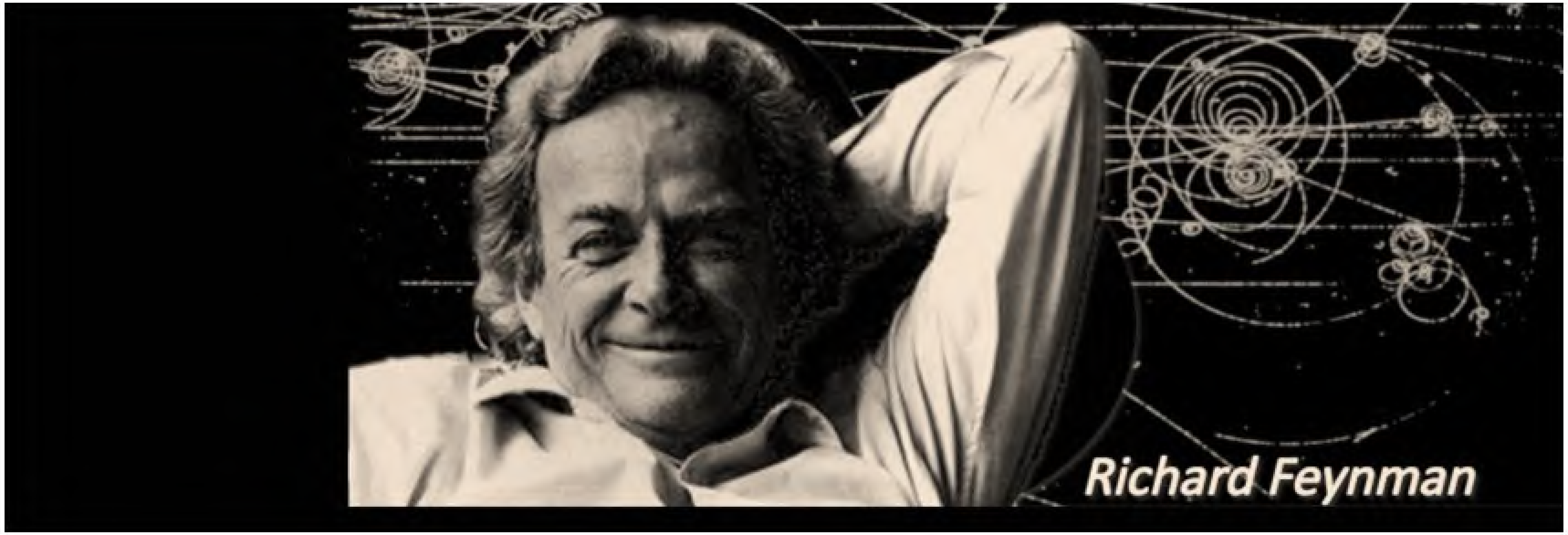
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و سوم

معادله‌ی لاپلاس در دستگاه مختصات کروی

Laplace Equation in Spherical Coordinates

عملگر لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\nabla^2\Phi(r,\theta,\phi)=\nabla_r^2\Phi(r,\theta,\phi)+\frac{1}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2\Phi(r,\theta,\phi)=\nabla_r^2\Phi(r,\theta,\phi)+\frac{1}{r^2}\nabla_\theta^2\Phi(r,\theta,\phi)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\nabla_\phi^2\Phi(r,\theta,\phi)$$

$$\nabla_r^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\nabla_{\theta\phi}^2=\nabla_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\nabla_\phi^2$$

$$\nabla_\theta^2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla_\phi^2=\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

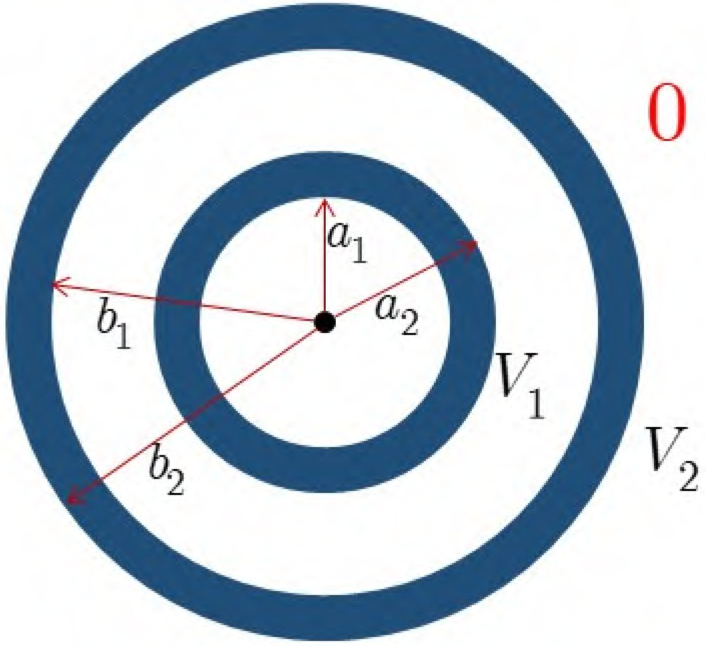
$$\nabla^2\Phi(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi^2}$$

فرض کنید پتانسیل فقط تابع r باشد $\Phi = \Phi(r)$

$$\nabla^2\Phi(r) = \nabla_r^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

$$r^2\frac{d\Phi}{dr} = a \qquad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{a}{r^2} \qquad \Phi = -\frac{a}{r} + b$$

$$\boxed{\Phi = \frac{A}{r} + B}$$



$0 \le r \le a_1$

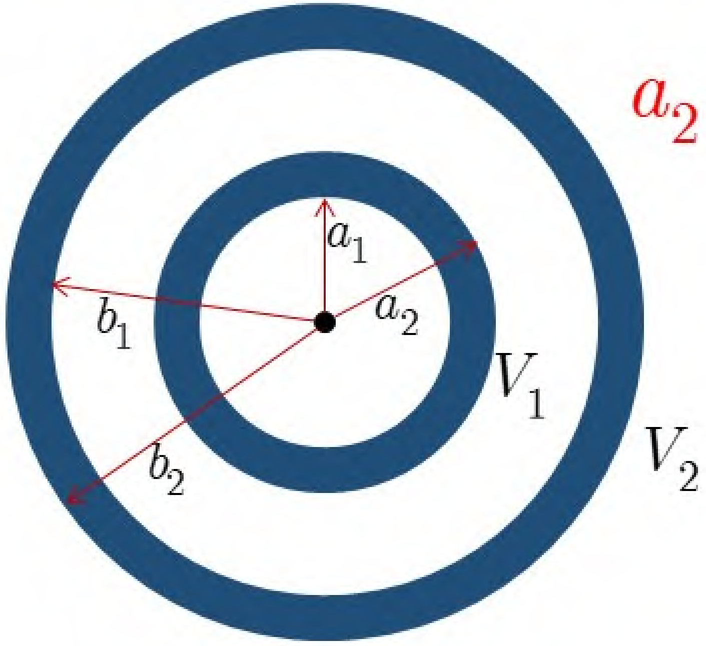
$$\nabla^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = \frac{A_1}{r} + B_1$$

$$\Phi(0) \neq \infty \Rightarrow A_1 = 0$$
$$\Phi(a_1) = V_1 \Rightarrow B_1 = V_1$$

$$\Phi = V_1 \qquad 0 \le r \le a_1$$

$a_1 \le r \le a_2$

$$\Phi = V_1 \qquad a_1 \le r \le a_2$$



$a_2 \le r \le b_1$

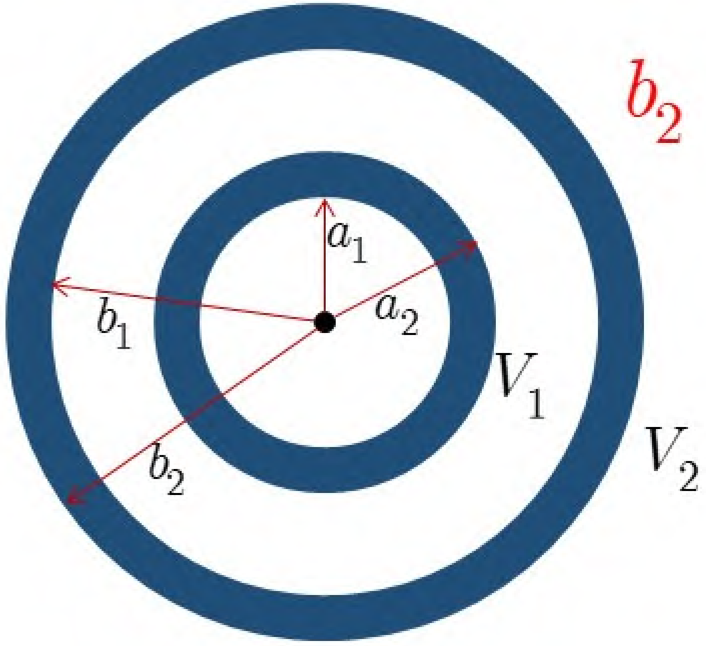
$$\nabla^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = \frac{A_2}{r} + B_2$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi(a_2) = V_1 = \frac{A_2}{a_2} + B_2\\ \Phi(b_1) = V_2 = \frac{A_2}{b_1} + B_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}A_2 &= -(V_2 - V_1)\frac{a_2 b_1}{b_1 - a_2}\\ B_2 &= \frac{b_1 V_2 - a_2 V_1}{b_1 - a_2}\end{aligned}\right.$$

$$\Phi(r) = -\frac{(V_2 - V_1)a_2 b_1}{b_1 - a_2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{b_1 V_2 - a_2 V_1}{b_1 - a_2}, \qquad a_2 \le r \le b_1$$

$b_1 \le r \le b_2$

$$\Phi = V_2 \qquad b_1 \le r \le b_2$$

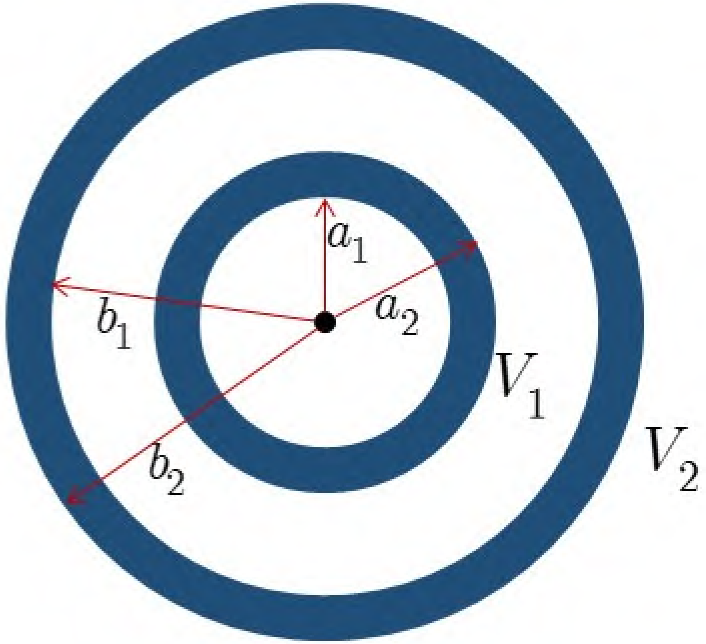


$$b_2 \le r < \infty$$

$$\nabla^2\Phi(r) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = \frac{A_3}{r} + B_3$$

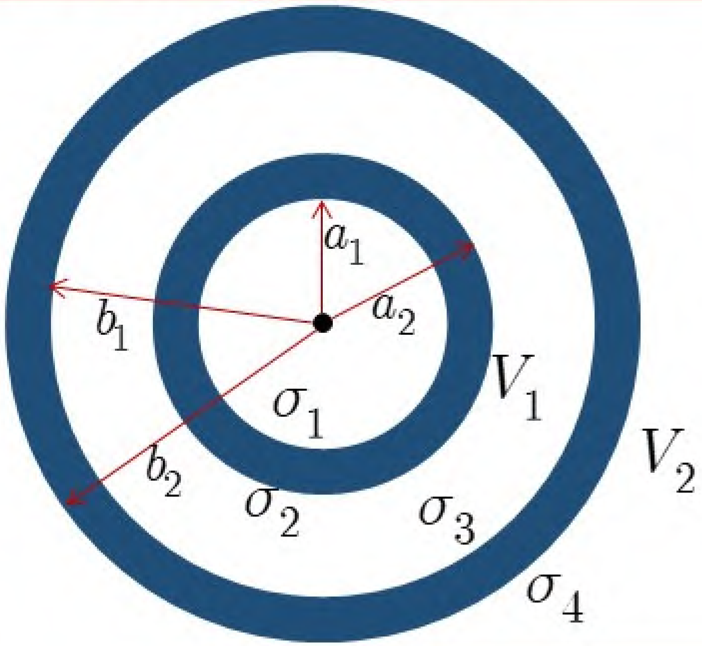
$$\left.\begin{array}{l}\Phi(b_2) = V_2 \\ \Phi(\infty) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}A_3 = V_2 b_2 \\ B_3 = 0\end{array}\right.$$

$$\Phi(r) = \frac{V_2 b_2}{r}, \qquad b_2 \le r < \infty$$



$$\Phi(r)=\begin{cases} V_1 & 0\le r\le a_1 \\ V_1 & a_1\le r\le a_2 \\ -\dfrac{(V_2-V_1)a_2b_1}{b_1-a_2}\dfrac{1}{r}+\dfrac{b_1V_2-a_2V_1}{b_1-a_2} & a_2\le r\le b_1 \\ V_2 & b_1\le r\le b_2 \\ \dfrac{V_2b_2}{r} & b_2\le r<\infty \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(r)=-\nabla\Phi(r)=\begin{cases} 0 & 0<r<a_1 \\ 0 & a_1<r<a_2 \\ -\dfrac{(V_2-V_1)a_2b_1}{b_1-a_2}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & a_2<r<b_1 \\ 0 & b_1<r<b_2 \\ \dfrac{V_2b_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & b_2<r<\infty \end{cases}$$



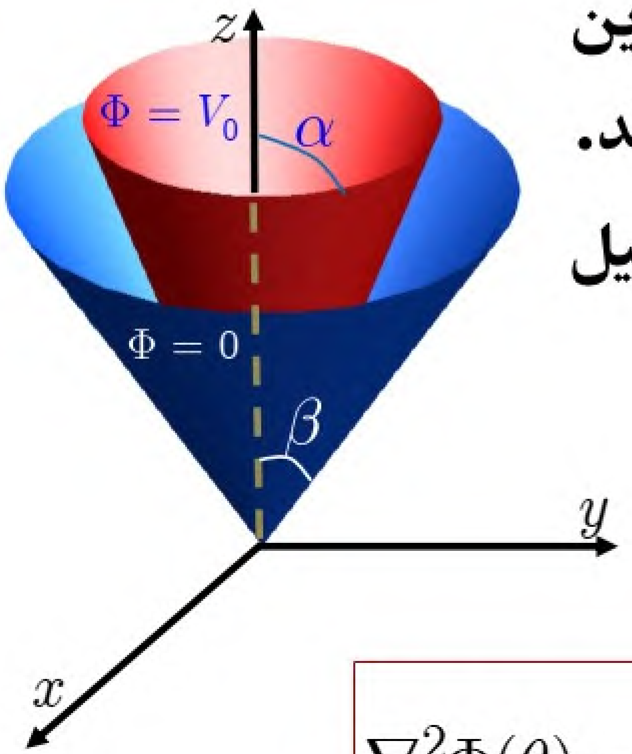
$$\mathbf{E}(r) = -\nabla\Phi(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a_1 \\ 0 & a_1 < r < a_2 \\ -\dfrac{(V_2 - V_1)a_2 b_1}{b_1 - a_2}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & a_2 < r < b_1 \\ 0 & b_1 < r < b_2 \\ \dfrac{V_2 b_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & b_2 < r < \infty \end{cases}$$

چگالی بار بر روی سطح داخلی کره ی کوچک‌تر $\sigma_1 = 0$

چگالی بار بر روی سطح خارجی کره ی کوچک‌تر $\sigma_2 = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Big|_{a_2} = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}\Big|_{a_2} = -\epsilon_0 \dfrac{(V_2 - V_1)}{b_1 - a_2}\dfrac{b_1}{a_2}$

چگالی بار بر روی سطح داخلی کره ی بزرگ‌تر $\sigma_3 = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Big|_{b_1} = \epsilon_0 \vec{E}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})\Big|_{b_1} = \epsilon_0 \dfrac{(V_2 - V_1)}{b_1 - a_2}\dfrac{a_2}{b_1}$

چگالی بار بر روی سطح خارجی کره ی بزرگ‌تر $\sigma_4 = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Big|_{b_2} = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}\Big|_{b_2} = \epsilon_0 \dfrac{V_2}{b_2}$



دو مخروط هم‌محور با زوایای رأس α و β ($\beta>\alpha$)، در نظر بگیرد. رئوس این مخروط‌ها منطبق بر مبدأ مختصات‌اند و نسبت به هم عایق‌بندی شده‌اند. مخروط α در پتانسیل V_0 و مخروط β در پتانسیل صفر قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در فضای بین دو مخروط پیدا کنید.

حل:

در این مسئله، پتانسیل الکتریکی (در دستگاه مختصات کروی) فقط به زاویه‌ی قطبی θ بستگی دارد

$$\nabla^2\Phi(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}\right) = 0 \Rightarrow \sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta} = c_1 \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{c_1}{\sin\theta} \Rightarrow \Phi = c_1\int \frac{d\theta}{\sin\theta} + c_2$$

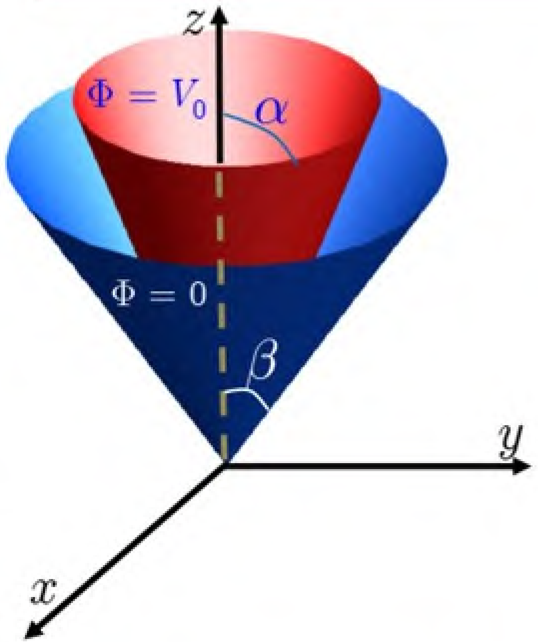
دانشگاه خوارزمی

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \int \frac{d\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$u = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\tfrac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$



$$\Phi(\theta=\alpha) = V_0$$
$$\Phi(\theta=\beta) = 0$$

$$\Phi(\theta) = c_1 \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + c_2$$

$$c_1 \ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) + c_2 = V_0$$
$$c_1 \ln\left(\tan\frac{\beta}{2}\right) + c_2 = 0$$

$$\Phi = V_0 \frac{\ln\left[\dfrac{\tan\theta/2}{\tan\beta/2}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan\alpha/2}{\tan\beta/2}\right]}$$

فرض کنید مسئله‌ای که می خواهیم حل کنیم دارای تقارن سمتی است

$$\Phi = \Phi(r,\theta)$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(r,\theta) = \nabla_r^2\Phi(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\nabla_\theta^2\Phi(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0}$$

با روش جدا سازی متغیرها، این معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به دو معادله‌ی دیفرانسیل معمولی تبدیل می کنیم

$$\Phi(r,\theta) = R(r)P(\theta) \;\Rightarrow P(\theta)\nabla_r^2R(r) + \frac{R(r)}{r^2}\nabla_\theta^2P(\theta) = 0 \;\Rightarrow \frac{r^2}{R(r)}\nabla_r^2R(r) + \frac{1}{P(\theta)}\nabla_\theta^2P(\theta) = 0$$

$$\boxed{\frac{r^2}{R(r)}\nabla_r^2R(r) = -\frac{1}{P(\theta)}\nabla_\theta^2P(\theta) = k}$$

$$\boxed{\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) = k}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-kR(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+kP(\theta)=0$$

$$k=l(l+1)$$

بعداً خواهیم دید که l باید
عددی صحیح باشد

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-l(l+1)R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+l(l+1)P(\theta)=0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-l(l+1)R(r)=0\Rightarrow R(r)=r^l,\quad r^{-(l+1)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+l(l+1)P(\theta)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+l(l+1)P(\theta)=0$$

$$x=\cos\theta$$
$$0\le\theta\le\pi\rightarrow -1\le\cos\theta\le+1$$
$$-1\le x\le+1$$

x=+1 یعنی نقاط روی محور z+ و x=-1 یعنی نقاط روی محور z-

$$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$$
$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\frac{d}{d(\cos\theta)}=-\sin\theta\frac{d}{d(\cos\theta)}=-\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(-(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right)+l(l+1)P=0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+l(l+1)P=0$$ معادله‌ی لژاندر

در درس‌های بعد به حل معادله‌ی لژاندر می‌پردازیم. پاسخ این معادله را چند جمله‌ای‌های نوع اول و دوم لژاندر می‌نامیم.

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+l(l+1)P(\theta)=0}$$

$$\boxed{P=AP_l(\cos\theta)+BQ_l(\cos\theta)}$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\left[A'_lr^l+B'_lr^{-(l+1)}\right]Q_l(\cos\theta)}$$

$$\Phi = \Phi(r,\theta,\phi)$$

$$\nabla^2\Phi(r,\theta,\phi) = 0$$

$$\nabla_r^2\Phi(r,\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2\Phi(r,\theta,\phi) = 0$$

$$\Phi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

$$Y(\theta,\phi)\nabla_r^2R(r) + \frac{R(r)}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2Y(\theta,\phi) = 0 \Rightarrow r^2\,\frac{\nabla_r^2R(r)}{R(r)} = -\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\nabla_{\theta\phi}^2Y(\theta,\phi) = k = l(l+1)$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right) - l(l+1)R(r) = 0 \rightarrow R = r^l, \quad r^{-(l+1)}$$

دانشگاه خوارزمی

$$r^2\,\frac{\nabla_r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\nabla_{\theta\phi}^2 Y(\theta,\phi) = k = l(l+1)$$

$$\nabla_{\theta\phi}^2 Y(\theta,\phi) = -l(l+1)Y(\theta,\phi)$$

$$\nabla_{\theta\phi}^2 = \nabla_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\nabla_\phi^2$$

$$\nabla_\theta^2 Y(\theta,\phi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\nabla_\phi^2 Y(\theta,\phi) + l(l+1)Y(\theta,\phi) = 0$$

$$Y(\theta,\phi) = P(\theta)Q(\phi) \Rightarrow Q(\phi)\nabla_\theta^2 P(\theta) + \frac{P(\theta)}{\sin^2\theta}\nabla_\phi^2 Q(\phi) + l(l+1)P(\theta)Q(\phi) = 0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{P(\theta)}\nabla_\theta^2 P(\theta) + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{Q(\phi)}\nabla_\phi^2 Q(\phi) = m^2$$

$$\frac{\sin^2\theta}{P(\theta)}\nabla_\theta^2 P(\theta) + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{Q(\phi)}\nabla_\phi^2 Q(\phi) = m^2$$

$$\nabla_\theta^2 P(\theta) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0 \qquad \nabla_\phi^2 Q(\phi) + m^2 Q(\phi) = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)P(\theta) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}Q(\phi) + m^2 Q(\phi) = 0 \qquad Q(\phi) = e^{\pm im\phi}$$

اگر ϕ تمام زاویه‌ی سمتی را شامل شود (از 0 تا 2π) آن‌گاه m عددی صحیح خواهد بود.

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{Q(\phi) = e^{\pm im\phi}}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi\delta_{mm'}}$$

$$\boxed{Q_m(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)P(\theta)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta)=0}$$

$$x = \cos\theta$$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0}$$

معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر

اگر $m=0$ ، آن‌گاه معادله‌ی فوق به معادله‌ی لژاندر تبدیل می‌شود

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_l(x)}{dx}+(l+1)P_l(x)=0$$

پاسخ‌های معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر را به شکل زیر می‌نویسیم و آن را توابع وابسته‌ی لژاندر می‌نامیم

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

$$P_0^0(x) = 1$$

$$P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2} P_1^1(x)$$
$$P_1^0(x) = x$$
$$P_1^1(x) = -(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{24} P_2^2(x)$$
$$P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6} P_2^1(x)$$
$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$
$$P_2^1(x) = -3x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$$

در مورد توابع وابسته‌ی لژاندر، در درس‌های بعد بحث می کنیم.

$$\Phi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

$$Y(\theta,\phi) = P(\theta)Q(\phi)$$

$$\nabla^2_{\theta\phi}Y(\theta,\phi) = -l(l+1)Y(\theta,\phi)$$

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \text{constant}\, P_l^m(\cos\theta)Q_m(\phi)$$

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)Q_m(\phi)$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y^*_{lm}(\theta,\phi)Y_{l'm'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla^2\Phi(r,\theta,\phi) = 0$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^{l} + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{1,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1,-1}(\theta,\phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$$

$$Y_{2,2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{2i\phi}$$

$$Y_{2,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_{2,-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}$$

$$Y_{2,-2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{-2i\phi}$$

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$A_{lm}=\int d\Omega f(\theta,\phi)Y_{lm}^{*}(\theta,\phi)=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}f(\theta,\phi)Y_{lm}^{*}(\theta,\phi)d(\cos\theta)d\phi$$

بر روی محور z یعنی وقتی که $\theta = 0$ تمام جملات $m \neq 0$ صفر می‌شوند. بنابر این

$$f(\theta=0,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}A_{l0}P_l(\cos\theta)$$

$$A_{l0}=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}f(\theta,\phi)P_l(\cos\theta)d(\cos\theta)d\phi$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید