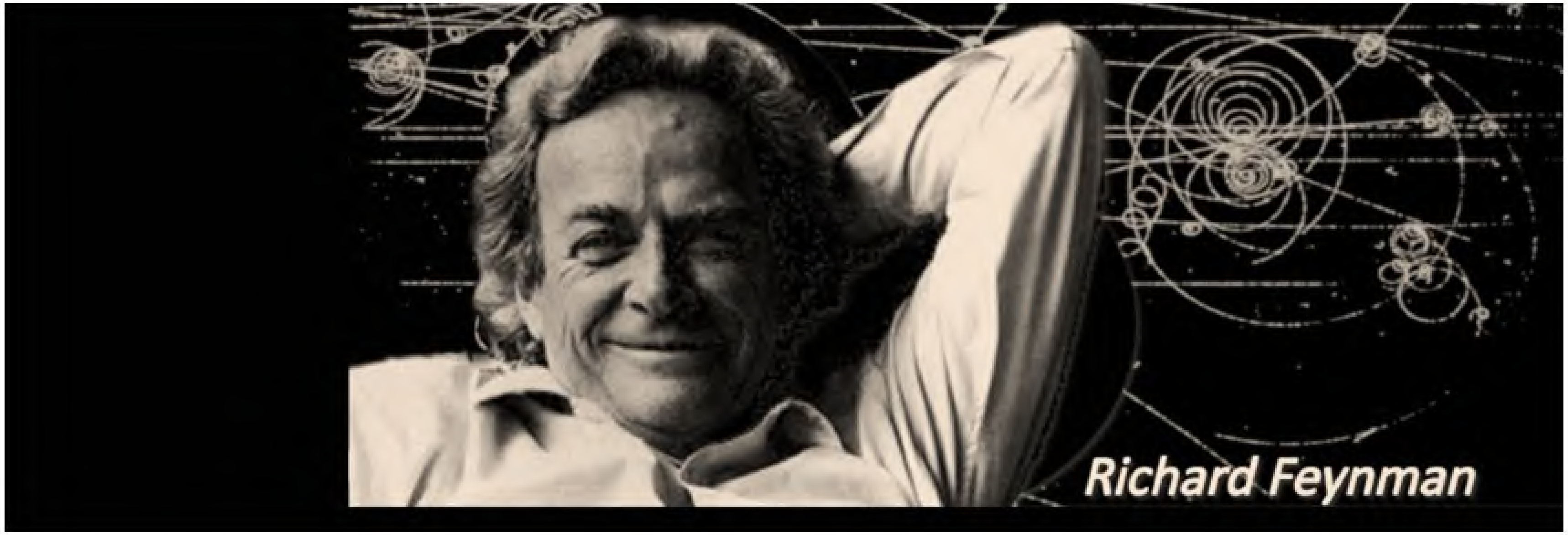
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس بیست و یکم

تابع بسل- بخش۲

Bessel Function-Part2

دانشگاه خوارزمی

$$e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m$$

اثبات:

$$e^{\left(\frac{xt}{2}\right)}e^{-\left(\frac{x}{2t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{n-k}}{n!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+k}$$

$$n-k=m$$

$$e^{\left(\frac{xt}{2}\right)}e^{-\left(\frac{x}{2t}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x)$$

دانشگاه خوارزمی

با استفاده از تابع مولد تابع بسل، نشان دهید

$$\boxed{J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)}$$

حل: از تابع مولد تابع بسل نسبت به t مشتق می‌گیریم

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} mJ_m(x)t^{m-1}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^{m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} mJ_m(x)t^{m-1}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^{m}+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^{m-2}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} mJ_m(x)t^{m-1}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^{m}+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k+2}(x)t^{k}=\sum_{q=-\infty}^{\infty} (q+1)J_{q+1}(x)t^{q}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m + \left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k+2}(x)t^k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (q+1)J_{q+1}(x)t^q$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)J_m(x) + \left(\frac{x}{2}\right)J_{m+2}(x) = (m+1)J_{m+1}(x)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)J_{m-1}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)J_{m+1}(x) = mJ_m(x)$$

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x}J_m(x)$$

دانشگاه خوارزمی

با استفاده از تابع مولد تابع بسل، نشان دهید

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x \sin\phi \right) d\phi$$

حل: در تابع مولد تابع بسل به جای t قرار می‌دهیم $e^{i\phi}$

$$e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m$$

$$t = e^{i\phi}$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right)} = e^{ix\sin\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\phi}$$

$$e^{ix\sin\phi} = J_0(x) + \left[J_1(x)e^{i\phi} + J_{-1}(x)e^{-i\phi} \right] + \left[J_2(x)e^{2i\phi} + J_{-2}(x)e^{-2i\phi} \right] + \cdots$$

$$\cos\left(x\sin\phi \right) = J_0(x) + 2\cos 2\phi J_2(x) + 2\cos 4\phi J_4(x) + \cdots = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} \cos 2k\phi$$

$$\sin\left(x\sin\phi \right) = 2\sin\phi J_1(x) + 2\sin 3\phi J_3(x) + \cdots = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1} \sin(2k-1)\phi$$

$$\cos\left(x\sin\phi\right) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\cos 2k\phi$$

0

$$\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin\phi\right)d\phi = J_0(x)\int_0^{\pi}d\phi + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\int_0^{\pi}\cos 2k\phi\, d\phi$$

$$\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin\phi\right)d\phi = \pi J_0(x)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin\phi\right)d\phi$$

نشان دهید

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(n\phi-x\sin\phi\right)d\phi \qquad n=0,1,2,\cdots$$

حل: در تابع مولد تابع بسل به جای t قرار می‌دهیم $e^{i\phi}$ مطابق آن چه در مثال قبل دیدیم

$$\sin\left(x\sin\phi\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}\cos(2k-1)\phi$$

$$\cos\left(x\sin\phi\right)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}\cos 2k\phi$$

رابطه‌ی اول را در $\cos n\phi$ و رابطه‌ی دوم را در $\sin n\phi$ ضرب می کنیم و انتگرال می گیریم

$$\int_0^{\pi}\cos n\phi\cos\left(x\sin\phi\right)d\phi=\int_0^{\pi}J_0(x)\cos n\phi d\phi+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(x)\int_0^{\pi}\cos 2k\phi\cos n\phi d\phi$$

$$=\pi J_0(x)\delta_{0,n}+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(x)\frac{\pi}{2}\delta_{2k,n}$$

$$\int_0^{\pi}\sin n\phi\sin\left(x\sin\phi\right)d\phi=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(x)\int_0^{\pi}\sin(2k-1)\phi\sin n\phi d\phi=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(x)\frac{\pi}{2}\delta_{2k-1,n}$$

$$\int_0^{\pi} \cos n\phi \cos\left(x \sin\phi\right) d\phi = \pi J_0(x)\delta_{0,n} + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\frac{\pi}{2}\delta_{2k,n}$$

$$\int_0^{\pi} \sin n\phi \sin\left(x \sin\phi\right) d\phi = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\frac{\pi}{2}\delta_{2k-1,n}$$

دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم

$$\int_0^{\pi} \left[\cos n\phi \cos\left(x \sin\phi\right) + \sin n\phi \sin\left(x \sin\phi\right)\right] d\phi = \pi\left[J_0(x)\delta_{0,n} + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\delta_{2k,n} + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\delta_{2k-1,n}\right]$$

$$\int_0^{\pi} \left[\cos\left(n\phi - x\sin\phi\right)\right] d\phi = \pi\sum_{k=0}^{\infty} J_n(x)\delta_{k,n} = \pi J_n(x)$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\cos\left(n\phi - x\sin\phi\right)\right] d\phi$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi - in\phi}d\phi$$

حل: در تابع مولد تابع بسل به جای t قرار می‌دهیم $ie^{i\phi}$

$$e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m$$

$$t = ie^{i\phi}$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(ie^{i\phi}+ie^{-i\phi}\right)} = e^{ix\cos\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)(i)^m e^{im\phi}$$

این رابطه در $e^{-in\phi}$ و انتگرال می گیریم

$$\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi}e^{-in\phi}d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)(i)^m \int_0^{2\pi} e^{im\phi}e^{-in\phi}d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)(i)^m 2\pi\delta_{mn} = 2\pi i^n J_n(x)$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi - in\phi}d\phi$$

$x \to \infty$

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left[x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$N_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left[x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$x \to 0$

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$N_\nu(x) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0.5772\ldots\right] & \nu = 0 \\ -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases}$$

نشان دهید توابع بسل در رابطه‌ی تعامدی زیر صدق می‌کنند.

$$\boxed{\int_0^b \rho J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right) J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) d\rho = \frac{b^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_{\nu,n}b)\delta_{m,n} = \frac{b^2}{2} J_\nu'^2(k_{\nu,n}b)\delta_{m,n}}$$

که در آن $x_{\nu,n}=k_{\nu,n}b$ ریشه‌ی n ام تابع بسل مرتبه‌ی ν است.

حل: توابع $J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)$ و $J_\nu(k_{\nu,m}\rho)$ پاسخ‌های معادله‌ی بسل هستند:

$$\rho^2\frac{d^2J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho^2}+\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}+\left(k_{\nu,m}^2\rho^2-\nu^2\right)J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)=0$$

$$\rho^2\frac{d^2J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho^2}+\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}+\left(k_{\nu,n}^2\rho^2-\nu^2\right)J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)=0$$

که می‌توان آن‌ها را به شکل زیر نیز نوشت

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}\right]+\left(k_{\nu,m}^2\rho^2-\nu^2\right)J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)=0$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]+\left(k_{\nu,n}^2\rho^2-\nu^2\right)J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)=0$$

معادله‌ی اول را در $J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)/\rho$ و معادله‌ی دوم را در $J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)/\rho$ ضرب می کنیم و تفاضل‌شان را حساب می کنیم

دانشگاه خوارزمی

$$J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}\right]-J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]+\left(k_{\nu,m}^2-k_{\nu,n}^2\right)\rho J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)=0$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}\right]-\frac{d}{d\rho}\left[J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]+\left(k_{\nu,m}^2-k_{\nu,n}^2\right)\rho J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)=0$$

از این رابطه انتگرال می گیریم

$$\left[J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}\right]_0^b-\left[J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)\rho\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]_0^b+\left(k_{\nu,m}^2-k_{\nu,n}^2\right)\int_0^b\rho J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)d\rho=0$$

$$\underbrace{J_\nu\left(k_{\nu,n}b\right)}_{0}b\left.\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=b}-\underbrace{J_\nu\left(k_{\nu,m}b\right)}_{0}b\left.\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=b}+\left(k_{\nu,m}^2-k_{\nu,n}^2\right)\int_0^b\rho J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)d\rho=0$$

$$\left(k_{\nu,m}^2 - k_{\nu,n}^2\right)\int_0^b \rho J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right) d\rho = 0$$

بنابر این

$$if \quad n \neq m \quad \Rightarrow \quad \int_0^b \rho J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right) d\rho = 0$$

پس آن‌چه باقی مانده این است که نشان دهیم

$$\int_0^b \rho\left[J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)\right]^2 d\rho = \frac{b^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_{\nu,n} b)$$

یک‌بار دیگر معادله‌ی بسل را می‌نویسیم

$$\boxed{\rho^2 \frac{d^2 J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho^2} + \rho \frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho} + \left(k_{\nu,n}^2\rho^2 - \nu^2\right) J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) = 0}$$

$$\boxed{2\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\rho^2 \frac{d^2 J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho^2} + 2\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\rho \frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho} + 2\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\left(k_{\nu,n}^2\rho^2 - \nu^2\right) J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) = 0}$$

$$\boxed{\frac{d}{d\rho}\left\{\rho^2\left[\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]^2 - \nu^2 J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) + k_{\nu,n}^2\rho^2 J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)\right\} - 2k_{\nu,n}^2\rho J_\nu^2\left(k_{\nu,n}\rho\right) = 0}$$

از این معادله انتگرال می‌گیریم

$$\left\{\rho^2\left[\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]^2 - \nu^2 J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right) + k_{\nu,n}^2\rho^2 J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)\right\}_0^b - 2k_{\nu,n}^2\int_0^b \rho J_\nu^2\left(k_{\nu,n}\rho\right) d\rho = 0$$

دانشگاه خوارزمی

$$b^2\left\{\left[\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]^2\right\}_{\rho=b}-2k_{\nu,n}^2\int_0^b\rho J_\nu^2\left(k_{\nu,n}\rho\right)d\rho=0$$

$$\int_0^b\rho J_\nu^2\left(k_{\nu,n}\rho\right)d\rho=\frac{b^2}{2k_{\nu,n}^2}\left\{\left[\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]^2\right\}_{\rho=b}$$

اما طبق رابطه بازگشتی می‌دانیم

$$\frac{dJ_\nu(x)}{dx}=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$$

$$\left\{\left[\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\rho}\right]^2\right\}_{\rho=b}=k_{\nu,n}^2\left\{\left[\frac{dJ_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)}{d\left(k_{\nu,n}\rho\right)}\right]^2\right\}_{\rho=b}=k_{\nu,n}^2\left[\frac{\nu}{k_{\nu,n}b}\underbrace{J_\nu\left(k_{\nu,n}b\right)}_{0}-J_{\nu+1}\left(k_{\nu,n}b\right)\right]^2$$

بنابراین

$$\int_0^b \rho J_\nu^2\left(k_{\nu,n}\rho\right)d\rho = \frac{b^2}{2}\Big[J_{\nu+1}\left(k_{\nu,n}b\right)\Big]^2$$

بدین ترتیب دیده می‌شود که رابطه‌ی تعامد به شکل زیر برای توابع بسل برقرار است

$$\int_0^b \rho J_\nu\left(k_{\nu,m}\rho\right)J_\nu\left(k_{\nu,n}\rho\right)d\rho = \frac{b^2}{2}J_{\nu+1}^2(k_{\nu,n}b)\delta_{m,n} = \frac{b^2}{2}J_\nu'^2(k_{\nu,n}b)\delta_{m,n}$$

توجه کنید که

$$J_\nu'^2(k_{\nu,n}b) = \left\{\frac{1}{k_{\nu,n}}\left[\frac{dJ_\nu(k_{\nu,n}\rho)}{d\rho}\right]_{\rho=b}\right\}^2$$

همچنین رابطه‌ی بستاری زیر نیز برقرار است:

$$\int_0^{\infty} \rho J_{\nu}(k\rho) J_{\nu}(k'\rho) d\rho = \frac{1}{k}\delta(k-k')$$

دانشگاه خوارزمی

سری فوریه - بسل:

توابعی را که در بازه‌ی $0 \leq \rho \leq b$ تکه‌ای پیوسته باشند می توان برحسب توابع بسل به شکل زیر نوشت:

$$\boxed{f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu\left(x_{\nu n}\,\frac{\rho}{b}\right)}$$

$$\boxed{A_n = \frac{\int_0^b \rho f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu n}\,\frac{\rho}{b}\right) d\rho}{\int_0^b \rho J_\nu^2\left(x_{\nu n}\,\frac{\rho}{b}\right) d\rho} = \frac{2}{b^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})}\int_0^b \rho f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu n}\,\frac{\rho}{b}\right) d\rho}$$

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) - \left(k^2\rho^2 + \nu^2\right)R(\rho) = 0$$

$$x = k\rho$$

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} - \left(x^2 + \nu^2\right)R = 0$$

یادآوری: معادله‌ی بسل

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right)R = 0$$

با تبدیل $x \rightarrow ix$ معادله‌ی بسل به بسل اصلاح شده تبدیل می‌شود

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

پاسخ‌های معادله‌ی بسل اصلاح شده

$$I_\nu(0) = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ 0 & \nu \neq 0 \end{cases} \qquad K_\nu(0) \rightarrow \infty$$

دانشگاه خوارزمی

اگر معادله‌ی هلمهولتز را در دستگاه مختصات کروی به روش جداسازی متغیرها حل کنیم، بخش شعاعی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\Psi = \Psi(r,\theta,\phi)$$

$$\nabla^2\Psi(r,\theta,\phi) + k^2\Psi(r,\theta,\phi) = 0$$

$$\nabla_r^2\Psi(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2\Psi(r,\theta,\phi) + k^2\Psi(r,\theta,\phi) = 0$$

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

$$Y(\theta,\phi)\nabla_r^2 R(r) + \frac{R(r)}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2 Y(\theta,\phi) + k^2 R(r)Y(\theta,\phi) = 0$$

$$r^2\frac{\nabla_r^2 R(r)}{R(r)} + k^2r^2 = -\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\nabla_{\theta\phi}^2 Y(\theta,\phi) = l(l+1)$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right) + \left[k^2r^2 - l(l+1)\right]R(r) = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR(r)}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(r)=\frac{U(r)}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(k^2-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right)U(r)=0$$

$$U(r)=J_{l+\frac{1}{2}}(kr);\quad N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

$$R(r)=A\,\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}+B\,\frac{N_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}$$

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$ نشان دهید

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1!\,\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2!\,\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{7}{2}} - \cdots$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1!\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2!\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{7}{2}} - \cdots$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right] = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

توابع هنکل کروی مشابه با توابع هنکل به شکل زیر تعریف می شوند

$$\boxed{\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &= j_l(x) + i n_l(x) \\ h_l^{(2)}(x) &= j_l(x) - i n_l(x) \end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{d}{dx}\Big(x^{n+1}j_n(x)\Big) = x^{n+1}j_{n-1}(x)$$

$$j_{n+1}(x) + j_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x}j_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}\Big(x^{-n}j_n(x)\Big) = -x^{-n}j_{n+1}(x)$$

$$j_n'(x) = j_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x}j_n(x)$$

همین روابط برای n_l و h_l نیز برقرار است

$$j_n'(x) = \frac{n}{x}j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

$$(2n+1)j_n'(x) = nj_{n-1}(x) - (n+1)j_{n+1}(x)$$

$$j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$n_l(x) = -(-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$h_l^{(1)}(x) = -i(-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{e^{ix}}{x}\right)$$

$$h_l^{(2)}(x) = i(-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{e^{-ix}}{x}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید