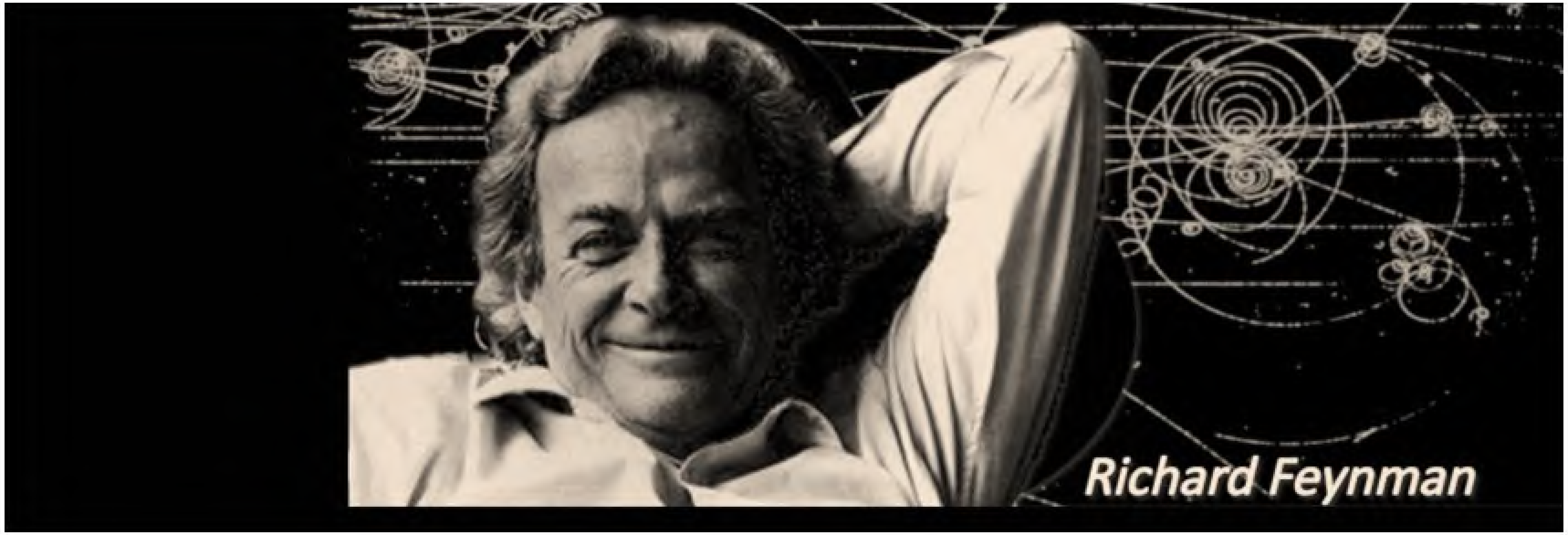
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و چهارم

چند جمله‌ای‌های لژاندر

Legendre Polynomials-part1

دانشگاه خوارزمی

معادله‌ی لژاندر را به روش سری حل می کنیم

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

$$\boxed{(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1} + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\alpha)(n+\alpha+1) - l(l+1)\right]a_n x^{n+\alpha} = 0}$$

سری نامتناهی فوق به ازای همه‌ی مقادیر x برقرار است.

بنابر این باید ضریب هریک از توان‌های x به طور مستقل برابر با صفر باشد

دانشگاه خوارزمی

$$\alpha\left(\alpha-1\right)a_0x^{\alpha-2}+\left(\alpha+1\right)\alpha a_1x^{\alpha-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha-1\right)a_nx^{n+\alpha-2}-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)-l(l+1)\right]a_nx^{n+\alpha}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha-1\right)a_nx^{n+\alpha-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)a_{n+2}x^{n+\alpha}$$

$$\alpha\left(\alpha-1\right)a_0 x^{\alpha-2}+\left(\alpha+1\right)\alpha a_1 x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(n+2+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)a_{n+2}-\left[\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)-l(l+1)\right]a_n\right\}x^{n+\alpha}=0$$

$$\alpha\left(\alpha-1\right)a_0=0 \quad\rightarrow\quad if\ a_0\neq 0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=1\end{cases}$$

$$\left(\alpha+1\right)\alpha a_1=0 \quad\rightarrow\quad if\ a_1\neq 0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=-1\end{cases}$$

$$a_{n+2}=\frac{\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)-l(l+1)}{\left(n+2+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)}a_n$$

به ازای $\alpha=0$ دو جواب مستقل با ثابت‌های اختیاری a_0 و a_1 به دست می‌آیند که آن‌ها را y_1 و y_2 می‌نامیم.

$$a_{n+2} = \frac{\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right) - l(l+1)}{\left(n+2+\alpha\right)\left(n+\alpha+1\right)} a_n$$

$$\alpha = 0 \rightarrow a_{n+2} = \frac{n\left(n+1\right) - l(l+1)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} a_n = -a_n \frac{\left(l-n\right)\left(l+n+1\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}$$

$$a_2 = \frac{-l(l+1)}{(2)(1)} a_0$$

$$a_4 = -a_2 \frac{(l-2)(l+3)}{(4)(3)} = a_0 \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{(4)(3)(2)(1)}$$

$$a_{2n} = a_0 (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\alpha = 0 \to a_{n+2} = \frac{n\left(n+1\right) - l(l+1)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} a_n = -a_n \frac{\left(l-n\right)\left(l+n+1\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}$$

$$a_3 = -a_1 \frac{(l-1)(l+2)}{(3)(2)}$$

$$a_5 = -a_3 \frac{(l-3)(l+4)}{(5)(4)} = a_1 \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{(5)(4)(3)(2)}$$

$$a_{2n+1} = a_1(-1)^n \frac{(l-1)(l-3)(l-5)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}$$

$$a_{2n} = a_0(-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}$$

$$a_{2n+1} = a_1(-1)^n \frac{(l-1)(l-3)(l-5)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 y_1 + a_1 y_2 \\ &= a_0\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}\right\} \\ &\quad + a_1\left\{x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(l-1)(l-3)(l-5)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 y_1 + a_1 y_2 \\
&= a_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!} x^{2n} \right\} \\
&\quad + a_1 \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-1)(l-3)(l-5)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right\}
\end{aligned}
$$

سری‌های فوق در فاصله‌ی $-1 < x < +1$ همگراست اما در نقاط $x = \pm 1$ نامتناهی می‌شود.

بنابر این سری را در یک جایی قطع می‌کنیم. برای این کار کافی است که l عددی صحیح مثبت یا صفر باشد

دانشگاه خوارزمی

$$a_{n+2} = -a_n \frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}$$

اگر l زوج باشد، آن‌گاه $a_{2n} \neq 0$ ولی $a_{2n+2} = 0$ و در نتیجه **همه‌ی ضرایب زوج** بعدی صفر می‌شوند.

اگر l فرد باشد، آن‌گاه $a_{2n+1} \neq 0$ ولی $a_{2n+3} = 0$ و در نتیجه **همه‌ی ضرایب فرد** بعدی صفر می‌شوند.

بنابر این اگر l زوج باشد، y_1 به یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود و در نتیجه برای همه‌ی مقادیر x متناهی خواهد بود.

بنابر این اگر l فرد باشد، y_2 به یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود و در نتیجه برای همه‌ی مقادیر x متناهی خواهد بود.

چه l زوج باشد چه فرد، بزرگ‌ترین توان در سری‌های y_1 و y_2 به شکل x^l است. این سری‌ها را با توان‌های نزولی می نویسیم

$$a_n = -a_{n+2} \frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}$$

$$a_n = -a_{n+2}\frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}$$

$$a_{l-2} = -a_l \frac{(l)(l-1)}{2(2l-1)}$$

$$a_{l-4} = -a_{l-2}\frac{(l-2)(l-3)}{4(2l-3)} = a_l \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{(2)(4)(2l-1)(2l-3)}$$

$$\vdots$$

$$a_{l-2r} = (-1)^r a_l \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)\cdots(l-2r+1)}{(2)(4)\cdots(2r)(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2r+1)}$$

$$y(x) = a_l x^l + a_{l-2}x^{l-2} + a_{l-4}x^{l-4} + \cdots + \begin{cases} a_0 & if\ l = 2n \\ a_1 x & if\ l = 2n+1 \end{cases}$$

$$y(x) = a_l x^l + a_{l-2}x^{l-2} + a_{l-4}x^{l-4} + \cdots + \begin{cases} a_0 & if\ l = 2n \\ a_1 x & if\ l = 2n+1 \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} a_{l-2r} x^{l-2r}$$

$$\left[\frac{l}{2}\right] = \begin{cases} \frac{l}{2} & if\ l = 2k \\ \frac{1}{2}(l-1) & if\ l = 2k+1 \end{cases}$$

$$y(x) = a_l \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^r \frac{l(l-1)\big(l-2\big)\big(l-3\big)\cdots(l-2r+1)}{(2)(4)\cdots(2r)(2l-1)\big(2l-3\big)\cdots(2l-2r+1)} x^{l-2r}$$

صورت= $l(l-1)\big(l-2\big)\big(l-3\big)\cdots(l-2r+1)\dfrac{(l-2r)!}{(l-2r)!} = \dfrac{l\,!}{(l-2r)!}$

مخرج= $(2)(4)\cdots(2r)\dfrac{(2l)(2l-1)(2l-2)\big(2l-3\big)(2l-4)\cdots(2l-2r+2)(2l-2r+1)}{(2l)(2l-2)(2l-4)\cdots(2l-2r+2)}\dfrac{(2l-2r)!}{(2l-2r)!}$

دانشگاه خوارزمی

مخرج $= (2)(4)\cdots(2r)\dfrac{(2l)(2l-1)(2l-2)\big(2l-3\big)(2l-4)\cdots(2l-2r+2)(2l-2r+1)}{(2l)(2l-2)(2l-4)\cdots(2l-2r+2)}\dfrac{(2l-2r)!}{(2l-2r)!}$

مخرج $= 2^r\, r!\,\dfrac{(2l)!}{2^r\, l(l-1)(l-2)\cdots(l-r+1)}\dfrac{1}{(2l-2r)!} = 2^r\, r!\,\dfrac{(2l)!(l-r)!}{2^r\, l(l-1)(l-2)\cdots(l-r+1)(l-r)!}\dfrac{1}{(2l-2r)!}$

مخرج $= \; r!\,\dfrac{(2l)!(l-r)!}{l!(2l-2r)!}$ صورت $= \dfrac{l!}{(l-2r)!}$

$$y(x) = a_l \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\,\frac{l(l-1)\big(l-2\big)\big(l-3\big)\cdots(l-2r+1)}{(2)(4)\cdots(2r)(2l-1)\big(2l-3\big)\cdots(2l-2r+1)}\,x^{l-2r}$$

$$y(x) = a_l \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\,\frac{(l!)^2(2l-2r)!}{r!(2l)!(l-2r)!(l-r)!}\,x^{l-2r}$$

$$y(x) = a_l \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^r \frac{(l!)^2 (2l-2r)!}{r!(2l)!(l-2r)!(l-r)!} x^{l-2r}$$

این یک پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل با ثابت دلخواه a_l است . با انتخاب a_l به شکل زیر

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$$

پاسخ معادله به شکل زیر نوشته می‌شود و آن چند جمله‌ای لژاندر می‌نامیم.

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-2r)!(l-r)!} x^{l-2r}$$

دانشگاه خوارزمی

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-2r)!(l-r)!} x^{l-2r}$$

$$P_0(x) = 1$$

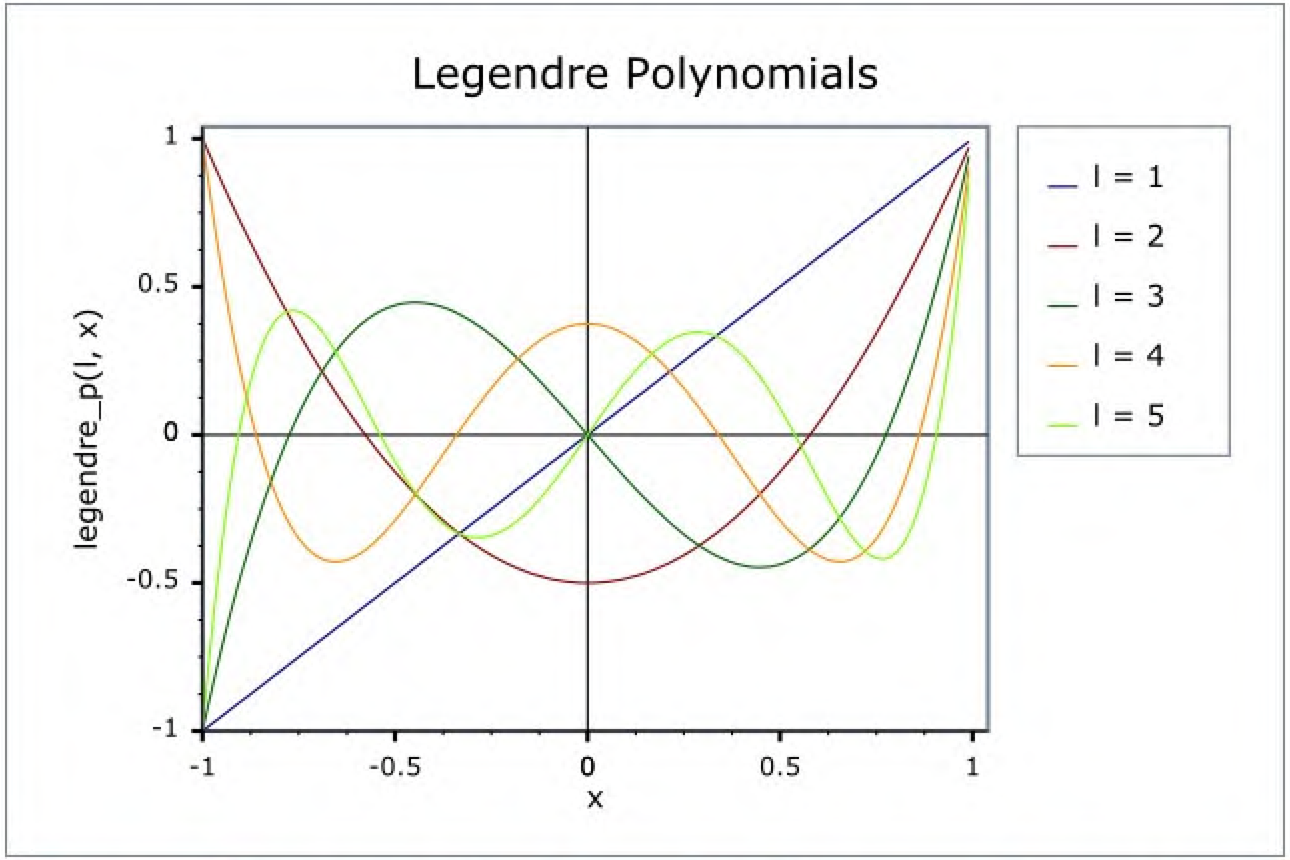
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$



عبارت x^2-3x+4 را بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بنویسید

$$P_0(x) = 1 \qquad \rightarrow 4 = 4P_0(x)$$

$$P_1(x) = x \qquad \rightarrow 3x = 3P_1(x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \qquad \rightarrow x^2 = \frac{2P_2(x) + P_0(x)}{3}$$

$$\boxed{x^2 - 3x + 4 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0 - 3P_1 + 4P_0}$$

$$\boxed{x^2 - 3x + 4 = \frac{2}{3}P_2 - 3P_1 + \frac{13}{3}P_0}$$

دانشگاه خوارزمی

دیدیم که اگر l زوج باشد، y_1 به یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود و اگر l فرد باشد، y_2 به یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود که برای مقادیر x در بازه‌ی بسته‌ی [۱,۱ -] متناهی خواهند بود. در هر دو حالت سری باقی‌مانده مربوط به دومین پاسخ، در نقاط ۱ و ۱ - نامتناهی خواهد بود.

می‌توان نشان داد پاسخ دوم معادله‌ی لژاندر به شکل زیر است (اثبات در کتاب Special Functions, W. W. Bell صفحه‌ی 71)

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} P_l(x) \ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} \frac{(2l-4r-1)}{(2r+1)(l-r)} P_{l-2r-1}(x); \qquad l \geq 1$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\frac{1+x}{1-x}; \qquad l = 0$$

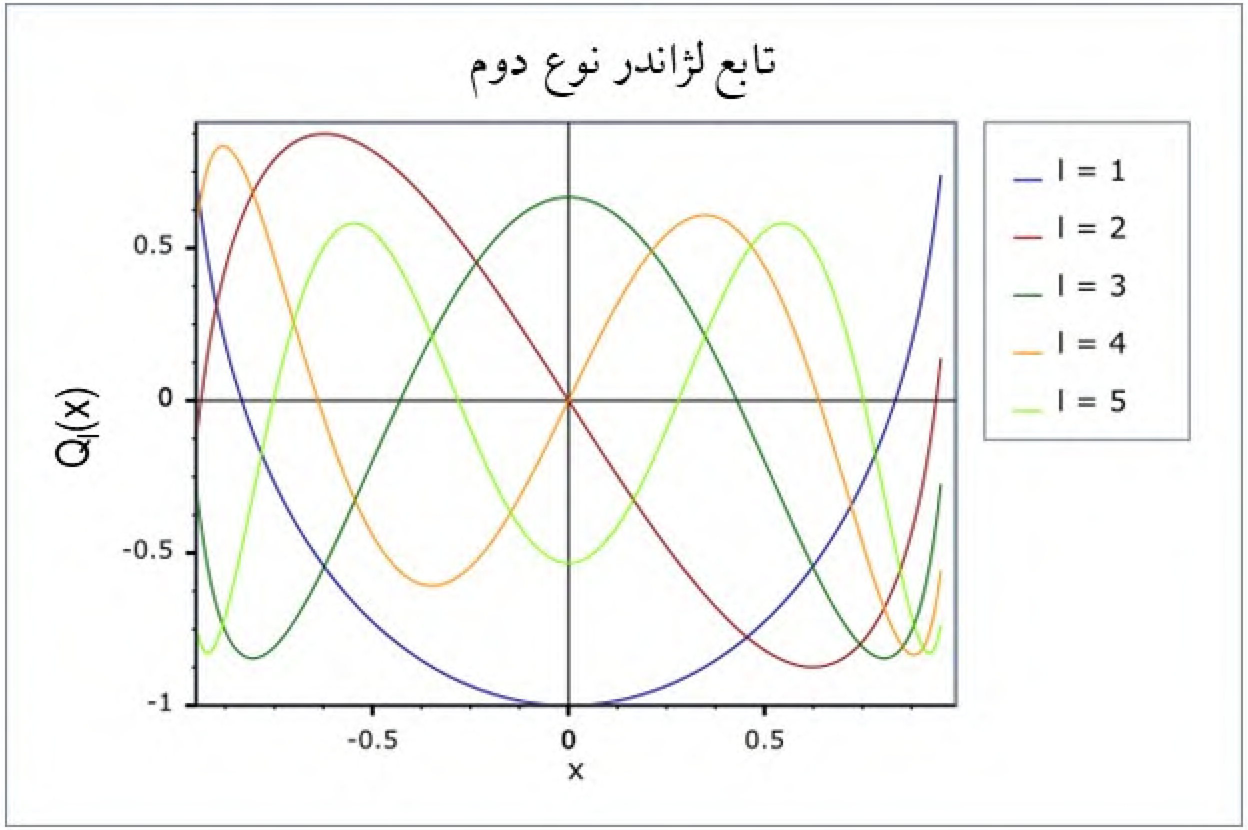
$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-2r)!(l-r)!} x^{l-2r}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2-1\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{4}\left(5x^3-3x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}$$



شاد و مهربان باشید