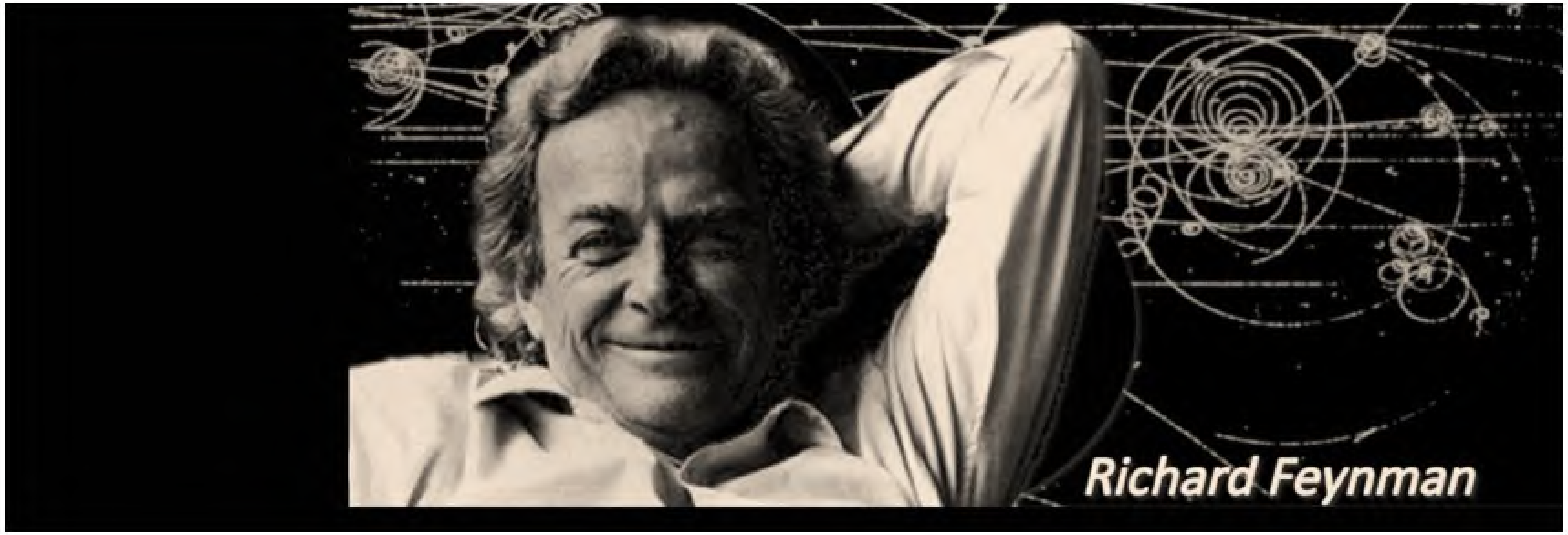
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس نوزدهم

معادله‌ی لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای

Laplace Equation in Cylindrical Coordinates

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی فقط تابعی از ρ (فاصله‌ی شعاعی تا محور z) باشد $\Phi = \Phi(\rho)$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) = 0}$$

$$\boxed{\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) = a_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{a_0}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \Phi = a_0 \ln\rho + b_0}$$

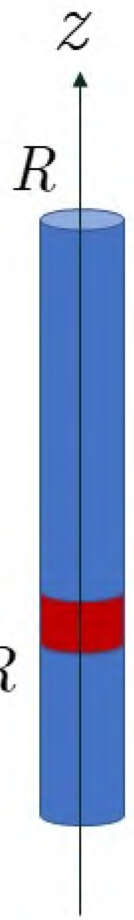
فرض کنید پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی $\rho = \rho_0$ (یعنی روی استوانه‌ای به شعاعِ ρ_0) برابر با صفر انتخاب کنیم:

$$a_0 \ln\rho_0 + b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -a_0 \ln\rho_0$$

$$\boxed{\Phi(\rho) = a_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0}}$$

دانشگاه خوارزمی

پتانسیل الکتریکی را در اطراف یک میله‌ی رسانای باردار استوانه‌ای بسیار دراز به شعاع R پیدا کنید.



$$\Phi(\rho_0) = 0$$

$$\boxed{\Phi(\rho) = a_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$dq = \sigma 2\pi R dz$$

$$\lambda = \frac{dq}{dz} = \sigma 2\pi R$$

$$\boxed{\sigma = \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \cdot \hat{e}_\rho\right)\Big|_{\rho=R} = \epsilon_0 \left(-\frac{d\Phi}{d\rho}\right)_{\rho=R} = -\epsilon_0 \frac{a_0}{R} \Rightarrow a_0 = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0}}$$

$$\boxed{\Phi(\rho) = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}}$$

فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا تقارن مسئله به گونه‌ای باشد که پتانسیل الکتریکی مستقل از مختصه‌ی z و فقط تابعی از مختصات ρ و ϕ باشد

$$\Phi = \Phi(\rho, \phi)$$

$$\nabla^2\Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0$$

$$\Phi = R(\rho)F(\phi)$$

$$\frac{F(\phi)}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

الف) $\alpha = 0$

$$\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = A \Rightarrow R(\rho) = A_1 \ln\rho + A_2$$

$$\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow F(\phi) = A_3\phi + A_4$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

ب) $\alpha = -\nu^2$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{\nu^2}{\rho}R(\rho) = 0$$

$$R(\rho) = A\rho^{i\nu} + B\rho^{-i\nu}$$

$$\rho = e^{\ln\rho} \Rightarrow R = Ae^{i\nu\ln\rho} + Be^{-i\nu\ln\rho} = A'\cos(\nu\ln\rho) + B'\sin(\nu\ln\rho)$$

$$\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} - \nu^2F(\phi) = 0$$

$$F(\phi) = C\cosh(\nu\phi) + D\sinh(\nu\phi)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} = \alpha$$

ج) $\alpha = \nu^2$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho}R(\rho) = 0$$

$$R(\rho) = A\rho^{\nu} + B\rho^{-\nu}$$

$$\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2F(\phi) = 0$$

$$F(\phi) = C\cos(\nu\phi) + D\sin(\nu\phi)$$

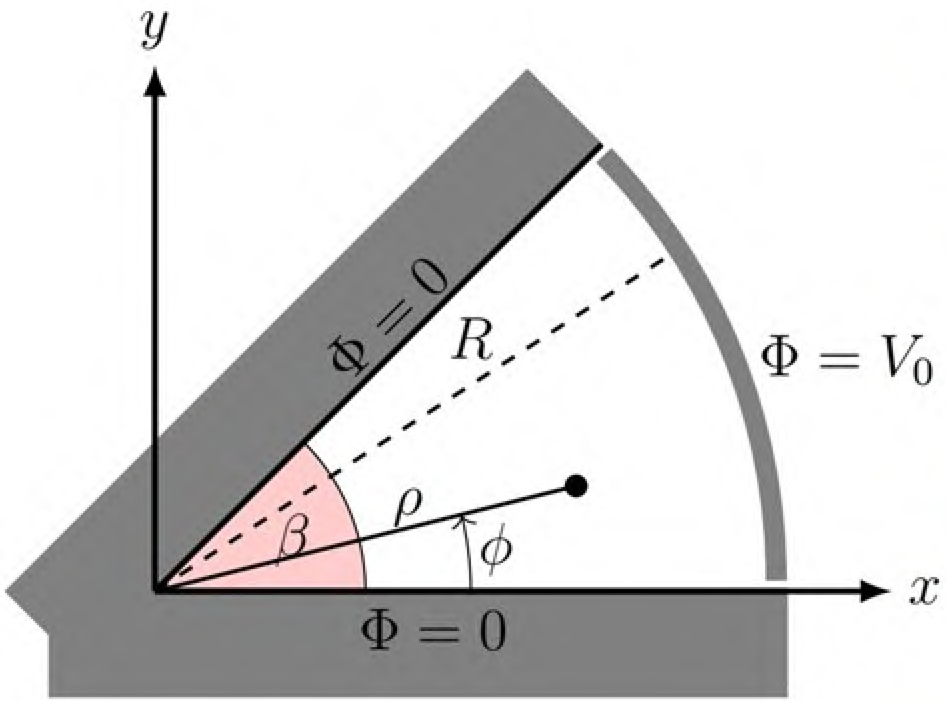
در برخی مسائل، تقارن به گونه ای است که سیستم تحت تبدیل $\phi \to \phi + 2\pi$ تغییر نمی‌کند. در این صورت

$$\boxed{\Phi(\rho,\phi) = \Phi(\rho,\phi + 2\pi) \Rightarrow F(\phi) = F(\phi + 2\pi)}$$

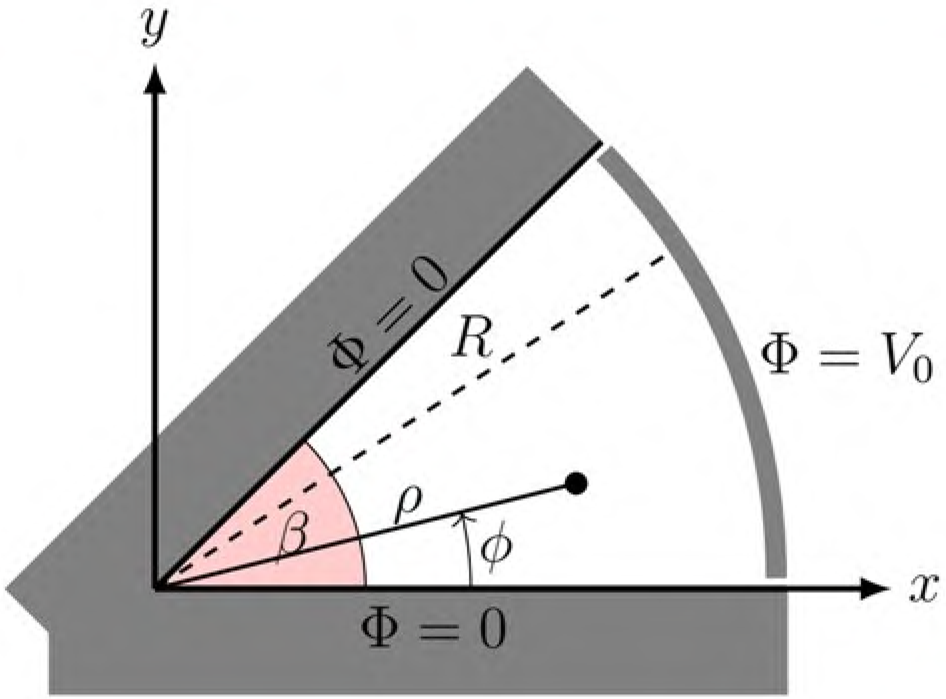
$$\boxed{F(\phi) = A_3 \cos(n\phi) + A_4 \sin(n\phi); \qquad n = 1, 2, 3, \cdots}$$

$$\boxed{\Phi(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi\right]\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi\right]\rho^{-n}}$$

دانشگاه خوارزمی



دو دیواره‌ی رسانا در نظر بگیرید که یکی منطبق بر صفحه‌ی $\phi = 0$ (یعنی صفحه‌ی xz) و دیگری منطبق بر $\phi = \beta$ است. دیواره‌ها در محور z با هم مشترکند. این دیواره‌ها در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند. انتهای لبه‌ی آزاد دو دیواره، با دیواره‌ای به شکل کمانی به شعاع $\rho = R$ بسته شده است. این دیواره‌ی کمانی شکل از دو دیواره‌ی دیگر عایق‌بندی شده است. پتانسیل این دیواره برابر با V_0 است. پتانسیل الکتریکی را در فضای بین این دیواره‌ها پیدا کنید.



به راحتی می‌توان بررسی کرد که در این مسئله ثابت جداسازی باید مثبت باشد

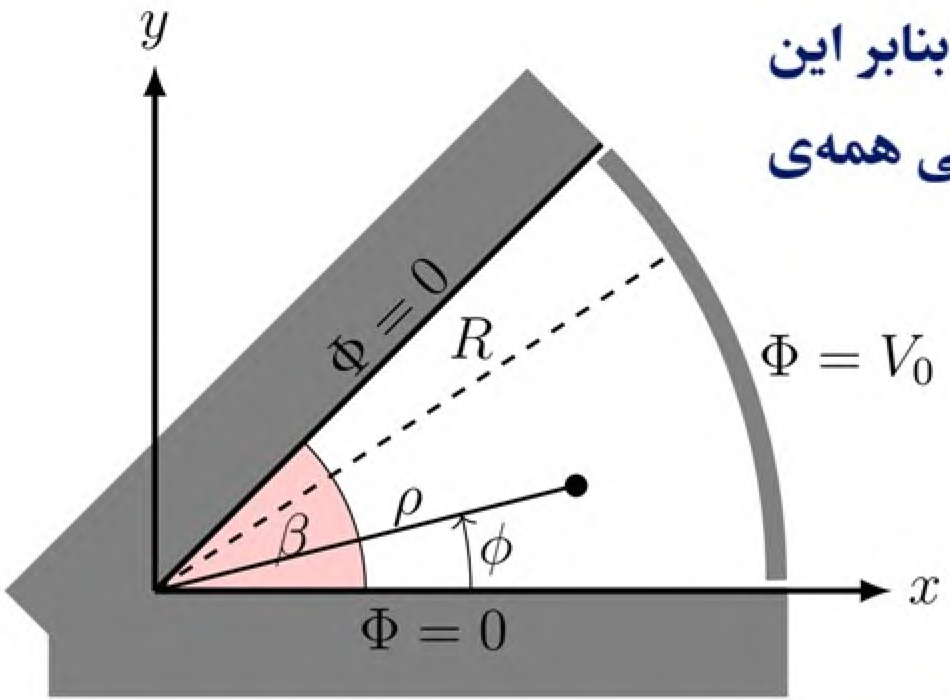
$$\alpha = +\nu^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} R(\rho) &= A\rho^{\nu} + B\rho^{-\nu} \\ F(\phi) &= C\cos\nu\phi + D\sin\nu\phi \end{aligned}}$$

اما با توجه به شرایط مرزی به سادگی دیده می‌شود که

$\nu = n\pi/\beta$ و $B = C = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi(\rho, 0) = 0 \Rightarrow\ F(0) = 0\ \Rightarrow\ C = 0 \\ &\Phi(\rho, \beta) = 0 \Rightarrow\ F(\beta) = D\sin\nu\beta = 0\ \Rightarrow\ \nu = \frac{n\pi}{\beta} \\ &\Phi(0, \phi) \neq \infty \Rightarrow\ B = 0 \end{aligned}}$$



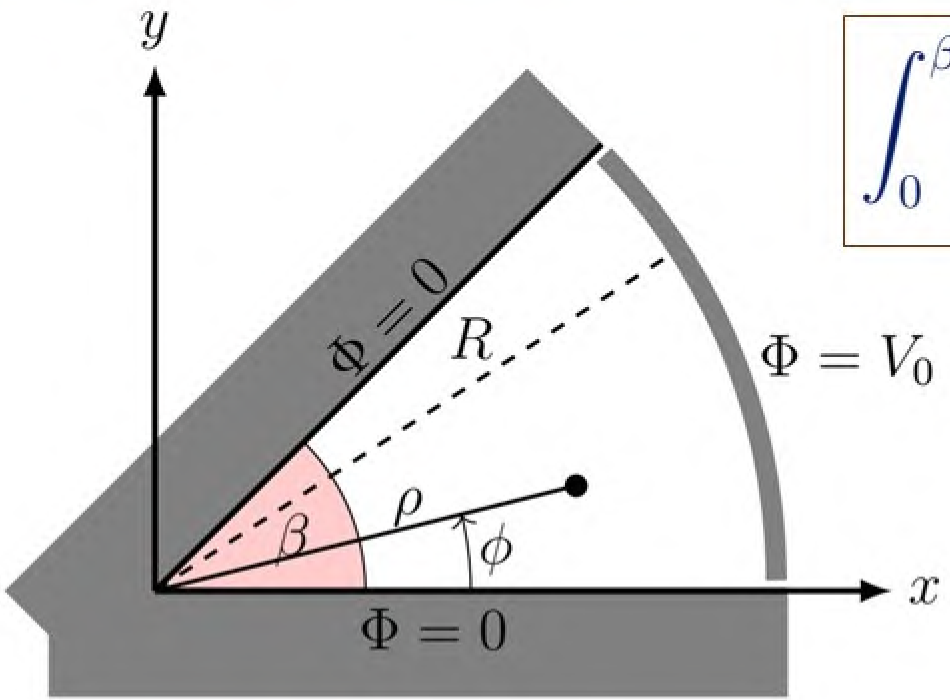
یعنی به ازای مقادیر مختلف n پاسخ‌های متعددی برای پتانسیل داریم. بنابر این طبق قضیه‌ی برهم‌نهی، پتانسیلِ الکتریکی را می‌توان به شکل ترکیب خطی همه‌ی این پاسخ‌ها نوشت:

$$\boxed{\Phi(\rho,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi}$$

برای یافتنِ A_nها، از شرط مرزی بر روی سطحِ $\rho = R$ استفاده می کنیم

$$\boxed{\Phi(R,\phi) = V_0 \Rightarrow V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi}$$

طرفین رابطه را در $\sin\frac{m\pi}{\beta}\phi$ ضرب می کنیم و از صفر تا β روی ϕ انتگرال می گیریم

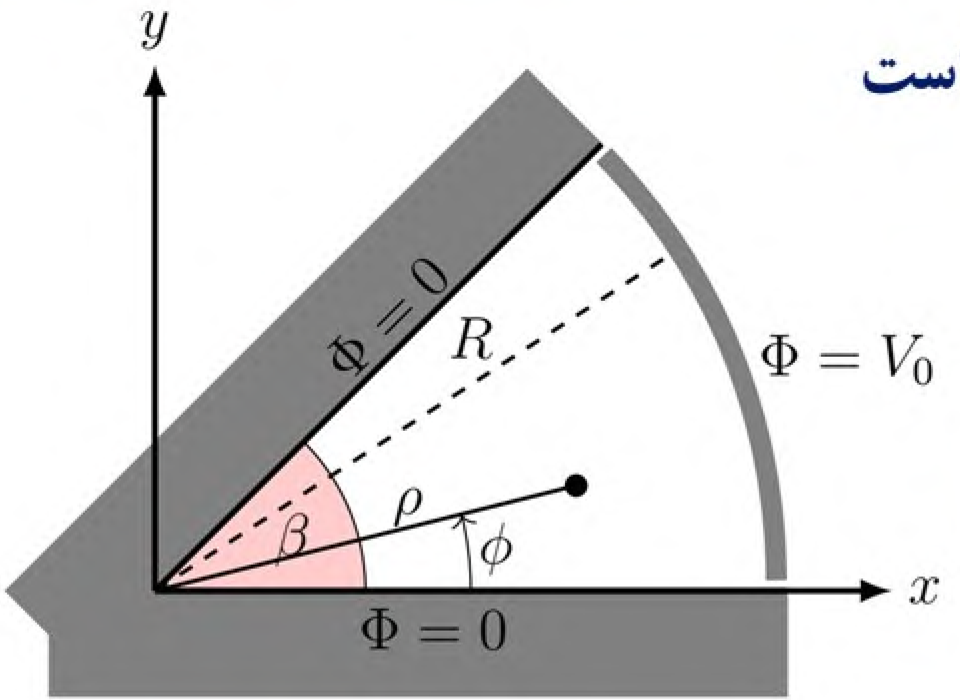


$$\int_0^{\beta} V_0 \sin\frac{m\pi}{\beta}\phi d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \int_0^{\beta} \sin\frac{m\pi}{\beta}\phi \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi d\phi$$

$$-V_0\frac{\beta}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{\beta}\phi\Big|_0^{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\beta}} \frac{\beta}{2}\delta_{mn}$$

$$-V_0\frac{\beta}{m\pi}\left(\cos m\pi - 1\right) = A_m R^{\frac{m\pi}{\beta}}\frac{\beta}{2}$$

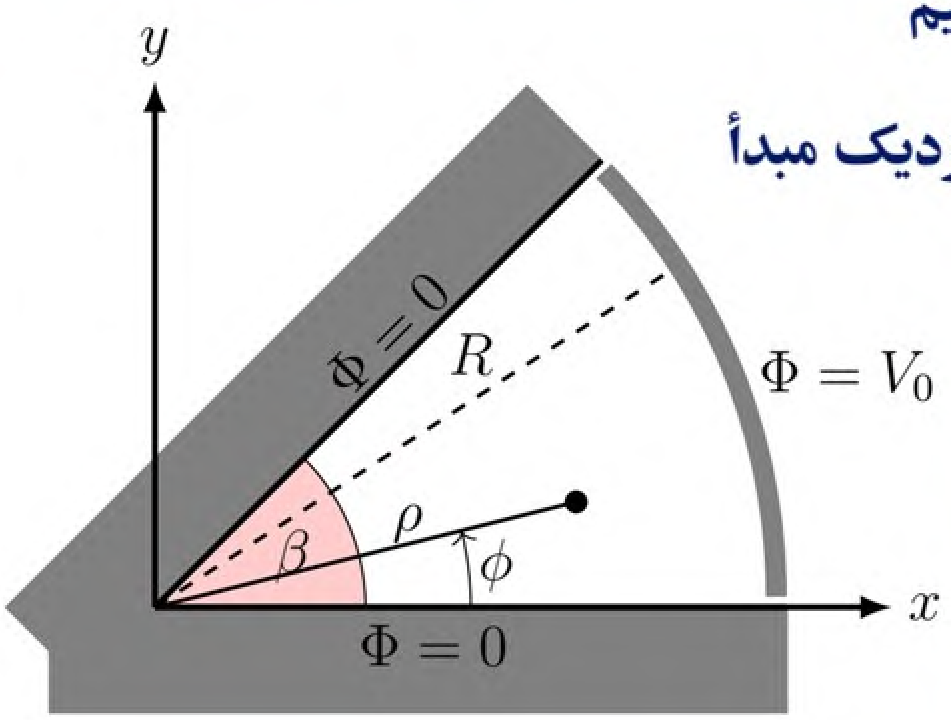
$$A_m = -V_0\frac{2}{m\pi}\left((-1)^m - 1\right)R^{\frac{-m\pi}{\beta}} = \begin{cases} 0 & m = \text{زوج} \\ V_0\frac{4}{m\pi}R^{\frac{-m\pi}{\beta}} & m = \text{فرد} \end{cases}$$



در نتیجه پتانسیل الکتریکی در فضای بین این دیواره‌ها به شکل زیر است

$$\Phi(\rho,\phi)=\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{4V_0}{n\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi}{\beta}\phi$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4V_0}{(2k+1)\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\beta}}\sin\frac{(2k+1)\pi}{\beta}\phi$$

می‌خواهیم میدان الکتریکی و چگالی سطحیِ بار را در لبه‌های تیز بررسی کنیم

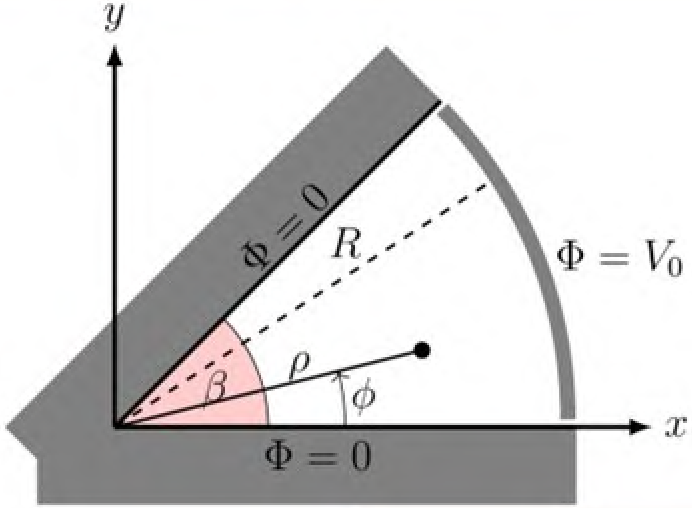


ابتدا برای مسئله‌ی قبل، چگالی بار را بر روی صفحات رسانا در نقاط نزدیک مبدأ $(\rho \ll R)$، محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\Phi(\rho,\phi) &= \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\frac{n\pi}{\beta}\phi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k+1)\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\beta}} \sin\frac{(2k+1)\pi}{\beta}\phi\end{aligned}$$

با توجه به کوچک بودنِ نسبت $\rho/R \ll 1$، در حاصلِ جمعِ فوق، پتانسیل را با جمله‌ی اول تقریب می‌زنیم:

$$\Phi(\rho,\phi) \approx \frac{4V_0}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\frac{\pi}{\beta}\phi$$



$$\Phi(\rho, \phi) \approx \frac{4V_0}{\pi} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \frac{\pi}{\beta}\phi$$

و میدانِ الکتریکی در نزدیکی‌های مبدأ برابر است با

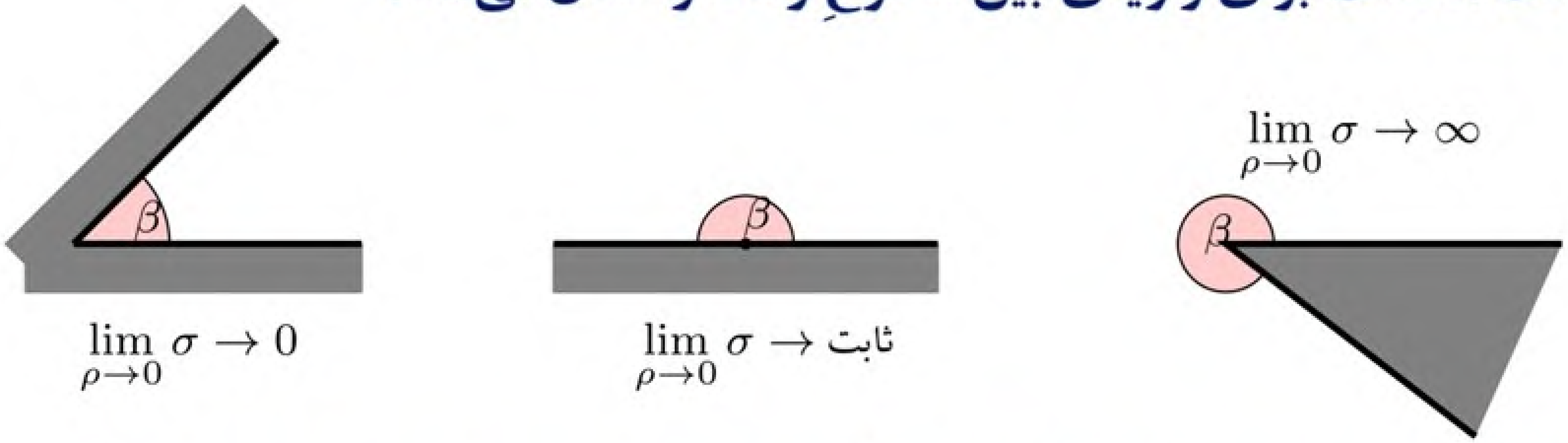
$$\boldsymbol{E}(\rho, \phi) = -\nabla\Phi(\rho, \phi) = -\frac{4V_0}{\beta} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\beta}-1} \left[\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \sin \frac{\pi}{\beta}\phi + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cos \frac{\pi}{\beta}\phi\right]$$

چگالی سطحیِ بار بر روی صفحه‌ی $\phi = 0$

$$\sigma = \boldsymbol{E}(\rho, \phi) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \Big|_{\phi=0} = \boldsymbol{E}(\rho, \phi) \cdot (-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) \Big|_{\phi=\beta} \propto \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}$$

$$\boxed{\sigma = \boldsymbol{E}(\rho,\phi)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\Big|_{\phi=0} = \boldsymbol{E}(\rho,\phi)\cdot(-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi)\Big|_{\phi=\beta} \propto \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}}$$

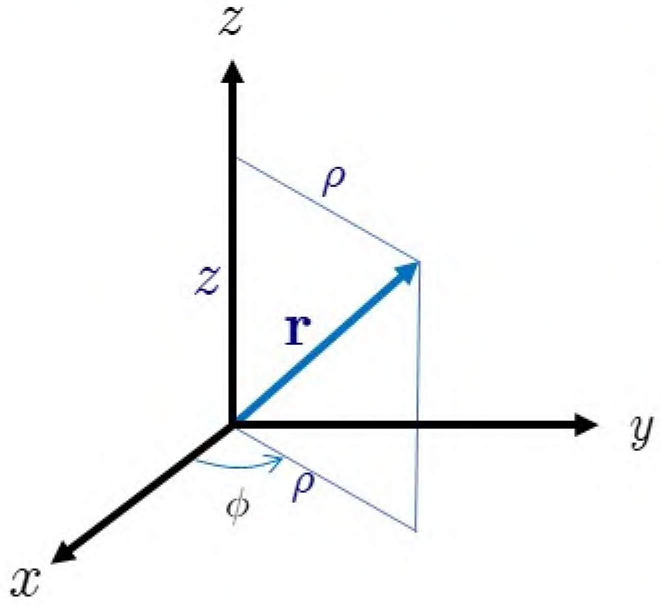
شکل‌های زیر سه حالت مختلف برای زاویه‌ی بین سطوحِ رسانا را نشان می‌دهد



وقتی $\pi > \beta$ باشد (شکل سمتِ چپ) در واقع یک کُنج داریم $\beta < \pi \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\sigma \to 0$

وقتی $\pi = \beta$ باشد (شکل وسط) $\frac{\pi}{\beta} - 1 = 0$ بنابر این $\beta = \pi \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\sigma \to$ **ثابت**

وقتی $\pi > \beta$ باشد (شکل سمت راست) $\frac{\pi}{\beta} - 1 = 0$، در واقع یک لبه‌ی تیز داریم $\beta > \pi \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\sigma \to \infty$



$$\mathbf{r} = (\rho, \phi, z) = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla^2\Phi = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi(\rho,\phi,z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \alpha$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k^2$$

$\alpha = -k^2$ (الف

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = k^2$$

$\alpha = k^2$ (ب

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}=-\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=-k^2$$

$\alpha=-k^2$ الف)

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}-k^2Z(z)=0$$

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+k\rho^2=-\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}=\nu^2$$

$$\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}+\nu^2Q(\phi)=0$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+(k^2\rho^2-\nu^2)R(\rho)=0$$

$$\rho^2\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}+(k^2\rho^2-\nu^2)R(\rho)=0$$

دانشگاه خوارزمی

الف) $\alpha = -k^2$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0$$

$$Z(z) = \begin{cases} Ae^{kz} + Be^{-kz} \text{ or } A\sinh(kz) + B\cosh(kz) & k \neq 0 \\ Az + B & k = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2 Q(\phi) = 0$$

$$Q(\phi) = \begin{cases} Ae^{i\nu\phi} + Be^{-i\nu\phi} \text{ or } A\sin(\nu\phi) + B\cos(\nu\phi) & \nu \neq 0 \\ A\phi + B & \nu = 0 \end{cases}$$

اگر مسئله به گونه‌ای باشد که کل زاویه‌ی سمتی را در بر گیرد، تحت تبدیل $\phi \to \phi + 2\pi$ پاسخ فیزیکی مسئله باید تک‌مقدار باشد. در این صورت ν باید عددی صحیح مانند m باشد.

$$\sin(\nu\phi + 2\pi\nu) = \sin(\nu\phi)$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (k^2\rho^2 - \nu^2) R(\rho) = 0$$

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_{\nu}(k\rho) + BJ_{-\nu}(k\rho) & k \neq 0 \\ A'\rho^{\nu} + B'\rho^{-\nu} & k = 0, \nu \neq 0 \\ A''\ln\rho + B'' & k = 0, \nu = 0 \end{cases}$$

الف) $\alpha = -k^2$

$$\boxed{\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (k^2\rho^2 - \nu^2)R(\rho) = 0}$$

$x = k\rho$

معادله‌ی بسل

$$\boxed{x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right) R = 0}$$

پاسخ‌های این معادله، توابع بسل مرتبه‌ی ν نامیده می‌شوند

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{1}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}=-\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=k^2}$$

$\alpha = k^2$ (ب

$$\boxed{\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+k^2Z(z)=0}$$

$$\boxed{\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)-k^2\rho^2=-\frac{1}{Q(\phi)}\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}=\nu^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}+\nu^2Q(\phi)=0}$$

$$\boxed{\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)-\left(k^2\rho^2+\nu^2\right)R(\rho)=0}$$

$x = k\rho$

$$\boxed{x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-\left(x^2+\nu^2\right)R=0}$$

معادله‌ی بسل تعدیل یافته

دانشگاه خوارزمی

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right)R = 0$$

معادله‌ی بسل

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} - \left(x^2 + \nu^2\right)R = 0$$

معادله‌ی بسل تعدیل یافته

واضح است که اگر در معادله‌ی بسل به جای x قرار بدهیم ix،
معادله‌ی بسل تعدیل یافته به دست می‌آید.

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید