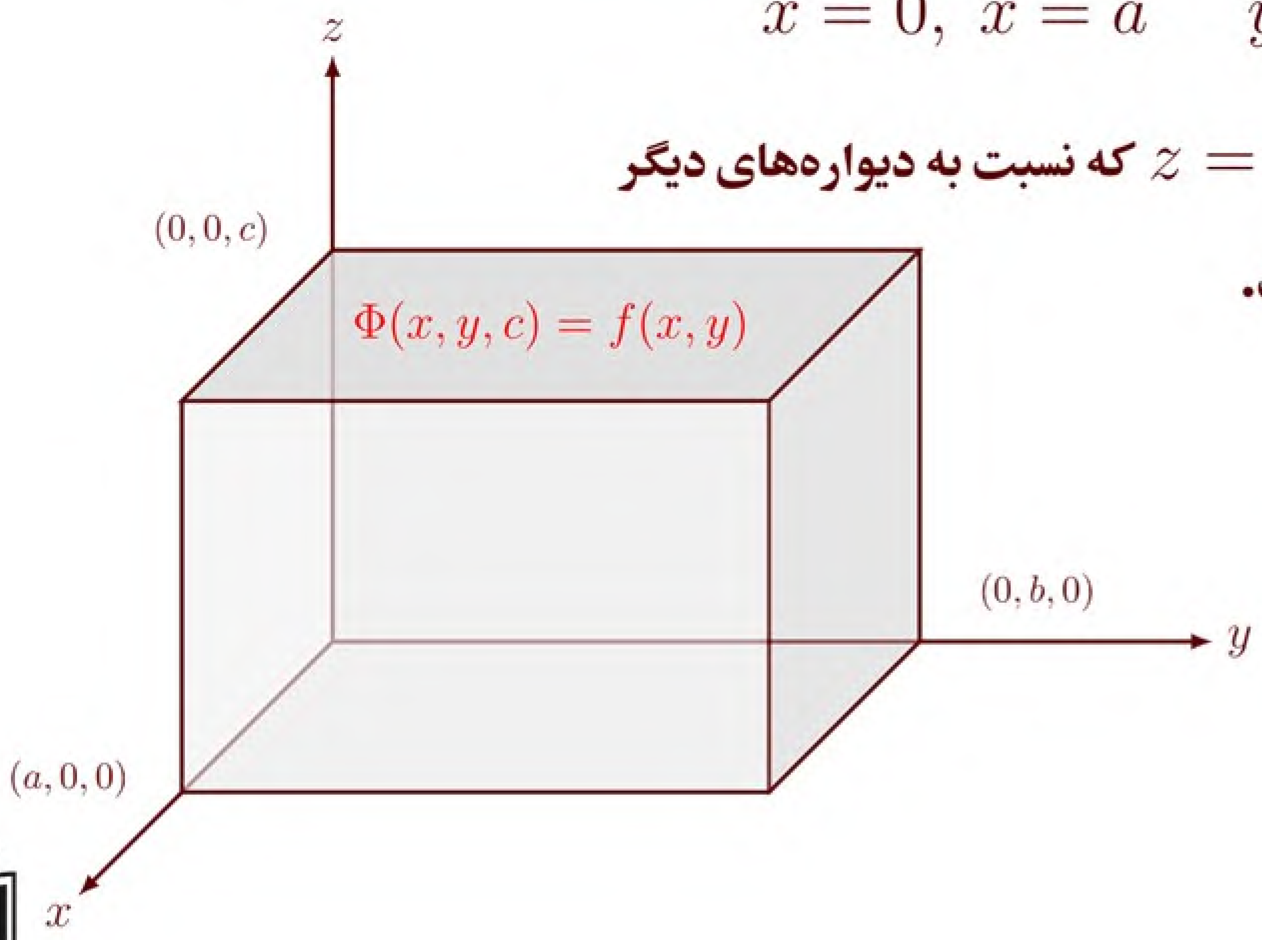
$$G(x,y;x',y') = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sinh\frac{n\pi(b-y_>)}{a}\sinh\frac{n\pi y_<}{a}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

که در آن $y_<$ و $y_>$ مقایسه‌ی بین y و y' است

دانشگاه خوارزمی

مکعبی تو خالی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید. دیواره‌های رسانا با معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$x = 0,\ x = a \quad y = 0,\ y = b \quad z = 0,\ z = c$$



همه‌ی دیواره‌ها در پتانسیل صفر قرار دارند به جز دیواره‌ی $z = c$ که نسبت به دیواره‌های دیگر عایق‌بندی شده و در پتانسیل $f(x, y)$ نگه داشته شده است.

پتانسیل الکتریکی را درون این مکعب پیدا کنید.

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi(0,y,z) = 0 \\ &\Phi(a,y,z) = 0 \\ &\Phi(x,0,z) = 0 \\ &\Phi(x,b,z) = 0 \\ &\Phi(x,y,0) = 0 \\ &\Phi(x,y,c) = f(x,y) \end{aligned}}$$

درون این مکعب معادله‌ی لاپلاس برقرار است

$$\boxed{\nabla^2\Phi(x,y,z)=0}$$

مشابه با آن‌چه در مطالب و مثال‌های قبل برای حل مسئله به روش جداسازی متغیرها گفتیم، به راحتی دیده می‌شود که برای این مسئله می‌توان پاسخ مسئله را به شکل $\Phi = X(x)Y(y)Z(z)$ نوشت که هر یک از توابع X و Y و Z در معادلات زیر صدق می کنند.

$$\boxed{\begin{aligned} X(x) &= A\sin px + B\cos px \\ Y(y) &= C\sin qy + D\cos qy \\ Z(z) &= E\sinh kz + F\cosh kz, \qquad \left(k=\sqrt{p^2+q^2}\right) \end{aligned}}$$

با اِعمال شرایط مرزی دیده می‌شود که

$$\Phi(0,y,z) = X(0)Y(y)Z(z) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi(a,y,z) = X(a)Y(y)Z(z) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \Rightarrow \sin pa = 0 \Rightarrow p = p_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\Phi(x,0,z) = X(x)Y(0)Z(z) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\Phi(x,b,z) = X(x)Y(b)Z(z) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \Rightarrow \sin qb = 0 \Rightarrow q = q_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$\Phi(x,y,0) = X(x)Y(y)Z(0) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow F = 0$$

بدین ترتیب پاسخ‌های بی‌شماری به ازای مقادیر مختلف n و m داریم

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi_{nm} = \sin p_n x \sin q_m y \sinh k_{nm} z, \qquad (\text{توجه کنید که } k_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2})$$

و بنا به قضیه‌ی برهم‌نهی، ترکیب این پاسخ‌ها هم پاسخ معادله‌ی لاپلاس هست

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}\Phi_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \sin p_n x \sin q_m y \sinh k_{nm} z$$

آن ترکیبی را پیدا می‌کنیم که شرایط مرزی را برقرار کند. در واقع ترکیب فوق پنج شرط از شش شرط را برقرار

می‌کند. شرط مرزی باقی مانده، شرط بر روی دیواره‌ی $z = c$ است

$$\Phi(x,y,c) = f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \sin p_n x \sin q_m y \sinh k_{nm} c$$

$$\boxed{\Phi(x,y,c) = f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}\sin p_n x \sin q_m y \sinh k_{nm} c}$$

برای تعیین G_{nm}ها، این را بطه را در $\sin p_{n'}x \sin q_{m'}y$ ضرب و روی x از 0 تا a و روی y از 0 تا b انتگرال می گیریم.

$$\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin p_{n'}x \sin q_{m'}y\,dx\,dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}\sinh k_{nm} c\int_0^a\int_0^b \sin p_{n'}x \sin q_{m'}y \sin p_n x \sin q_n y\,dx\,dy$$

$$\int_0^a \sin p_n x \sin p_{n'}x\,dx = \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{n'\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}\delta_{nn'}$$

$$\int_0^b \sin q_m x \sin q_{m'}x\,dx = \int_0^b \sin\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{m'\pi}{b}x\,dx = \frac{b}{2}\delta_{mm'}$$

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin p_{n'}x \sin q_{m'}y dx dy = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \sinh k_{nm}c \frac{a}{2}\delta_{nn'}\frac{b}{2}\delta_{mm'}$$

$$G_{n'm'} = \frac{4}{ab}\frac{\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin p_{n'}x \sin q_{m'}y dx dy}{\sinh k_{n'm'}c}$$

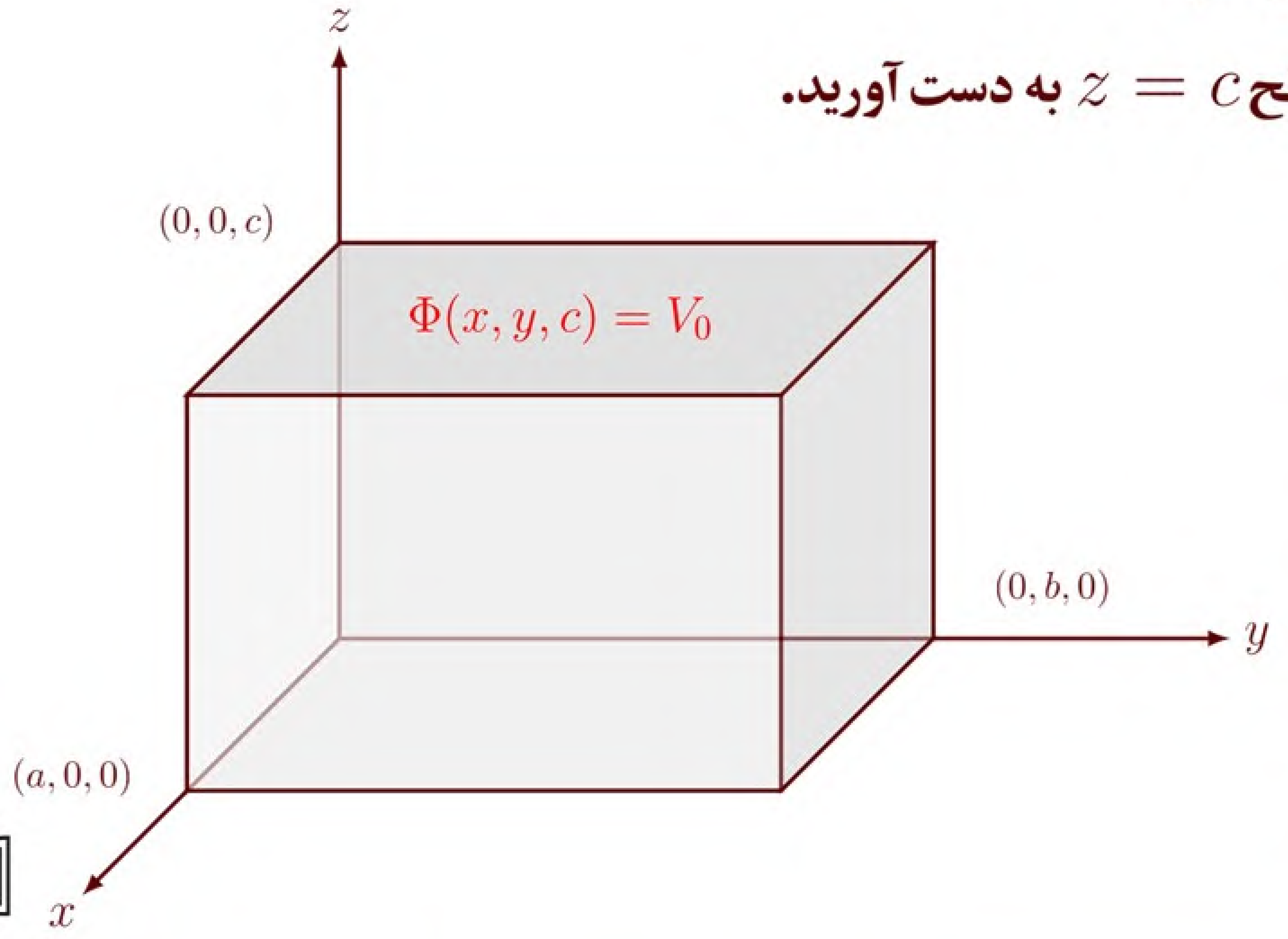
$$\Phi(x,y,z) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sinh k_{nm}z}{\sinh k_{nm}c}\sin p_n x \sin q_m y \right. \\ \left. \times \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin p_n x \sin q_m y dx dy\right]$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad q_m = \frac{m\pi}{b}, \qquad k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

دانشگاه خوارزمی

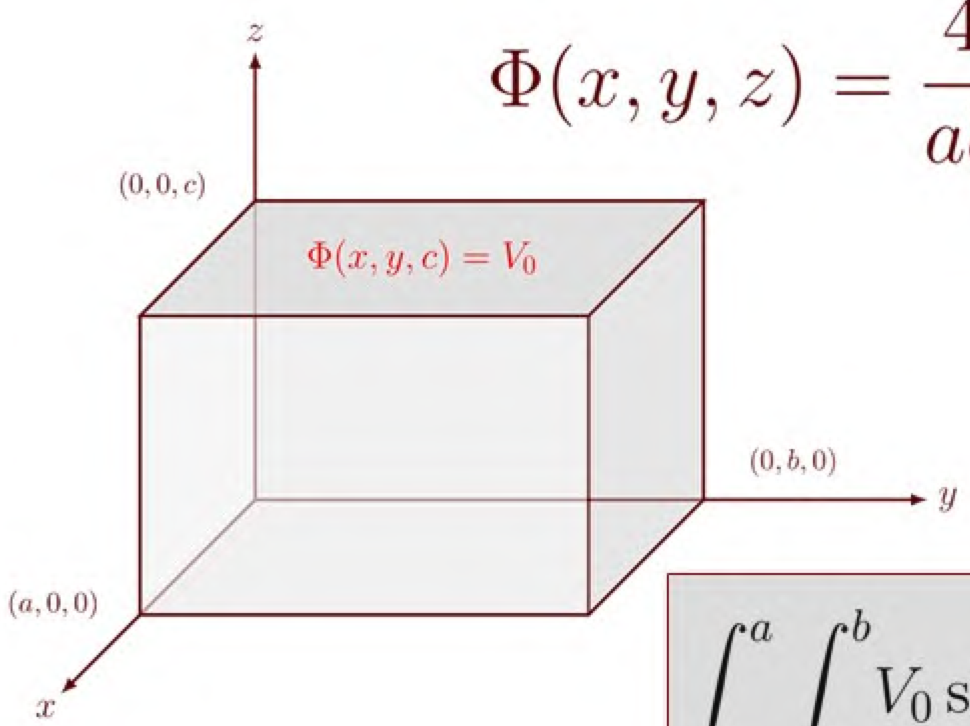
مثال قبل را با شرط $f(x,y)=V_0$ حل کنید

و چگالی سطحی بار الکتریکی را بر روی سطح $z=c$ به دست آورید.



$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(0,y,z)&=0\\ \Phi(a,y,z)&=0\\ \Phi(x,0,z)&=0\\ \Phi(x,b,z)&=0\\ \Phi(x,y,0)&=0\\ \Phi(x,y,c)&=V_0\end{aligned}}$$

با توجه به نتیجه‌ی مثال قبل



$$\Phi(x,y,z) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sinh k_{nm}z}{\sinh k_{nm}c}\sin p_n x \sin q_m y \times \int_0^a\int_0^b V_0 \sin p_n x \sin q_m y dxdy\right]$$

$$\int_0^a\int_0^b V_0 \sin p_n x \sin q_m y dxdy = \int_0^a\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y dxdy$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4V_0 ab}{nm\pi^2} & \text{اگر } n \text{ و } m \text{ فرد باشند} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ و } m \text{ زوج باشند} \end{cases}$$

$$\Phi(x,y,z)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{n=\text{فرد}}^{\infty}\sum_{m=\text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{nm}\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)z}{\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)c}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\Bigg[&\frac{1}{(2r+1)(2s+1)}\\ &\times\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}\right)z}{\sinh\left(\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}\right)c}\\ &\times\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x\\ &\times\sin\frac{(2s+1)\pi}{b}y\Bigg]\end{aligned}$$

و چگالی سطحی بار بر روی سطح $z=c$ را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد

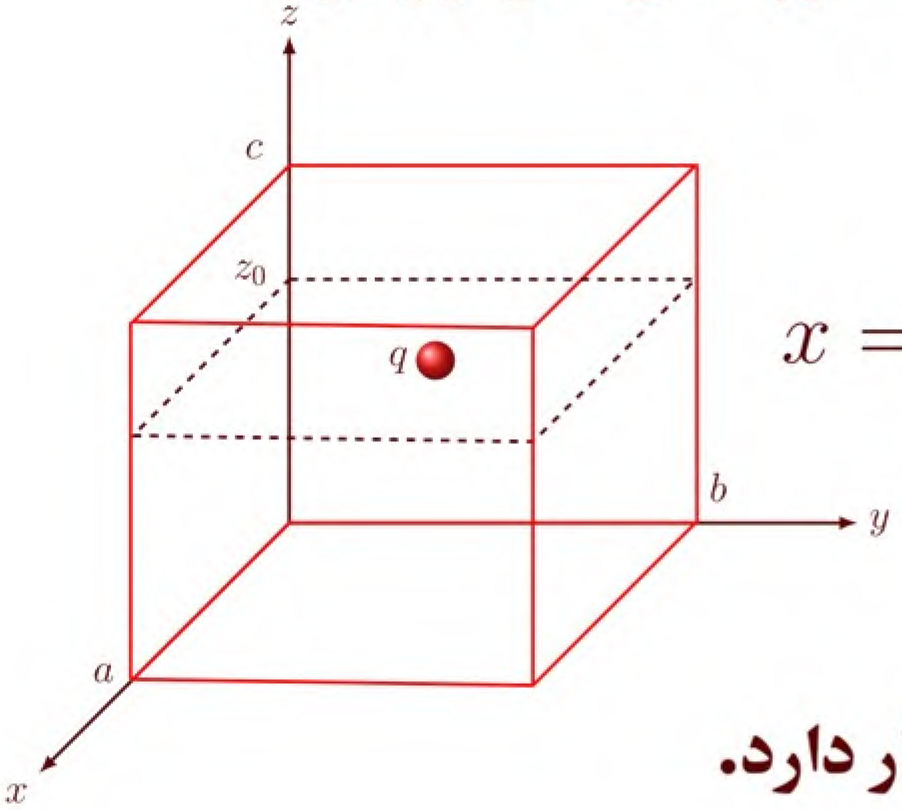
$$\boxed{\sigma = \epsilon_0 E_n\Big|_{z=c} = \epsilon_0\left(-\nabla\Phi\right)\cdot\left(-\hat{\boldsymbol{k}}\right) = \epsilon_0\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=c}}$$

$$\sigma(x,y) = \frac{16V_0\epsilon_0}{\pi^2}\sum_{n=\text{فرد}}^{\infty}\sum_{m=\text{فرد}}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)}{nm}\left[\coth\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\right)c\right] \times\left(\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\sin\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$\sigma(x,y) = \frac{16V_0\epsilon_0}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\Bigg[\frac{\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}}{(2r+1)(2s+1)}$$
$$\times \coth\left(\sqrt{\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}}\right)c$$
$$\times \sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x$$
$$\times \sin\frac{(2s+1)\pi}{b}y\Bigg]$$

دانشگاه خوارزمی

مکعبی تو خالی با دیواره‌های رسانا در نظر بگیرید که همه‌ی دیواره‌ها در پتانسیل صفر قرار دارند.



دیواره‌های رسانا با معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$x = 0,\ x = a \quad y = 0,\ y = b \quad z = 0,\ z = c$$

درون مکعب بار نقطه‌ای q در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) قرار دارد.

پتانسیل الکتریکی را درون این مکعب پیدا کنید.

به کمک تابع دلتای دیراک، می‌توان برای این بار نقطه‌ای یک چگالی حجمی بار به شکل زیر نوشت:

$$\boxed{\rho_v = q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)}$$

بدین ترتیب معادله‌ی پواسون درون مکعب به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2\Phi(x,y,z) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

$$\Phi(0,y,z) = \Phi(a,y,z) = 0$$

$$\Phi(x,0,z) = \Phi(x,b,z) = 0$$

$$\Phi(x,y,0) = \Phi(x,y,c) = 0$$

ناحیه‌ی درون مکعب را به صورت دو ناحیه‌ی $z_0 > z$ و $z_0 < z$ در نظر می‌گیریم.

برای هر یک از این نواحی می‌توان نوشت

$$\nabla^2\Phi_1(x,y,z) = 0, \quad 0 < z < z_0$$

$$\Phi(x,y,0) = 0$$

$$\Phi_1(0,y,z<z_0) = \Phi_1(a,y,z<z_0) = 0$$

$$\Phi_1(x,0,z<z_0) = \Phi_1(x,b,z<z_0) = 0$$

$$\nabla^2\Phi_2(x,y,z) = 0, \quad z_0 < z < c$$

$$\Phi(x,y,c) = 0$$

$$\Phi_2(0,y,z>z_0) = \Phi_2(a,y,z>z_0) = 0$$

$$\Phi_2(x,0,z>z_0) = \Phi_2(x,b,z>z_0) = 0$$

این دو معادله را به روش جدا سازی متغیرها حل می‌کنیم.

با اعمال شرایط مرزی دیده‌می‌شود که پتانسیل را در هر یک از این نواحی می توان به شکل زیر نوشت

$$\boxed{\Phi_1(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\sinh k_{nm}z\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y \qquad 0<z<z_0}$$

$$k_{nm}=\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

$$\boxed{\Phi_2(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{nm}\sinh k_{nm}(c-z)\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y \qquad z_0<z<c}$$

برای محاسبه‌ی A_{nm} و C_{nm} شرط پیوستگی پتانسیل و شرط گسستگی

$$\Phi_1(x,y,z0) = \Phi_2(x,y,z_0)$$

مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی را بر سطح $z = z_0$ اعمال می‌کنیم

$$(E_{2n} - E_{1n})\Big|_{z=z_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

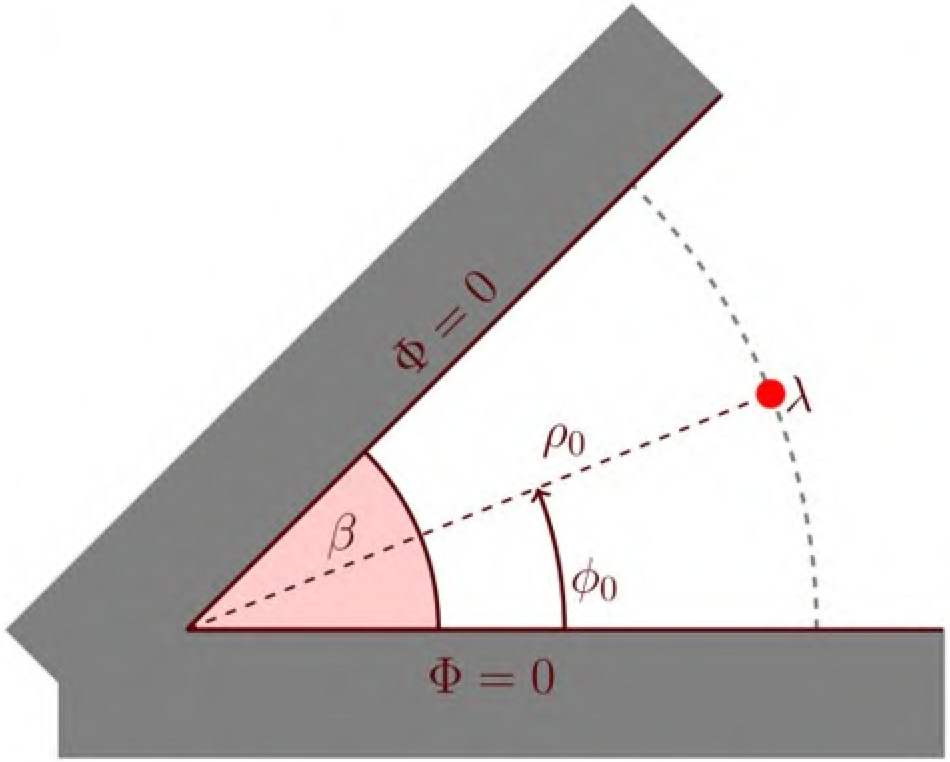
$$\Big[(-\nabla\Phi_2)\cdot\hat{\boldsymbol{k}} - (-\nabla\Phi_1)\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\Big]_{z=z_0} = \frac{q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\epsilon_0}$$

بدین ترتیب ضرایب A_{nm} و C_{nm} و در نهایت پتانسیل الکتریکی درون کانال به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\Phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{16\pi}{ab}\frac{\sinh k_{nm}z_< \sinh k_{nm}(c-z_>)}{k_{nm}\sinh k_{nm}c} \times \sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}x_0 \times \sin\frac{m\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{b}y_0\Bigg]$$

دانشگاه خوارزمی

دو دیواره‌ی نامتناهی رسانا در نظر بگیرید که یکی منطبق بر صفحه‌ی $\phi = 0$ (یعنی صفحه‌ی xz) و دیگری منطبق بر $\phi = \beta$ است. دیواره‌ها در محور z با هم مشترکند. این دیواره‌ها در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند. یک خط بار نامتناهی با چگالی یکنواخت λ موازی محور z در مکان (ρ_0, ϕ_0) قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در فضای بین این دیواره‌ها پیدا کنید.



برای این مسئله می‌توان با استفاده از تابع دلتای دیراک، یک چگالی حجمی به شکلِ زیر تعریف کرد

$$\boxed{\rho_v = \lambda \frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)}{\rho}}$$

بدین ترتیب معادله‌ی پواسون برای این مسئله به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\boxed{\nabla^2\Phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}\frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)}{\rho}}$$

فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کنیم: $\rho > \rho_0$ و $\rho < \rho_0$

پتانسیل الکتریکی در هر یک از این نواحی در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla^2\Phi_1 = 0 & \rho < \rho_0 \\ \nabla^2\Phi_2 = 0 & \rho > \rho_0 \end{array}}$$

توجه شود که برای ناحیه‌ی $\rho < \rho_0$ باید شرطِ $\lim_{\rho\to 0}\Phi_1 \neq \infty$ را به کار ببریم

و برای ناحیه‌ی $\rho > \rho_0$ شرطِ $\lim_{\rho\to\infty}\Phi_2 = 0$ را به کار ببریم.

سطح $\rho = \rho_0$ را می‌توانیم سطحی با چگالی سطحیِ $\sigma = \lambda\dfrac{\delta(\phi-\phi_0)}{\rho_0}$ در نظر بگیریم

بر روی این سطح پتانسیل پیوسته است اما مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی گسسته است و مقدار گسستگی

هم متناسب با چگالی سطحی بر روی مرز است. یعنی در واقع مشتق پتانسیل بر روی این مرز گسسته است.

برای هر دو ناحیه، مسئله را به روش جداسازی متغیرها حل می‌کنیم.

$$\Phi_1(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi \qquad \rho<\rho_0$$
$$\Phi_2(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\rho^{\frac{-n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi \qquad \rho<\rho_0$$

این پاسخ‌ها به گونه‌ای نوشته شده که شرط‌های مرزی در $0=\phi$ و $\phi=\beta$

و همچنین شرط‌های مربوط به ρهای کوچک و ρهای بزرگ برقرار باشد.

برای پیدا کردنِ ضرائب A_n و B_n، پیوستگی پتانسیل

و گسستگی مشتق آن را در مرز $\rho=\rho_0$ بررسی می کنیم

$$\Phi_1(\rho_0,\phi)=\Phi_2(\rho_0,\phi)\ \Rightarrow\ A_n\rho_0^{\frac{n\pi}{\beta}}=B_n\rho_0^{\frac{-n\pi}{\beta}}$$

$$\boxed{B_n=A_n\rho_0^{\frac{2n\pi}{\beta}}}$$

همچنین گسستگی مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در مرز $\rho=\rho_0$ به شکل زیر است

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\Rightarrow(-\nabla\Phi_2\cdot\hat{e}_\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}-(-\nabla\Phi_1\cdot\hat{e}_\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}=\frac{\lambda}{\epsilon_0}\frac{\delta(\phi-\phi_0)}{\rho_0}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{B_n = A_n \rho_0^{\frac{2n\pi}{\beta}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\frac{n\pi}{\beta}\rho_0^{\frac{-n\pi}{\beta}-1} + A_n\frac{n\pi}{\beta}\rho_0^{\frac{n\pi}{\beta}-1}\right]\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi = \frac{\lambda}{\epsilon_0}\frac{\delta(\phi-\phi_0)}{\rho_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[2A_n\frac{n\pi}{\beta}\rho_0^{\frac{n\pi}{\beta}-1}\right]\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi = \frac{\lambda}{\epsilon_0}\frac{\delta(\phi-\phi_0)}{\rho_0}$$

برای پیدا کردنِ A_n طرفین رابطه‌ی فوق را در $\sin\frac{m\pi}{\beta}\phi$ ضرب و از 0 تا β انتگرال می گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[2A_n\frac{n\pi}{\beta}\rho_0^{\frac{n\pi}{\beta}-1}\right]\int_0^{\beta}\sin\frac{m\pi}{\beta}\phi\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi d\phi = \frac{\lambda}{\epsilon_0}\int_0^{\beta}\frac{\delta(\phi-\phi_0)}{\rho_0}\sin\frac{m\pi}{\beta}\phi d\phi$$

در طرف چپ رابطه‌ی فوق از تعامد توابع سینوسی و در طرف راست از خاصیت تابع دلتا استفاده می کنیم

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2A_n\frac{n\pi}{\beta}\rho_0^{\frac{n\pi}{\beta}-1}\right]\frac{\beta}{2}\delta_{nm}=\frac{\lambda}{\rho_0\epsilon_0}\sin\frac{m\pi}{\beta}\phi_0}$$

$$\boxed{A_n=\frac{\lambda}{n\pi\epsilon_0}\rho_0^{\frac{-n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi\phi_0}{\beta}}$$

$$\boxed{B_n=\frac{\lambda}{n\pi\epsilon_0}\rho_0^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi\phi_0}{\beta}}$$

دانشگاه خوارزمی

بدین ترتیب پتانسیل الکتریکی در فضای بین صفحات برابر است با

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_1(\rho,\phi) &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi\phi_0}{\beta}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi \qquad \rho<\rho_0\\ \Phi_2(\rho,\phi) &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi\phi_0}{\beta}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi \qquad \rho<\rho_0\end{aligned}}$$

که آن را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\boxed{\Phi(\rho,\phi) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi\phi_0}{\beta}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi}$$

اگر بخواهیم تابع گرینِ این مسئله را پیدا کنیم، قاعدتاً باید معادله‌ی زیر را حل کنیم

$$\nabla^2 G(\rho,\phi,\rho',\phi') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -4\pi\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)}{\rho}$$

$$G(\rho,0,\rho',\phi') = G(\rho,\beta,\rho',\phi') = 0$$

اما این دقیقاً همین مسئله‌ای است که حل کردیم؛ فقط کافی است به جای λ قرار بدهیم 1 و معادله را در $4\pi\epsilon_0$ ضرب کنیم. بنابر این پاسخی که برای این مسئله به دست آورده‌ایم همان تابع گرین است

$$\boxed{G(\rho,\phi,\rho',\phi') = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi\phi_0}{\beta}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید