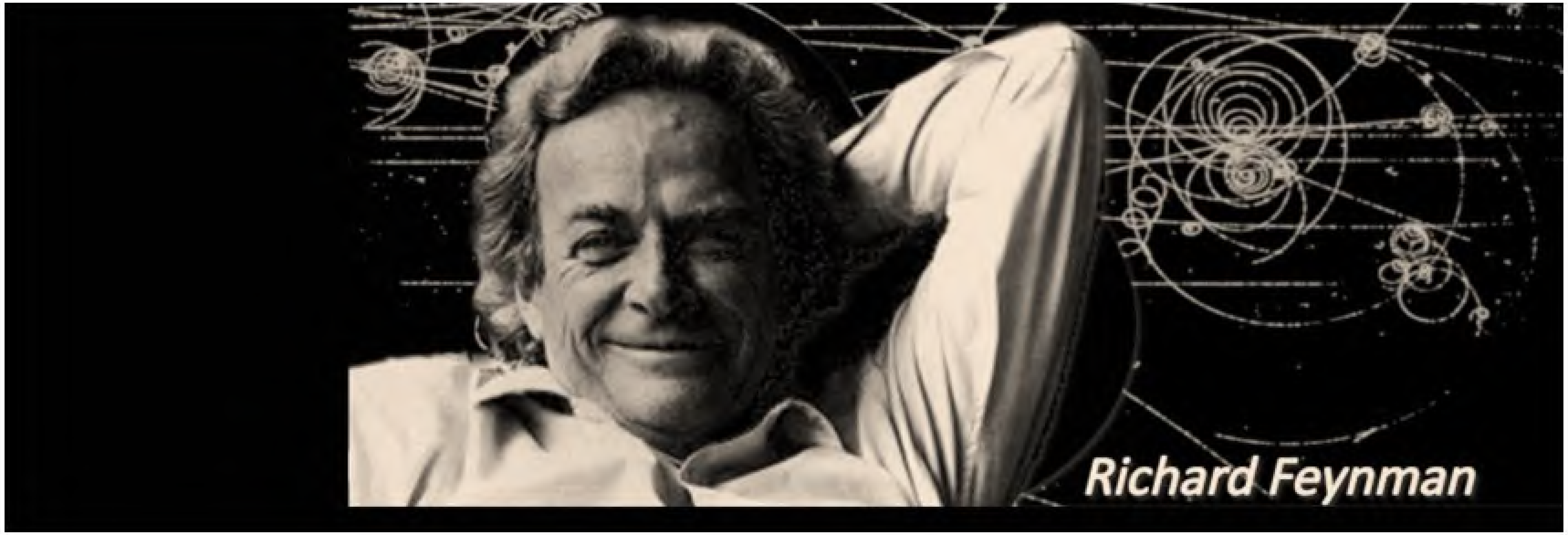
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیستم

تابع بسل- بخش۱

Bessel Function-Part1

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)R=0}$$

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}$$

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha}$$

$$x\frac{dR}{dx}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha}$$

$$x^2R=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha+2}$$

$$\nu^2R=\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}$$

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)R=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha+2}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha}+\sum_{n'=2}^{\infty}a_{n'-2}x^{n'+\alpha}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}=0$$

$$a_0(\alpha)(\alpha-1)x^{\alpha}+a_1(\alpha+1)(\alpha)x^{\alpha+1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha}+a_0(\alpha)x^{\alpha}+a_1(1+\alpha)x^{1+\alpha}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha}+\sum_{n'=2}^{\infty}a_{n'-2}x^{n'+\alpha}-\nu^2a_0x^{\alpha}-\nu^2a_1x^{1+\alpha}-\nu^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}=0$$

دانشگاه خوارزمی

$$a_0(\alpha)(\alpha-1)x^{\alpha} + a_1(\alpha+1)(\alpha)x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha} + a_0(\alpha)x^{\alpha} + a_1(1+\alpha)x^{1+\alpha}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha} + \sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2}x^{n'+\alpha} - \nu^2 a_0 x^{\alpha} - \nu^2 a_1 x^{1+\alpha} - \nu^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

$$\left[(\alpha)(\alpha-1) + (\alpha) - \nu^2\right]a_0 x^{\alpha} + \left[(\alpha+1)(\alpha) + (1+\alpha) - \nu^2\right]a_1 x^{\alpha+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) - \nu^2\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{n+\alpha} = 0$$

دانشگاه خوارزمی

$$\left[(\alpha)(\alpha-1)+(\alpha)-\nu^2\right]a_0=0 \qquad \rightarrow a_0=0 \quad or \quad \alpha=\pm\nu$$

$$\left[(\alpha+1)(\alpha)+a(1+\alpha)-\nu^2\right]a_1=0 \quad \rightarrow a_1=0 \quad or \quad (1+\alpha)=\pm\nu$$

$$\left[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(n+\alpha)-\nu^2\right]a_n+a_{n-2}=0, \qquad n\geq 2$$

$$\boxed{a_n=-\frac{1}{\left[(n+\alpha)^2-\nu^2\right]}a_{n-2}, \qquad n\geq 2}$$

دانشگاه خوارزمی

$$a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\nu$$
$$a_1 = 0$$

الف) $\alpha = +\nu$

$$a_n = -\frac{1}{\left[(n+\nu)^2 - \nu^2\right]} a_{n-2} = -\frac{1}{\left[n(n+2\nu)\right]} a_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

$$a_2 = -\frac{1}{\left[2(2+2\nu)\right]} a_0 = -\frac{1}{2^2(1+\nu)} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{\left[4(4+2\nu)\right]} a_2 = +\frac{1}{2^4(2!)(\nu+1)(\nu+2)} a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{\left[6(6+2\nu)\right]} a_4 = -\frac{1}{2^6(3!)(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} a_0$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} a_0 = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k}(k!)\Gamma(\nu+k+1)} a_0$$

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0$$

دانشگاه خوارزمی

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k}(k!)\Gamma(\nu+k+1)} x^{2k+\nu}$$

با انتخاب a_0 به شکل زیر، سری به دست آمده را تابع بسل نوع اول مرتبه‌ی ν می‌نامیم.

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}(k!)\Gamma(\nu+k+1)} x^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

ب) $\alpha = -\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

$$\boxed{x^2\,\frac{d^2R}{dx^2} + x\,\frac{dR}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right)R = 0}$$

$$\boxed{R(x) = A J_{\nu}(x) + B J_{-\nu}(x)}$$

اگر $\nu = n$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه J_n و J_{-n} مستقل نیستند

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید که اگر $\nu=n$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه J_n و J_{-n} مستقل نیستند $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$

$$\boxed{J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}$$

به ازای n-1 ,... ,k=0,1 تابع گاما در مخرج بی‌نهایت می‌شود و در نتیجه این جملات صفر خواهند شد.

پس می‌توانیم مجموع را از $k=n$ شروع کنیم.

$$\boxed{J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}$$

اما $\boxed{(m+n)!\,\Gamma(m+1)=m!\,\Gamma(n+m+1)}$

$$\boxed{J_{-n}(x)=)(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^n J_n(x)}$$

تابع بسل نوع دوم را به شکل زیر تعریف می‌کنیم. (در برخی از متون با $Y_\nu(x)$ و در برخی متون با $N_\nu(x)$ نمایش داده می‌شود)

$$N_\nu(x)=\begin{cases}\dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} & \nu\neq 0,1,2\cdots\\[2ex] \lim\limits_{\lambda\to m}\dfrac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi-J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi} & \nu=m=0,1,2\cdots\end{cases}$$

با این تعریف در صورتی که ν عددی صحیح باشد N_ν مستقل از J_ν خواهد بود.

J_ν در $x=0$ متناهی ولی N_ν در $x=0$ نامتناهی است.

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\left(f_m + f_{m+n}\right)$$

$$f_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

$$f_0 = 0$$

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(f_m - \ln m\right) = 0.5772157\cdots$$

دانشگاه خوارزمی

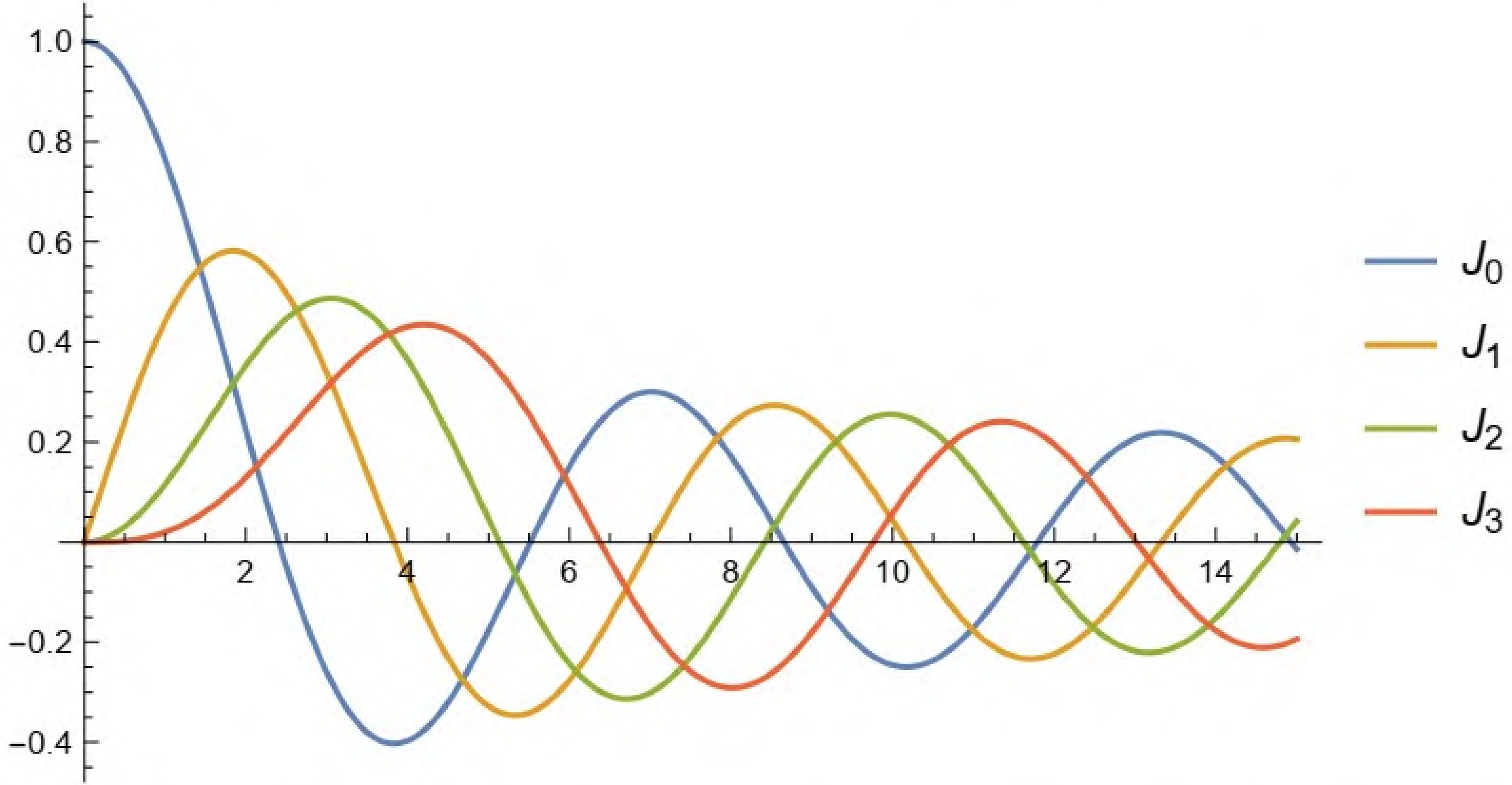
$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + \left(x^2 - \nu^2 \right) R = 0$$

$$R(x) = A J_\nu(x) + B N_\nu(x)$$

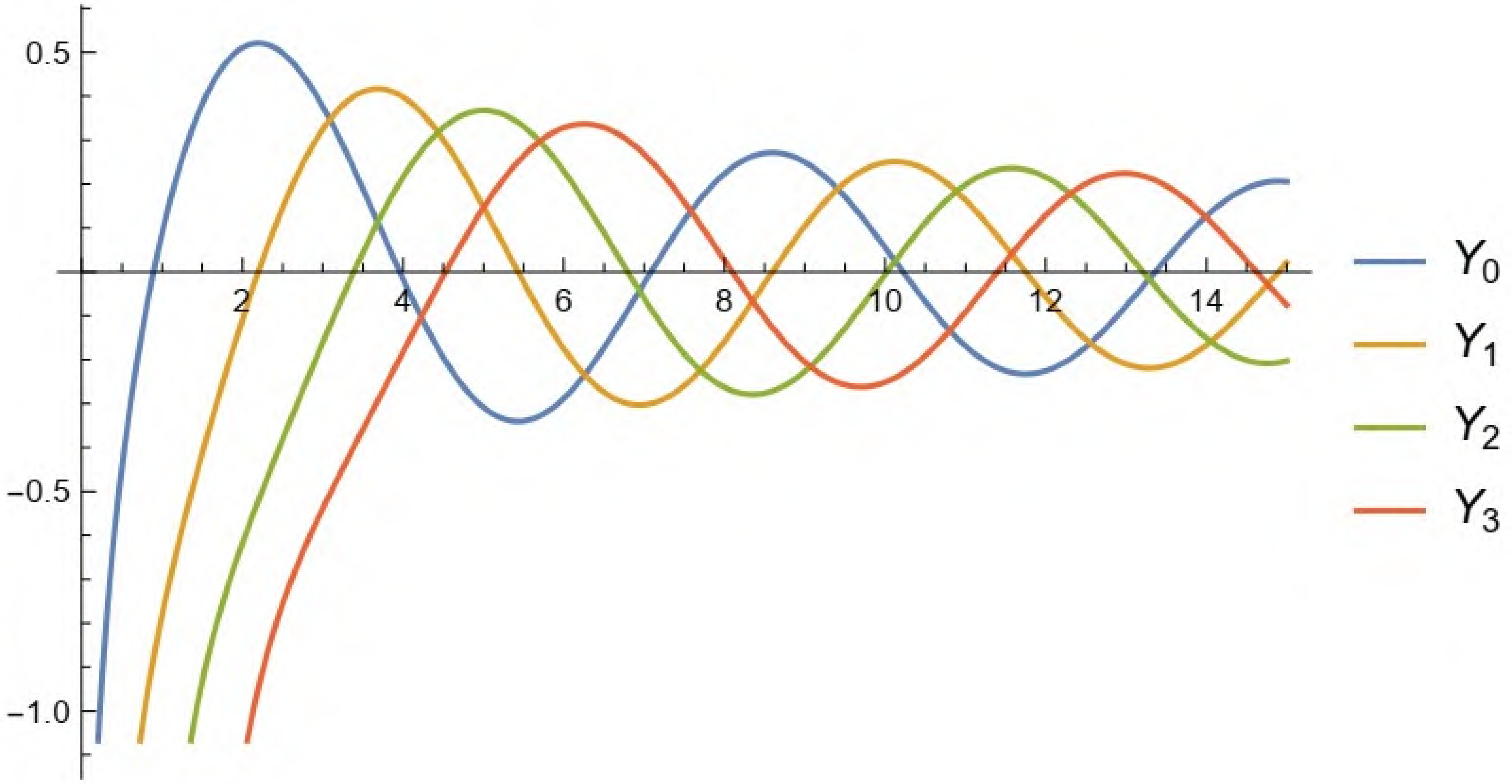
یادمان هست که در جداسازی متغیرها برای حل معادله‌ی لاپلاس بخش شعاعی معادله، به معادله‌ی بسل منجر شد. تغییر متغیری که دادیم $x=k\rho$ نشان می‌دهد که نقاط $x=0$ معرف نقاط روی محور z هستند. بنابر این در مسائلی که شامل محور z است، چون تابع بسل نوع دوم در این نقاط نامتناهی می‌شود، در عبارت فوق باید $B=0$ باشد

دانشگاه خوارزمی

```
Plot[{BesselJ[0, x], BesselJ[1, x], BesselJ[2, x], BesselJ[3, x]},
  {x, 0, 15}, PlotLegends → {"J₀", "J₁", "J₂", "J₃"}]
```



```
Plot[{BesselY[0, x], BesselY[1, x], BesselY[2, x], BesselY[3, x]},
  {x, 0, 15}, PlotLegends → {"Y₀", "Y₁", "Y₂", "Y₃"}]
```



$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\Big[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x) \Big]$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\Big[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x) \Big]$$

معادله‌ی $J_\nu(x) = 0$ دارای تعداد نامتناهی ریشه $x_{\nu n}$ است

	x_{0n}	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	x_{4n}	x_{5n}
$n=1$	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
$n=2$	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
$n=3$	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
$n=4$	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
$n=5$	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

هرچه ریشه‌ها بزرگ‌تر باشند، فاصله‌ی دو ریشه‌ی متوالی به π نزدیک‌تر می‌شود

$$\boxed{x_{\nu n} \approx n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}$$

دانشگاه خوارزمی

In[1]:=
```
x0n = N[BesselJZero[0, Range[5]]]
```
Out[1]=
```
{2.40483, 5.52008, 8.65373, 11.7915, 14.9309}
```

In[2]:=
```
x1n = N[BesselJZero[1, Range[5]]]
```
Out[2]=
```
{3.83171, 7.01559, 10.1735, 13.3237, 16.4706}
```

In[3]:=
```
x2n = N[BesselJZero[2, Range[5]]]
```
Out[3]=
```
{5.13562, 8.41724, 11.6198, 14.796, 17.9598}
```

In[4]:=
```
x3n = N[BesselJZero[3, Range[5]]]
```
Out[4]=
```
{6.38016, 9.76102, 13.0152, 16.2235, 19.4094}
```

دانشگاه خوارزمی

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

$$J'_{\nu+1}(x) = \frac{1}{2}\Big[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\Big]$$

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\Big[x^\nu J_\nu(x)\Big] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\Big[x^{-\nu} J_\nu(x)\Big] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

اثبات این روابط را در فصل چهارم کتاب Special Functions W. W. Bell ببینید

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی