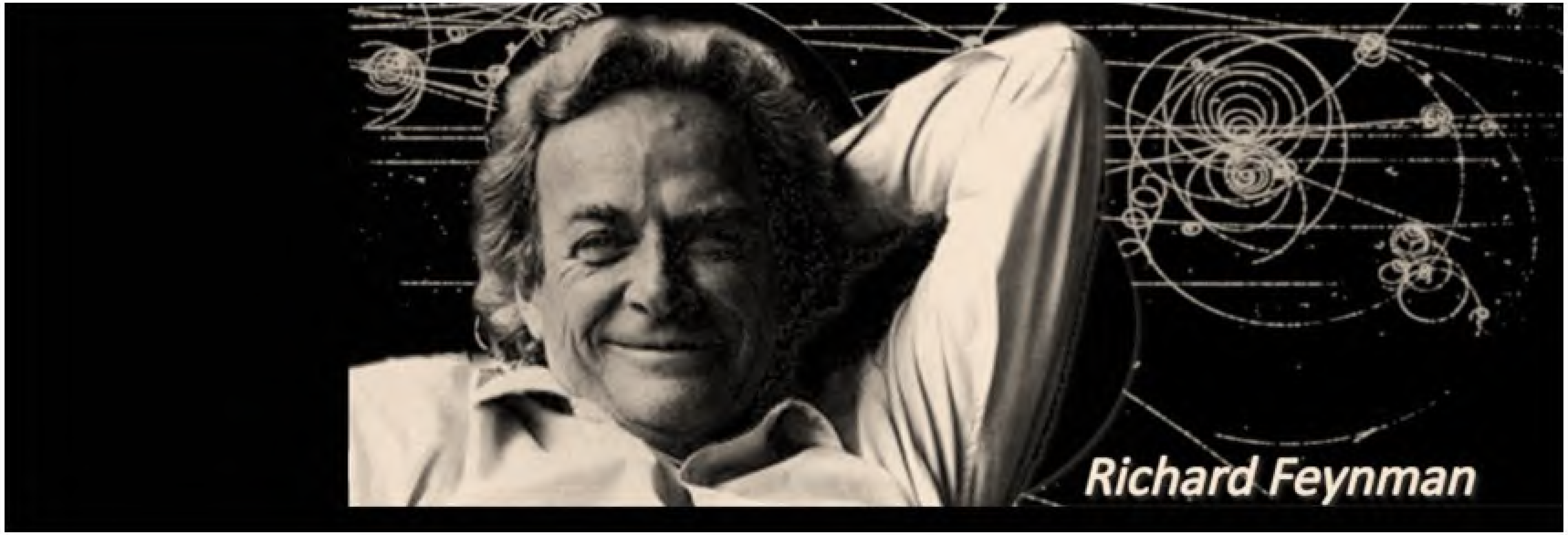
# Electrodynamics


Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com




اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

# درس بیست و ششم

## چند جمله‌ای‌های لژاندر- بخش۳

## Legendre Polynomials-part3

دانشگاه خوارزمی

اگر $l$ و $m$ دو عدد صحیح غیر منفی دلخواه باشند، آن‌گاه:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

**اثبات:**

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx^2} - 2x\frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P_m}{dx^2} - 2x\frac{dP_m}{dx} + m(m+1)P_m = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right] + l(l+1)P_l = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right] + m(m+1)P_m = 0$$

رابطه‌ی اول را در $P_m$ و رابطه‌ی دوم را در $P_l$ ضرب می‌کنیم سپس از تفاضل دو رابطه انتگرال می‌گیریم

$$\boxed{\int_{-1}^{+1}\left\{P_m\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]-P_l\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]\right\}dx+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{+1}P_lP_m\,dx=0}$$

$$P_m\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[P_m(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]-\frac{dP_m}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}$$

$$P_l\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[P_l(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]-\frac{dP_l}{dx}(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{d}{dx}\left[P_m(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]-\frac{d}{dx}\left[P_l(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]\right\}dx+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{+1}P_lP_m\,dx=0}$$

$$\underbrace{\left[P_m(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]_{-1}^{+1}}_{0}-\underbrace{\left[P_l(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]_{-1}^{+1}}_{0}+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{+1}P_lP_m\,dx=0$$

$$\Big[l(l+1) - m(m+1)\Big]\int_{-1}^{+1} P_l P_m dx = 0$$

$$l \neq m \Rightarrow \int_{-1}^{+1} P_l P_m dx = 0$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\int_{-1}^{+1}\big[P_l(x)\big]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

برای این کار از تابع مولد کمک می گیریم

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\right]^2=\left[\sum_{l=0}^{\infty}t^l P_l(x)\right]^2$$

$$\frac{1}{1-2tx+t^2}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}t^{l+m}P_l(x)P_m(x)$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1-2tx+t^2}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}t^{l+m}\int_{-1}^{+1}P_l(x)P_m(x)dx=\sum_{l=0}^{\infty}t^{2l}\int_{-1}^{+1}P_l(x)P_l(x)dx$$

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln\left(a+bx\right)+\text{constan}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1+t^2)-2tx}=\left[-\frac{1}{2t}\ln(1+t^2-2xt)\right]_{-1}^{+1}=-\frac{1}{2t}\ln\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}=\frac{1}{t}\ln\frac{(1+t)}{(1-t)}$$

$$\ln\frac{(1+t)}{(1-t)}=2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l+1}}{2l+1}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1+t^2)-2tx}=2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l}}{2l+1}=\sum_{l=0}^{\infty}t^{2l}\int_{-1}^{+1}P_l(x)P_l(x)dx$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+t^2)-2tx} = 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{2l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} P_l(x)P_l(x)dx$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

دانشگاه خوارزمی

اگر $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته در بازه‌ی [-1,1] باشد،
آن‌گاه در نقاط پیوسته سری زیر به $f(x)$ همگراست

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) = f(x)$$

و در نقاط گسسته، به میانگین حد چپ
و راست تابع در آن نقطه همگراست

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) = \frac{1}{2}\left[ f(x_+) + f(x_-)\right]$$

ضرایب بسط با استفاده از شرط
تعامد به دست می‌آیند

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx$$

دانشگاه خوارزمی

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) = f(x)$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد

$$A_n = \begin{cases} 0 & n \text{ is odd} \\ (2n+1)\int_0^{+1} f(x)P_n(x)dx & n \text{ is even} \end{cases}$$

اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد

$$A_n = \begin{cases} (2n+1)\int_0^{+1} f(x)P_n(x)dx & n \text{ is odd} \\ 0 & n \text{ is even} \end{cases}$$

دانشگاه خوارزمی

سری لژاندر تابع زیر را بنویسید

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & -1<x<0\end{cases}$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)}$$

$$\boxed{A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=\frac{2n+1}{2}\left\{\int_{-1}^{0}0\times P_n(x)dx+\int_{0}^{1}P_n(x)dx\right\}}$$

$$\boxed{A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1}P_n(x)dx}$$

$$\boxed{\int_{0}^{1}P_n(x)dx=?}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 P_l(x)dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = -\left(\frac{1}{2t}\right)\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\left(\frac{2}{2t}\right) 2\sqrt{u} = -\frac{1}{t}\sqrt{1-2tx+t^2}\Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = -\frac{1}{t}\left(1-t-\sqrt{1+t^2}\right)$$

دانشگاه خوارزمی

$$(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^4+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)t^6+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)t^{2n}$$

$$(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)t^4+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)t^6+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)t^{2n}$$

$$(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n\,n!}t^{2n}$$

$$-\frac{1}{t}\left(1-t-\sqrt{1+t^2}\right)=-\frac{1}{t}\left(1-t-1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n\,n!}t^{2n}\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n\,n!}t^{2n-1}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n\,n!}t^{2n-1}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}t^{2n+1}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 P_l(x)dx}$$

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 P_l(x)dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^1 P_0(x)dx = 1 \\ &\int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0 \qquad\qquad n \geq 1 \\ &\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \end{aligned}}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)dx}$$

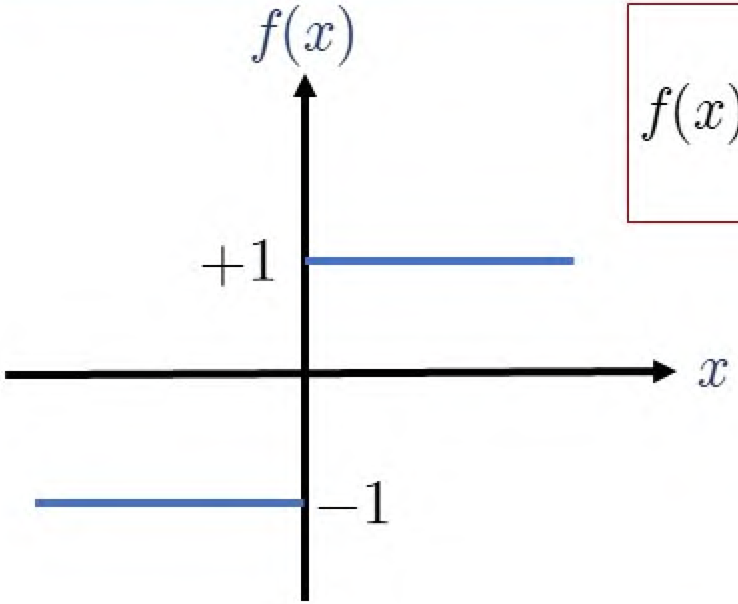
$$\boxed{A_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 P_0(x)dx = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{A_{2n} = 0}$$

$$\boxed{A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2}\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = \left(\frac{4n+3}{2}\right)(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \cdots}$$




اگر $f(x)$ تابعی باشد که در بازه‌ی $-1<x<1$ تعریف شده باشد:

$$f(x)=\begin{cases}+1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

اگر $f(x)$ را بر حسب چند جمله‌ای های لژاندر بنویسید

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\left(-\int_{-1}^{0} P_n(x)dx+\int_{0}^{+1} P_n(x)dx\right)$$

در انتگرال اول تغییر متغیر $x \rightarrow -x$ را انجام می دهیم. توجه کنید که $P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\left(\left(1-(-1)^n\right)\int_{0}^{+1} P_n(x)dx\right)=\begin{cases}0 & n=2l\\ \left(2n+1\right)\int_{0}^{+1} P_n(x)dx & n=2l+1\end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2l \\ (2n+1)\int_0^{+1} P_n(x)dx & n = 2l+1 \end{cases}$$

$$\int_0^{+1} P_{2l+1}(x)dx = \frac{(2l-1)!!}{2^{l+1}(l+1)!}$$ با توجه به مثال قبل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \sum_{l=0}^{\infty} (4l+3)\frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^{l+1}(l+1)!} P_{2l+1}(x)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)}$$

$$\boxed{P_l'(x) = xP_{l-1}'(x) + lP_{l-1}(x)}$$

$$\boxed{P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) = (2l+1)P_l(x)}$$

$$\boxed{P_l(x) = xP_{l-1}(x) + \frac{x^2-1}{l}P_{l-1}'(x)}$$

$$\boxed{P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) = (2l+1)P_l(x)}$$

$$\boxed{P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) = (2l+1)P_l(x)}$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x)$$

$$\frac{x-t}{(1-2tx+t^2)} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x)$$

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = (1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x t^n P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} 2xn t^n P_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n+1} P_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n+1)t^n P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^{n+1} P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n+1)t^n P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^{n+1}P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(2n+1)t^n P_n(x) - \sum_{m=0}^{\infty} mt^m P_{m-1}(x) - \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)t^m P_{m+1}(x) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x) - (n+1)P_{n+1}(x)\Big]t^n = 0$$

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad 2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x) \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$n = 3 \quad \rightarrow \quad P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

$$n = 4 \quad \rightarrow \quad P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید: $$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

در اسلاید قبل دیدیم:

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)}$$

از رابطه‌ی فوق نسبت به $x$ مشتق می گیریم

$$\boxed{(n+1)P'_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) + x(2n+1)P'_n(x) - nP'_{n-1}(x)}$$

از سوی دیگر

$$\boxed{g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{t}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}P_n(x) = (1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x)}$$

$$\boxed{P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) + 2xP'_n(x)}$$

دانشگاه خوارزمی

$$(n+1)P'_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) + x(2n+1)P'_n(x) - nP'_{n-1}(x)$$

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) + 2xP'_n(x)$$

$$2(n+1)P'_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + 2x(2n+1)P'_n(x) - 2nP'_{n-1}(x)$$

$$(2n+1)P'_{n+1}(x) = -(2n+1)P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)xP'_n(x)$$

از تفاضل دو رابطه‌ی اخیر

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x)$$

همچنین با استفاده از روابط فوق می‌توان نشان داد (اثبات به عهده‌ی شما!)

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$$

اگر $n$ عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

**اثبات:**

بسط دوجمله‌ای عبارت زیر را می‌نویسیم:

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k x^{2(n-k)}$$

اگر $n > 2n\text{-}2k$ باشد (یا $k < n/2$ ) حاصل این مشتق صفر می‌شود.

بنابر این حد بالای مجموع را تا $[n/2]$ می‌نویسیم

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k x^{2(n-k)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k x^{2(n-k)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} = P_n(x)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & l = l' \end{cases}$$

**با استفاده از رابطه‌ی تعامد و روابط بازگشتی جمله‌ای‌های لژاندر نشان دهید:**

$$\int_{-1}^{+1} xP_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} & l' = l+1 \\ \dfrac{2l}{(2l-1)(2l+1)} & l' = l-1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} & l' = l+2 \\ \dfrac{2(2l^2+2l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} & l' = l \end{cases}$$

دانشگاه خوارزمی

# شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی