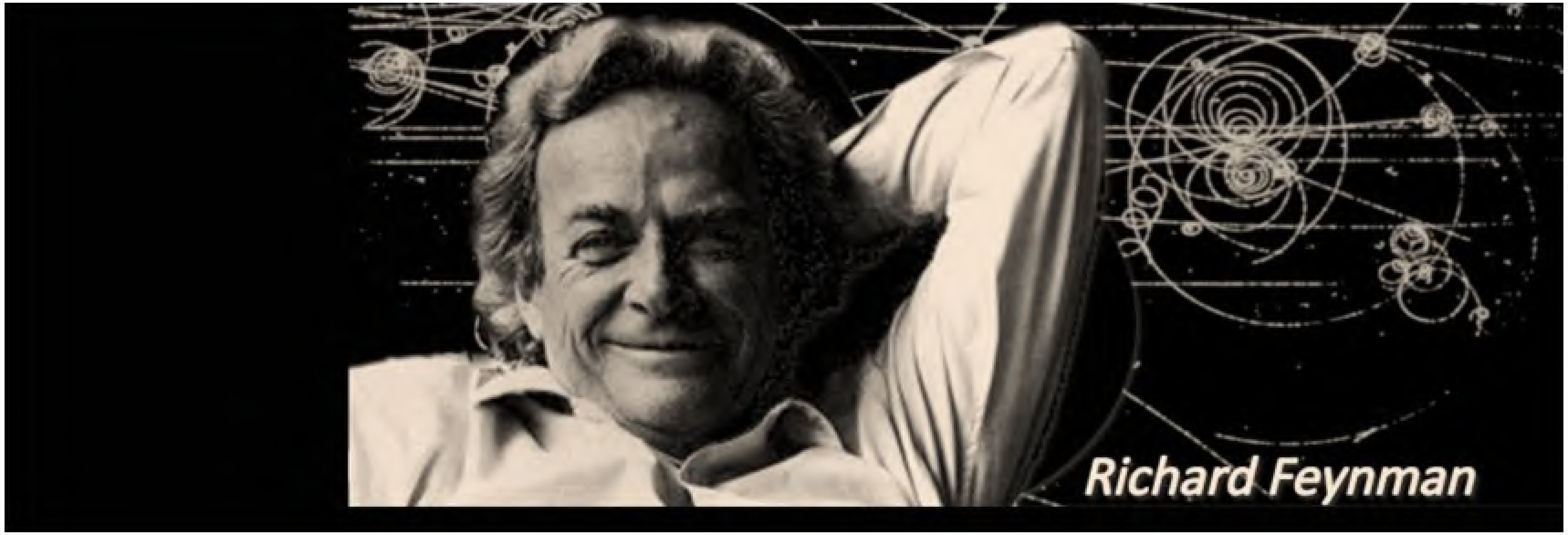
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و هفتم

توابع وابسته لژاندر

Associated Legendre Functions

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)P(\theta)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta)=0}$$

$$x = \cos\theta$$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0}$$

معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر

اگر $m=0$ ، آن‌گاه معادله‌ی فوق به معادله‌ی لژاندر تبدیل می‌شود

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_l(x)}{dx}+(l+1)P_l(x)=0$$

یکی از راه‌های به دست آوردن پاسخ معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر، این است که از معادله‌ی لژاندر m بار مشتق بگیریم. برای این کار از فرمول لایبنیتس استفاده می کنیم:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \frac{d^{m-n} f(x)}{dx^{m-n}} \frac{d^n g(x)}{dx^n}$$

فرمول لایبنیتس

یکی از راه‌های به دست آوردن پاسخ معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر، این است که از معادله‌ی نتیجه‌ی m بار مشتق گیری از معادله‌ی لژاندر به شکل زیر است (جزئیات راه حل را در کتاب $W.\ \ W.\ Bell$ ببینید

$$(1-x^2)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - 2x(m+1)\frac{du(x)}{dx} + (l-m)(l+m+1)u(x) = 0$$

$$\boxed{u(x) \equiv \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$(1-x^2)\frac{d^2u(x)}{dx^2}-2x(m+1)\frac{du(x)}{dx}+(l-m)(l+m+1)u(x)=0$$

تابع v را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$v(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}$$

دیده می‌شود که v در معادله‌ی زیر صدق می کند که همان معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر است.

$$(1-x^2)\frac{d^2v(x)}{dx^2}-2x\frac{dv(x)}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]v(x)=0$$

پاسخ‌های معادله‌ی وابسته‌ی لژاندر را به شکل زیر می‌نویسیم و آن را توابع وابسته‌ی لژاندر می‌نامیم

$$v(x)\equiv P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}$$

$$\boxed{P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}}$$

از آن‌جا که x^l بالاترین توان در $P_l(x)$ است، بنابر این $m \leq l$.

با توجه به فرمول رودریگز می توان نوشت: $P_l^m(x) = \dfrac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$

در این رابطه مقادیر منفی m نیز مجاز شمرده می‌شوند. بنابر این می‌توان نوشت $-l \leq m \leq l$

همچنین می‌توان نشان داد

$$\boxed{P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{P_0^0(x) = 1}$$

$$P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2}P_1^1(x)$$
$$P_1^0(x) = x$$
$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{24}P_2^2(x)$$
$$P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6}P_2^1(x)$$
$$P_1^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-1} P_l^m(x) P_l^{m'}(x) dx = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{mm'}$$

دانشگاه خوارزمی

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_l^m(x) + \Big[l(l+1) - m(m-1)\Big] P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) = (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)$$

$$\sqrt{1-x^2}\,P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1}\Big[P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x)\Big]$$

$$\sqrt{1-x^2}\,P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1}\Big[(l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x)\Big]$$

پاریته

$$\boxed{P_l^m(-x) = (-1)^{m+l} P_l^m(x)}$$

$$\boxed{P_l^m(\pm 1) = 0 \qquad\qquad m \neq 0}$$

تابع مولد

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\, m!(1-2tx+t^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_{n+m}^m(x)$$

این تابع مولد کاربرد فیزیکی چندانی ندارد و به ندرت به کار می‌رود.

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\nabla^2_{\theta\phi} Y(\theta,\phi) = -l(l+1) Y(\theta,\phi)}$$

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \text{constant}\, P_l^m(\cos\theta) Q_m(\phi)$$

$$\boxed{Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) Q_m(\phi)}$$

$$\boxed{\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y^*_{lm}(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}}$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi-\phi')}$$

دانشگاه خوارزمی

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{1,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta c^{i\phi}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1,-1}(\theta,\phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta c^{-i\phi}$$

$$Y_{2,2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta c^{2i\phi}$$

$$Y_{2,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta c^{i\phi}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_{2,-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta c^{-i\phi}$$

$$Y_{2,-2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta c^{-2i\phi}$$

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$A_{lm}=\int d\Omega f(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta,\phi)=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}f(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta,\phi)d(\cos\theta)d\phi$$

بر روی محور z یعنی وقتی که $\theta=0$ تمام جملات $m\neq 0$ صفر می‌شوند. بنابر این

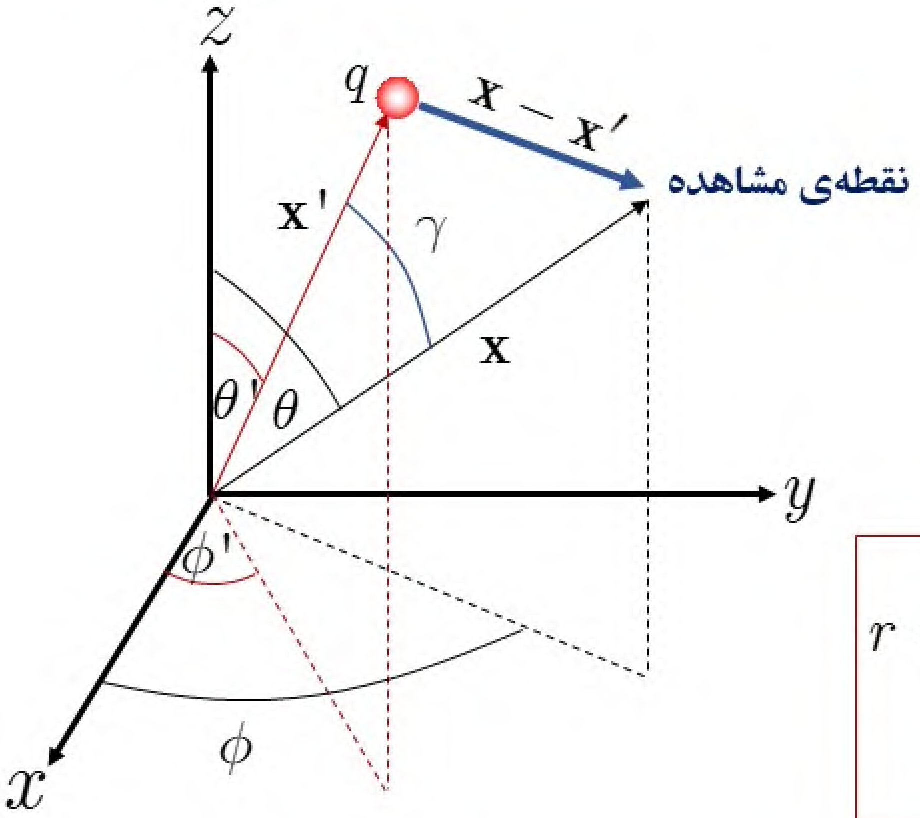
$$f(\theta=0,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}A_{l0}P_l(\cos\theta)$$

$$A_{l0}=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}f(\theta,\phi)P_l(\cos\theta)d(\cos\theta)d\phi$$

$$\nabla^2\Phi(r,\theta,\phi) = 0$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^{l} + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}}$$

$$r < r' \quad \rightarrow \quad \Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'\sqrt{\frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + 1}}$$

$$r' < r \quad \rightarrow \quad \Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}}$$

$$r < r' \quad \rightarrow \qquad \Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'\sqrt{\frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + 1}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\left(\frac{r}{r'}\right)^l$$

$$r' < r \quad \rightarrow \qquad \Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\left(\frac{r'}{r}\right)^l$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$$

قضیه‌ی جمع

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

شاد و مهربان باشید