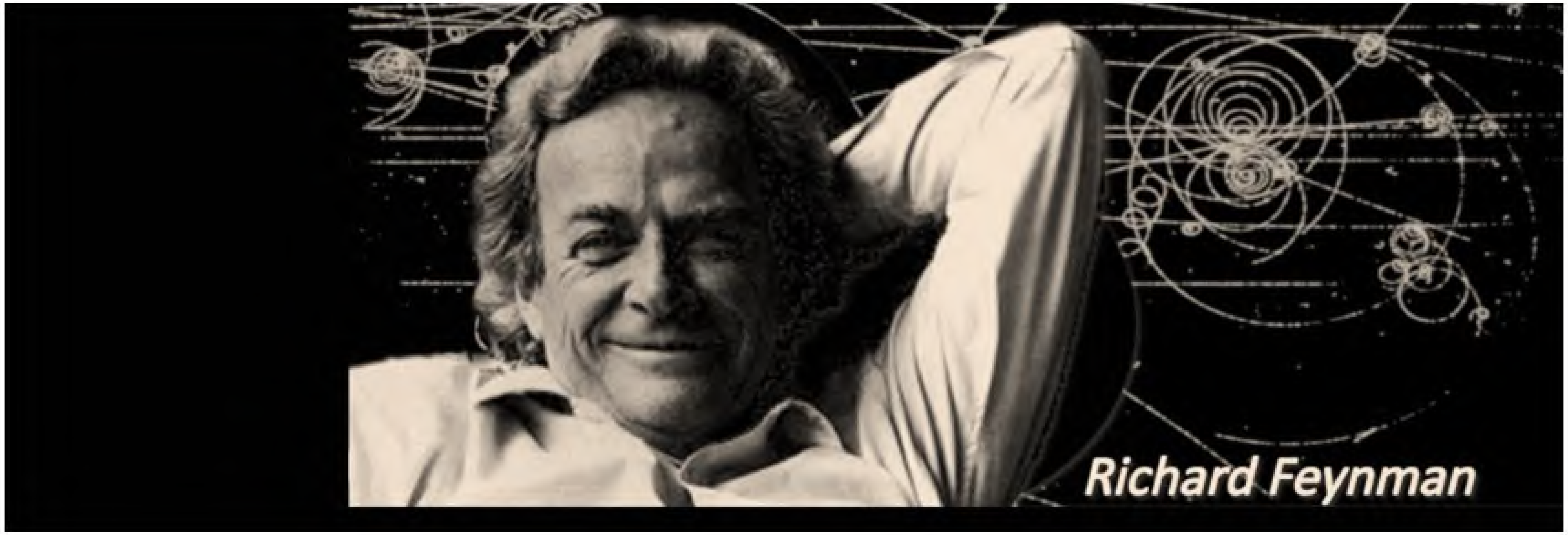
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

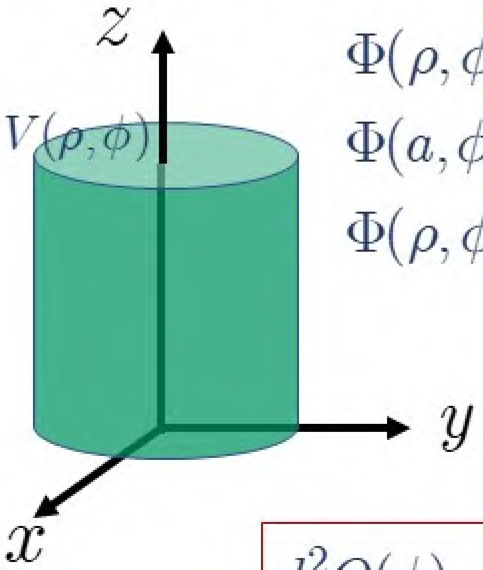
درس بیست و دوم

مسائل حل شده- دستگاه مختصات استوانه‌ای

Solved Problems-Cylindrical Coordinates

دانشگاه خوارزمی

۱ - استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع L هم محور با محور z در نظر بگیرید. یک قاعده‌ی آن در $z=0$ و قاعده‌ی دیگر در $z=L$ قرار دارد. اگر پتانسیل بر روی سطح این استوانه با معادلات زیر مشخص شوند، پتانسیل الکتریکی را درون استوانه پیدا کنید.



$$\Phi(\rho,\phi,0) = 0$$
$$\Phi(a,\phi,z) = 0$$
$$\Phi(\rho,\phi,L) = V(\rho,\phi)$$

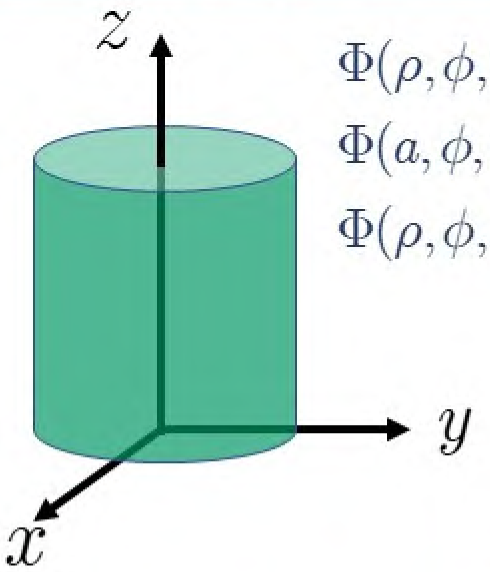
حل: مسئله را با جداسازی متغیرها حل می‌کنیم.

$$\boxed{\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0} \longrightarrow \boxed{Z(z) = \sinh kz}$$

$$\boxed{\frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2 Q(\phi) = 0} \longrightarrow \boxed{Q(\phi) = \sin m\phi\,; \quad \cos m\phi} \quad \boxed{\nu = m = \text{integer}}$$

$$\boxed{\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \left(k^2\rho^2 - \nu^2\right)R(\rho) = 0} \longrightarrow \boxed{R(\rho) = J_m(k\rho)\,; \quad \cancel{N_m(k\rho)}} \quad \boxed{N_m(0) = \infty}$$

$$\boxed{R(a) = J_m(ka) = 0 \Rightarrow ka = x_{mn}} \quad \boxed{k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}}$$



$$\Phi(\rho,\phi,0)=0$$
$$\Phi(a,\phi,z)=0$$
$$\Phi(\rho,\phi,L)=V(\rho,\phi)$$

ادامه‌ی حل مثال ۱:

$$\Phi(\rho,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}\rho)\sinh k_{mn}z\left[A_{mn}\sin m\phi+B_{mn}\cos m\phi\right]$$

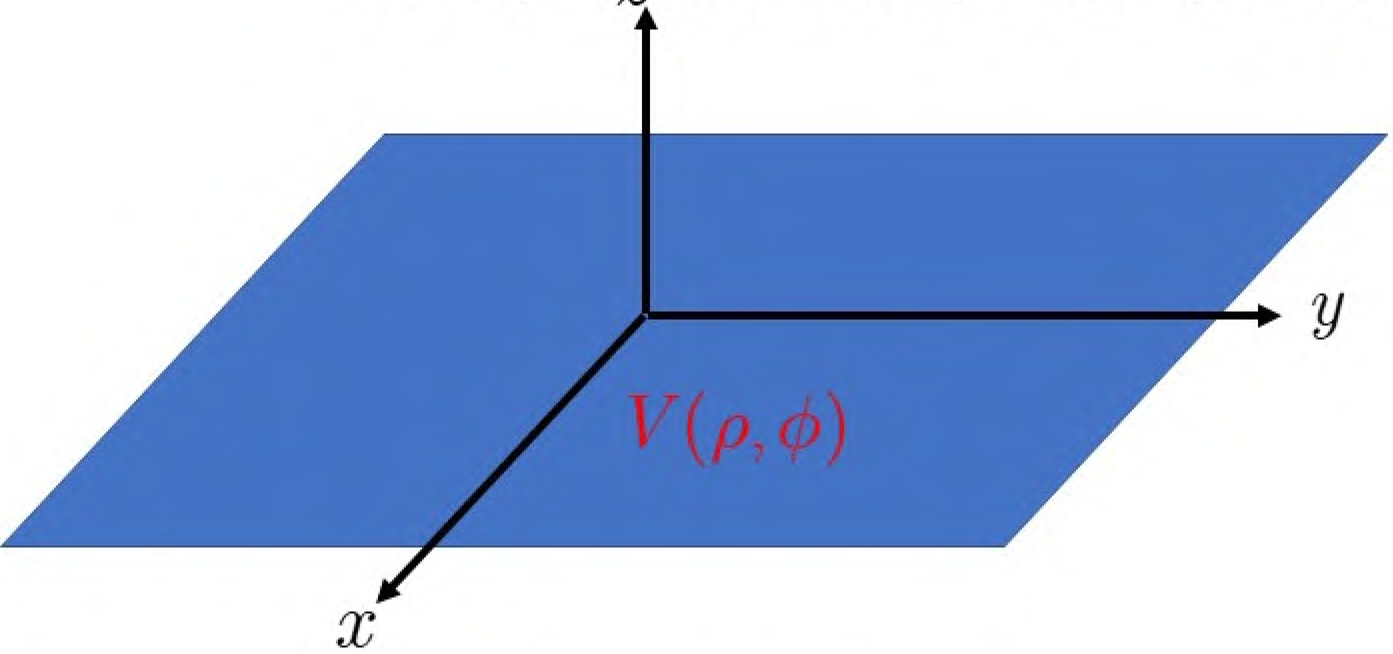
$$\Phi(\rho,\phi,L)=V(\rho,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}\rho)\sinh k_{mn}L\left[A_{mn}\sin m\phi+B_{mn}\cos m\phi\right]$$

$$A_{mn}=\frac{2}{\pi a^2\sinh k_{mn}L J_{m+1}^2(k_{mn}a)}\int_0^a\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\phi V(\rho,\phi)J_m(k_{mn}\rho)\sin m\phi$$

$$B_{mn}=\frac{2}{\pi a^2\sinh k_{mn}L J_{m+1}^2(k_{mn}a)}\int_0^a\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\phi V(\rho,\phi)J_m(k_{mn}\rho)\cos m\phi$$

$$B_{0n}=\frac{1}{\pi a^2\sinh k_{0n}L J_1^2(k_{0n}a)}\int_0^a\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\phi V(\rho,\phi)J_0(k_{0n}\rho)$$

۲- صفحه‌ی xy در پتانسیل $V(\rho,\phi)$ قرار دارد و مرز دیگری نداریم. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی را در فضا برای $z>0$ پیدا کنیم.



حل: می‌توان گفت که این مسئله همان مسئله‌ی قبل است که شعاع استوانه و ارتفاع آن بی‌نهایت است و البته قاعده‌ی پایین استوانه، که در این حالت همان صفحه‌ی xy می‌شود، در پتانسیل $V(\rho,\phi)$ قرار دارد. (و قاعده‌ی بالایی هم در این حالت در بی‌نهایت است که پتانسیل آن صفر است)

در شرایط داده شده در این مسئله به راحتی دیده می‌شود که $Z(z)=c^{-kz}$ و همچنین باید توجه کنیم **که قیدی روی k وجود ندارد**. بنابر این k مقادیر پیوسته‌ای می‌تواند داشته باشد

$$\Phi(\rho,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dk J_m(k\rho)e^{-kz}\left[A_m \sin m\phi + B_m \cos m\phi\right]$$

$$\Phi(\rho,\phi,0) = V(\rho,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dk J_m(k\rho)\left[A_m \sin m\phi + B_m \cos m\phi\right]$$

برای پیدا کردن ضرائب از رابطه‌ی بستاری زیر (تبدیل هنکل) استفاده می کنیم:

$$\int_0^{\infty} \rho J_m(k\rho) J_m(k'\rho) d\rho = \frac{1}{k}\delta(k-k')$$

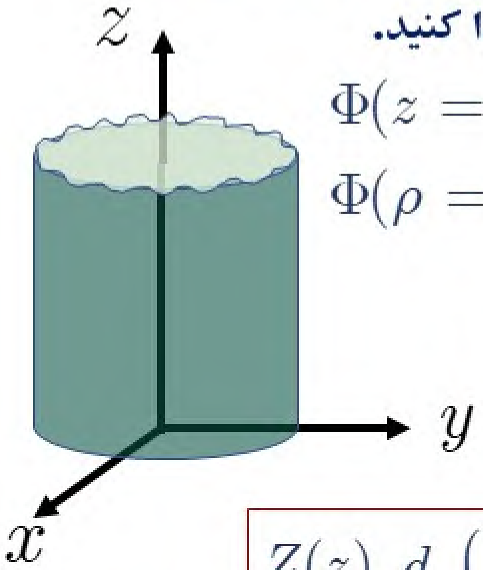
$$A_m = \frac{k}{\pi}\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi} d\phi V(\rho,\phi) J_m(k\rho)\sin m\phi$$

$$B_m = \frac{k}{\pi}\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi} d\phi V(\rho,\phi) J_m(k\rho)\cos m\phi$$

$$B_0 = \frac{k}{2\pi}\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi} d\phi V(\rho,\phi) J_m(k\rho)$$

دانشگاه خوارزمی

۳- استوانه‌ی بسیار درازی با معادله‌ی $\rho = a$ و $0 \le z < \infty$ هم محور با محور z در نظر بگیرید. یک قاعده‌ی آن در $z=0$ و قاعده‌ی دیگر در $z=L$ قرار دارد. اگر پتانسیل بر روی سطح این استوانه با معادلات زیر مشخص شوند، پتانسیل الکتریکی را درون استوانه پیدا کنید.



$$\Phi(z=0) = V_0$$
$$\Phi(\rho=a) = 0$$

حل: مسئله را با جداسازی متغیرها حل می‌کنیم. قبل از هر چیز توجه می‌کنیم که پتانسیل مستقل از زاویه‌ی سمتی است

$$\nabla^2\Phi(\rho,z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$$

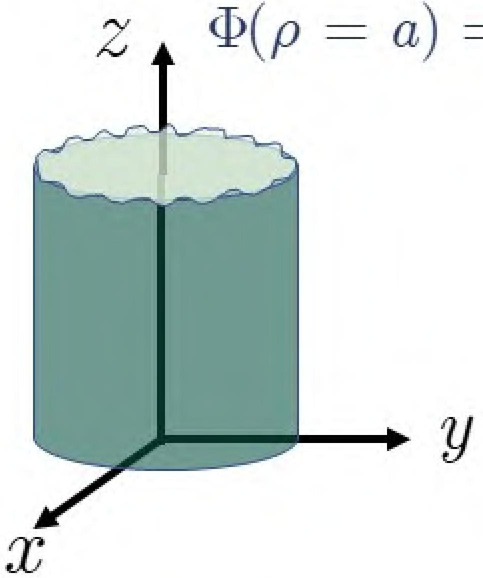
$$\frac{Z(z)}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + R(\rho)\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k^2$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z) = 0 \longrightarrow Z(z) = \cancel{e^{kz}}\ ; \quad e^{-kz}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + k^2\rho^2R(\rho) = 0$$

$$\Phi(z=0)=V_0$$
$$\Phi(\rho=a)=0$$



$$\boxed{\frac{d^2Z(z)}{dz^2}-k^2Z(z)=0} \longrightarrow \boxed{Z(z)=\cancel{c^{kz}}\ ;\quad c^{-kz}}$$

$$\boxed{\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+k^2\rho^2R(\rho)=0} \longrightarrow \boxed{R(\rho)=J_0(k\rho);\quad \cancel{N_0}(k\rho)}$$

$$\boxed{\Phi(\rho=a)=0\Rightarrow R(a)=J_0(ka)=0\Rightarrow ka=x_{0n}}$$

$$\boxed{k_n=\frac{x_{0n}}{a}}$$

$$\boxed{\Phi(\rho,0)=V_0\Rightarrow V_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(k_n\rho)}$$

$$\boxed{\Phi(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(k_n\rho)c^{-k_nz}}$$

بررسی جزئیات حل با شما! $\longrightarrow \boxed{A_n=\dfrac{2V_0}{k_naJ_1(x_{0n})}}$

$$\boxed{\Phi(\rho,z)=2V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(x_{0n}\frac{\rho}{a})c^{-x_{0n}\frac{z}{a}}}{x_{0n}J_1(x_{0n})}}$$

شاد و مهربان باشید