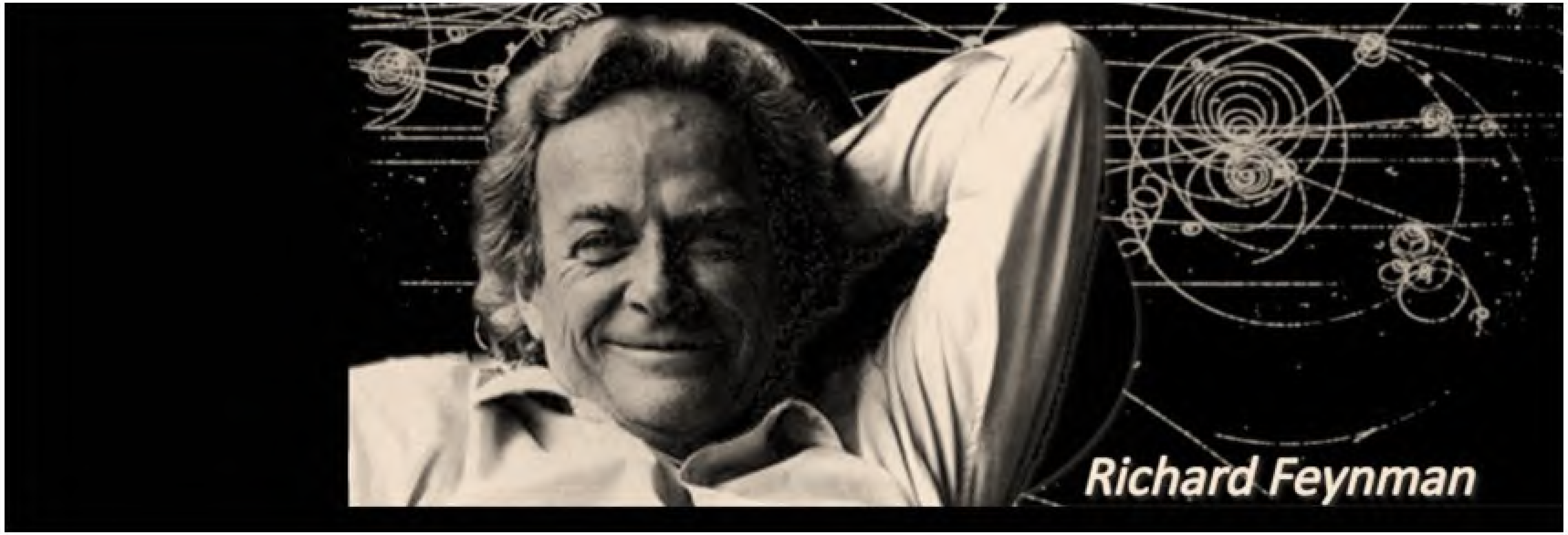
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و پنجم

چند جمله‌ای‌های لژاندر- بخش۲

Legendre Polynomials-part2

دانشگاه خوارزمی

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \left[\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-2r)!(l-r)!} x^{l-2r} \right]$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x) \qquad |t|<1}$$

اثبات:

کتاب Special Functions W.W. Bell فصل سوم بخش ۲ - ۳ صفحه‌ی ۴۶

کتاب Special Functions and Applications N. N. Lebedev فصل چهارم بخش ۲ - ۴ صفحه‌ی ۴۵

$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ نشان دهید

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

$x \rightarrow -x$

$$\boxed{g(-x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(-x)}$$

$t \rightarrow -t$

$$\boxed{g(x,-t) = \frac{1}{\sqrt{1-2(-t)x+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-t)^l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l t^l P_l(x)}$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty} (t)^l P_l(-x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l t^l P_l(x)}$$

$$\boxed{P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)}$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید $P_l(1) = 1$

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

$$\left.\begin{aligned} g(1,t) &= \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(1) \\ \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} &= \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(1) \Rightarrow P_l(1) = 1}$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید $P_l'(1) = \frac{1}{2} l(l+1)$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2P_l(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_l(x) = 0}$$

$$\boxed{x = 1 \rightarrow 0 - 2\left.\frac{dP_l(x)}{dx}\right|_{x=1} + l(l+1)\cancelto{1}{P_l(1)} = 0}$$

$$\boxed{\left.\frac{dP_l(x)}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}l(l+1)}$$

$$P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} = (-1)^l \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}$$
$$P_{2l+1}(0) = 0$$

نشان دهید

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(0)$$

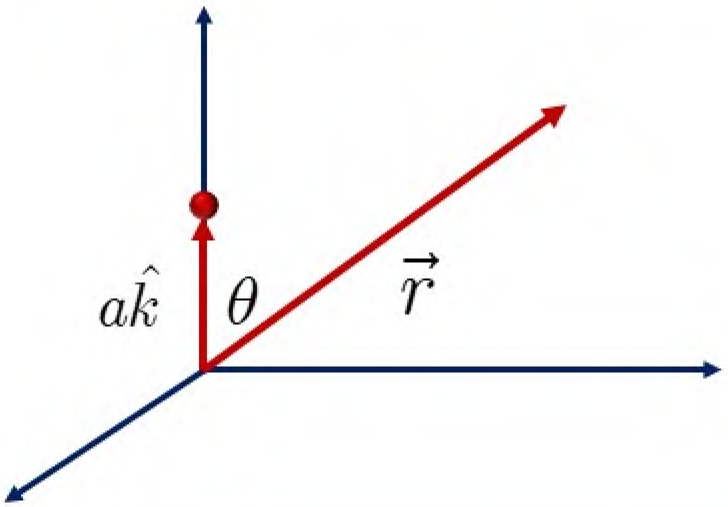
$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l(l!)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} t^{2l} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} t^{2l}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) t^l = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} t^{2l} \Longrightarrow \begin{aligned} P_{2l}(0) &= (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \\ P_{2l+1}(0) &= 0 \end{aligned}$$

بار الکتریکی نقطه‌ای q بر روی محور z در مکان $z=a$ قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در هر نقطه بر حسب چندجمله‌ای‌های لژادر بنویسید

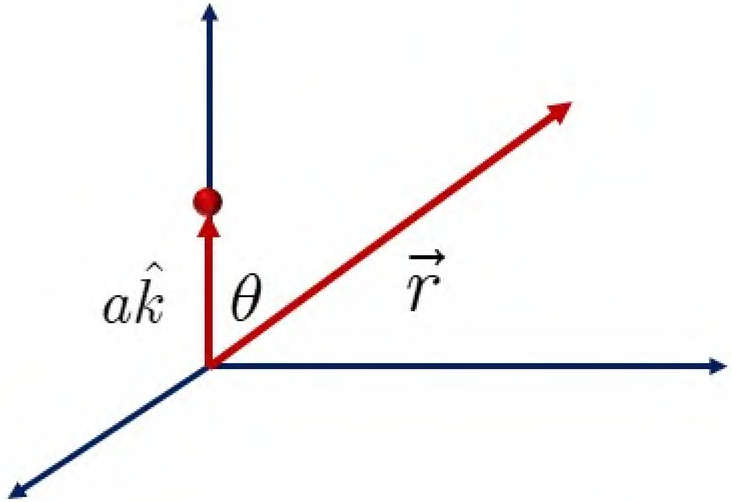


$$\vec{r}' = a\hat{k}$$
$$\vec{r} = z\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r\hat{r}$$

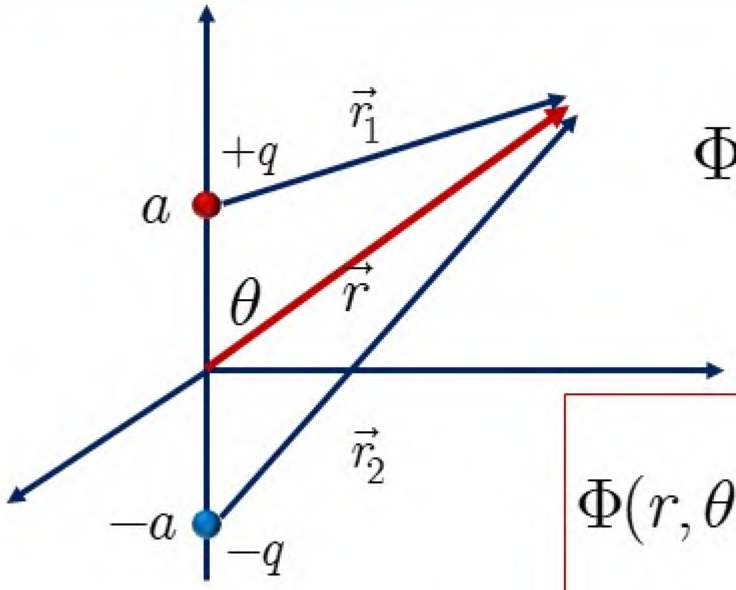
$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(r,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\,\vec{r} - \vec{r}'\,|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ra\cos\theta + a^2}}$$

$$r > a \quad \rightarrow \quad \Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

$$r < a \quad \rightarrow \quad \Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{a}\cos\theta + \frac{r^2}{a^2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n$$



$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_>}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n$$



$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r} - a\hat{k} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r} + a\hat{k}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2}}\right)}$$

$$\boxed{r > a \quad \rightarrow \quad \Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}}}\right)}$$

$$\boxed{r > a \quad \rightarrow \quad \Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)(-1)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n\right)}$$

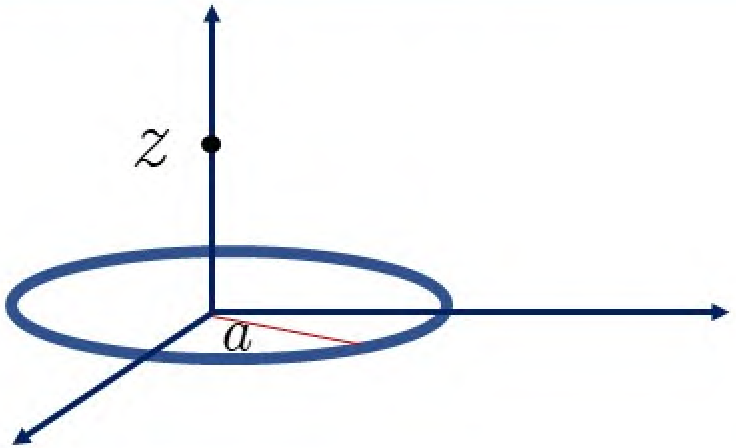
$$\boxed{r > a \quad \rightarrow \quad \Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(2P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right) + 2P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2P_5(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^5 + \cdots\right)}$$

$$\lim_{a\rightarrow 0} 2aq = p$$ گشتاور دوقطبی نقطه‌ای

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \lim_{a\rightarrow 0}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(2P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right) + 2P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2P_5(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^5 + \cdots\right)}$$

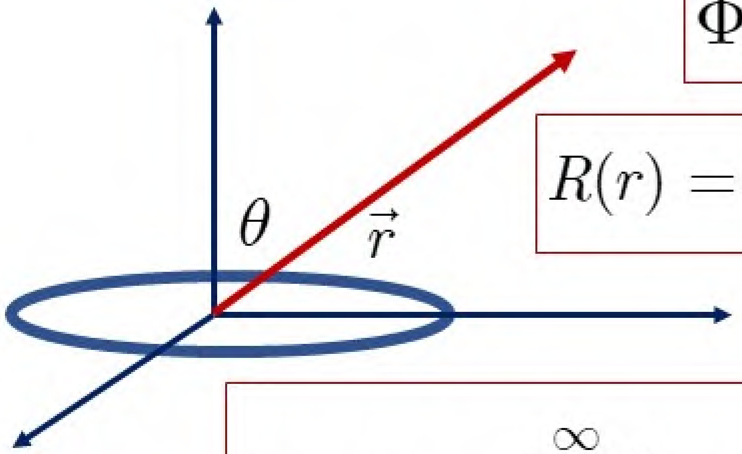
$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \lim_{a\rightarrow 0}\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^2}P_1(\cos\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta}$$

دانشگاه خوارزمی



پتانسیل الکتریکی ناشی از حلقه‌ی باردار با بار یکنواخت بر روی محور z

$$\boxed{\Phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}}$$



$$\boxed{\Phi = \Phi(r,\theta)} \qquad \boxed{\nabla^2\Phi(r,\theta) = 0} \qquad \boxed{\Phi(r,\theta) = R(r)P(\theta)}$$

$$\boxed{R(r) = r^l, \quad r^{-(l+1)} \qquad P(\theta) = P_l(\cos\theta), \quad Q_l(\cos\theta)}$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l' r^l + B_l' r^{-(l+1)}\right]Q_l(\cos\theta)}$$

دانشگاه خوارزمی

Q_l در نقاط روی محور z نامتناهی می‌شود. بنابر این عبارت دوم نمی‌تواند پاسخ مسئله باشد. به بیان دیگر ضرائب آن صفرند

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)}$$

$$\boxed{\Phi(r = z,\theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right]P_l(1)}$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$z > a \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z}\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}$$

$$z > a \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l)!\,a^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}\left(\frac{1}{z}\right)^{2l+1}$$

$$\boxed{A_l = 0} \qquad \boxed{B_{2l+1} = 0, \qquad B_{2l} = (-1)^l\,\frac{(2l)!\,a^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}}$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta) \qquad r > a$$

مسئله را برای $r < a$ حل کنید.

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید