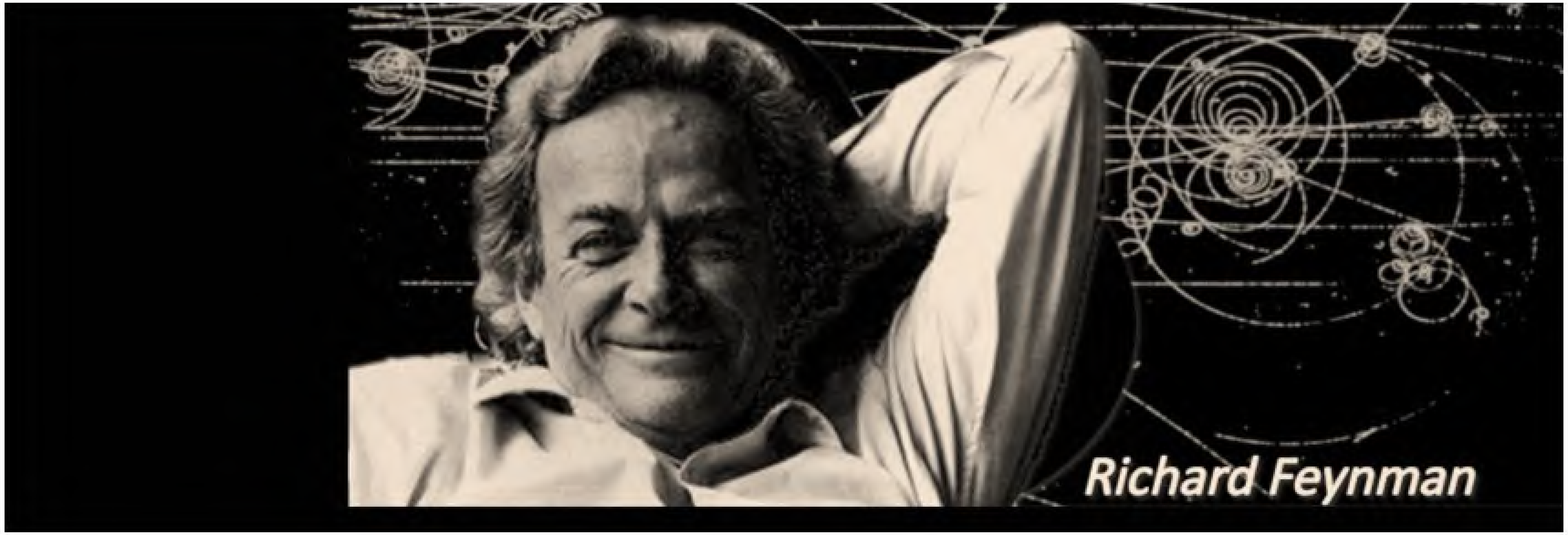
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و هشتم

مسائل حل شده- دستگاه مختصات کروی

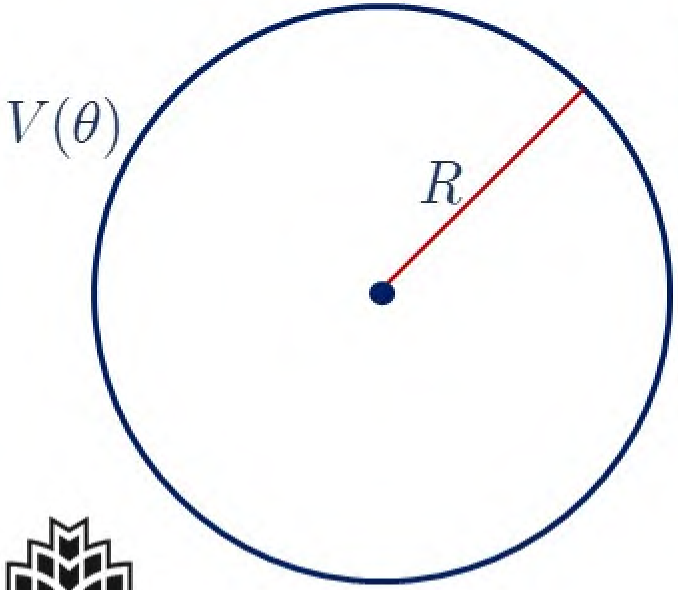
Solved Problems-Spherical Coordinates

دانشگاه خوارزمی

مثال: کره‌ای به شعاع R با پتانسیل سطح $V(\theta)$ در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی را داخل و خارج کره پیدا کنید.

روش اول: استفاده از تابع گرین

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{r'^2\,r^2}{R^2}+R^2-2rr'\cos\gamma}}}$$



$$\boxed{\Phi(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \cancelto{0}{\rho(\mathbf{x}')}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')dv'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'}$$

برای خارج کره

$$\boxed{\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}=\vec{\nabla}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(-\hat{\mathbf{r}})=-\frac{r^2-R^2}{R\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}}$$

برای داخل کره

$$\boxed{\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}=\vec{\nabla}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(\hat{\mathbf{r}})=\frac{r^2-R^2}{R\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}}$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \nabla G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{r^2-R^2}{R\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

برای خارج کره

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{r^2-R^2}{4\pi R}\oint\frac{\Phi(R,\theta',\phi')}{\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}da' = \frac{R(r^2-R^2)}{4\pi}\oint\frac{V(\theta')}{\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}d\Omega'$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \nabla G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{r^2-R^2}{R\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}$$

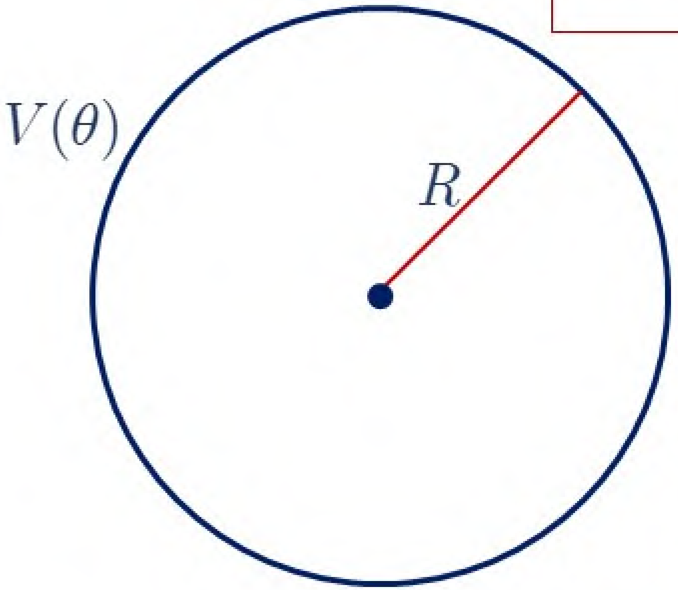
برای داخل کره

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{R(r^2-R^2)}{4\pi}\oint\frac{V(\theta',\phi')}{\left(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma\right)^{3/2}}d\Omega'$$

دانشگاه خوارزمی

روش دوم : بسط بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$$



برای داخل کره

$$r < R \to B_l = 0$$

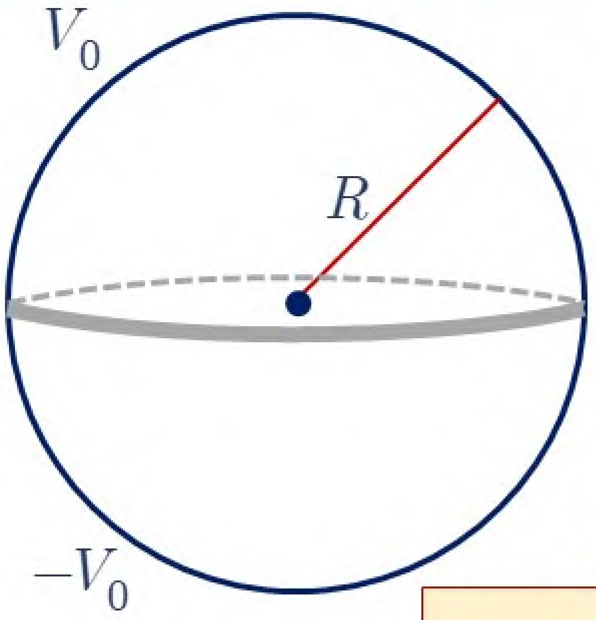
$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi(R,\theta) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta)$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

برای خارج کره

$$r > R \to \Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \to B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1}\int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$



الف) داخل کره $r < R$

$$V(\theta) = \begin{cases} +V_0 & 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -V_0 & \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^{\pi} V(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2l+1}{2R^l}V_0\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right]$$

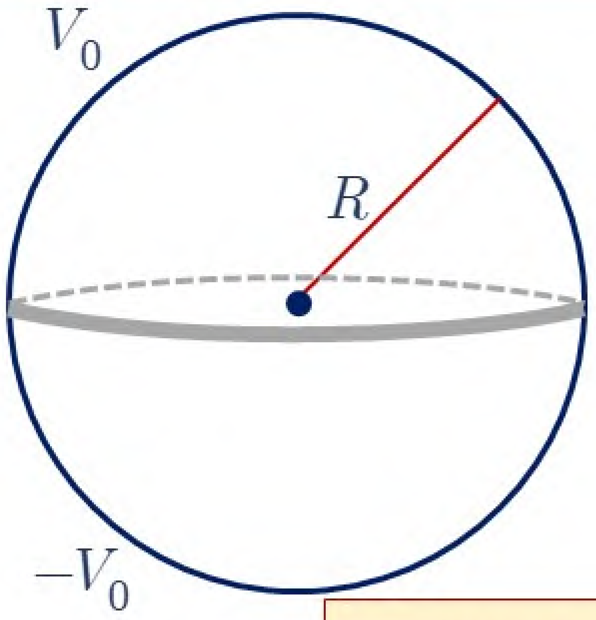
$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}V_0\left[\int_0^1 P_l(\cos\theta)d(\cos\theta) - \int_{-1}^0 P_l(\cos\theta)d(\cos\theta)\right] = \begin{cases} 0 & l = 2n \\ 2\int_0^1 P_l(\cos\theta)d(\cos\theta) & l = 2n+1 \end{cases}$$

$$A_{2n} = 0; \quad A_{2n+1} = \frac{4n+3}{R^{2n+1}}V_0\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(4n+3\right)(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$$

دانشگاه خوارزمی



ب) خارج کره $\quad r > R$

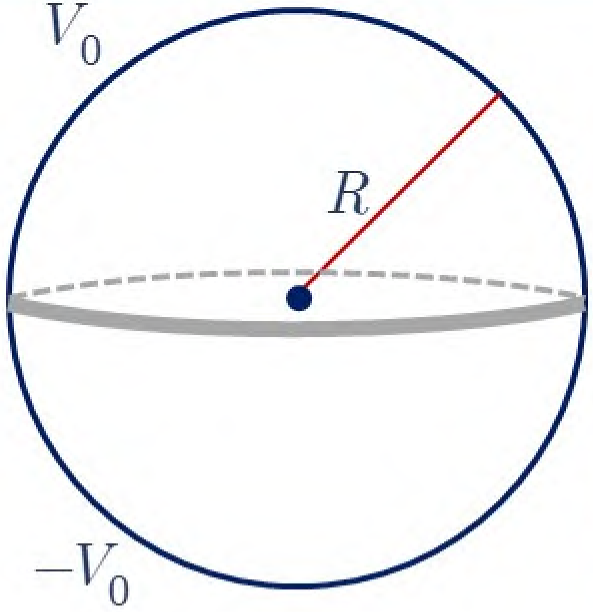
$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{2l+1}{2} R^{l+1} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ &= \frac{2l+1}{2} R^{l+1} V_0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \right] \end{aligned}$$

$$B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1} V_0 \left[\int_0^1 P_l(\cos\theta) d(\cos\theta) - \int_{-1}^0 P_l(\cos\theta) d(\cos\theta) \right] = \begin{cases} 0 & l = 2n \\ 2\int_0^1 P_l(\cos\theta) d(\cos\theta) & l = 2n+1 \end{cases}$$

$$B_{2n} = 0; \quad B_{2n+1} = (4n+3) R^{2n+2} V_0 \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n+3)(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta)$$



$$\Phi(r,\theta) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(4n+3\right)(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta); \quad r > R$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(4n+3\right)(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta); \quad r < R$$

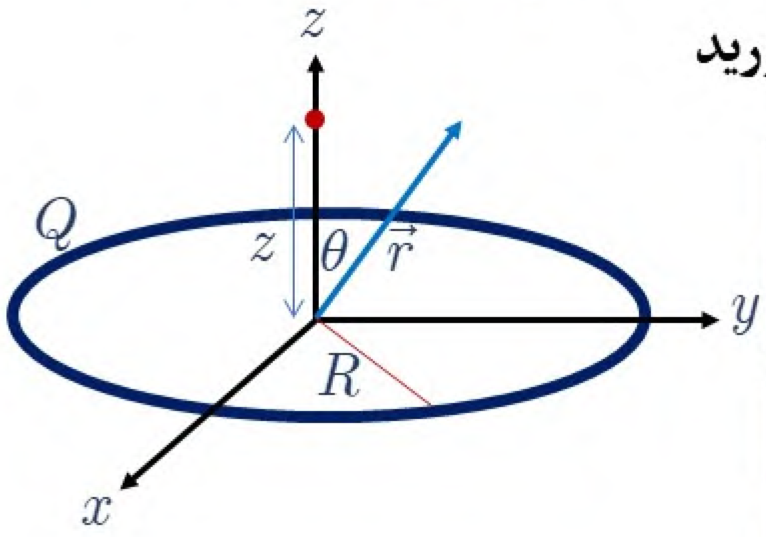
$$\frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta); \quad r > R$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta); \quad r < R$$

اگر در یک مسئله که تقارن سمتی دارد، پتانسیل را در یک ناحیه، مثلاً محور z داشته باشیم، می‌توانیم ضرائب A_l و B_l را پیدا کنیم

مثال: پتانسیل الکتریکی ناشی از یک حلقه‌ی باردار با چگالی خطی یکنواخت را به دست آورید



با توجه به تقارن سمتی مسئله می‌توان نوشت:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$

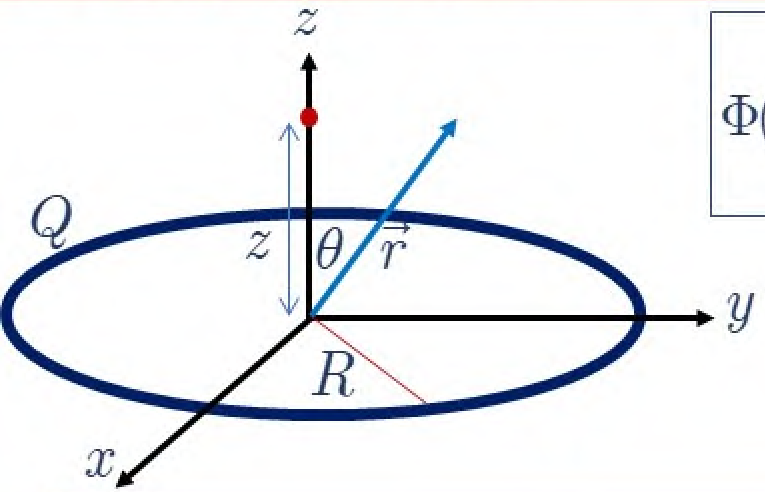
پتانسیل بر روی محور z برابر است با

$$\Phi(r=z,0) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right]P_l(1)$$

اما قبلا با انتگرال گیری پتانسیل را روی محور z به دست آورده‌ایم:

$$\Phi\left(z\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$$

آن را برحسب توان‌هایی از z بسط می دهیم



$$\Phi(r=z,0)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right]$$

$$\Phi(z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

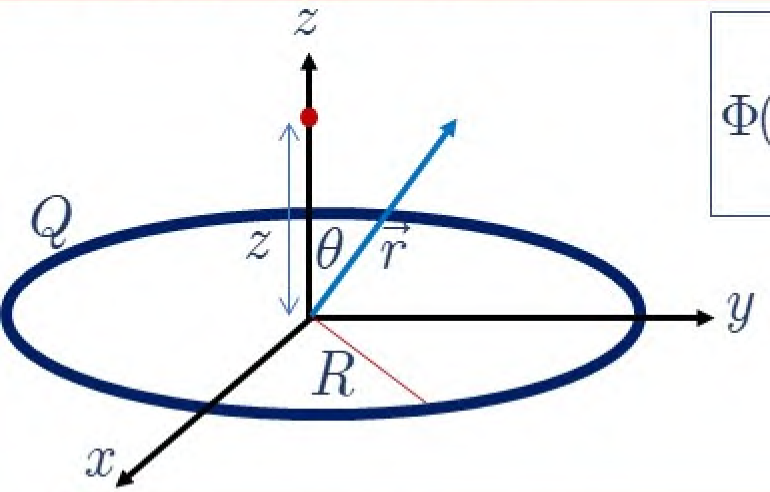
$$\Phi(z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

برای $z<R$

$$\Phi(z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}+\frac{3}{8}\frac{z^4}{R^4}-\frac{5}{16}\frac{z^6}{R^6}+\cdots\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{z}{R}\right)^{2n}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{z^{2n}}{R^{2n+1}}$$

$$for\ z<R \quad B_l=0\ and\ A_l=\begin{cases}0 & l=2n+1\\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{1}{R^{2n+1}} & l=2n\end{cases}$$

$$\Phi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{r^{2n}}{R^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta)$$



$$\Phi(r=z,0)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right]$$

$$\Phi(z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\Phi(z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

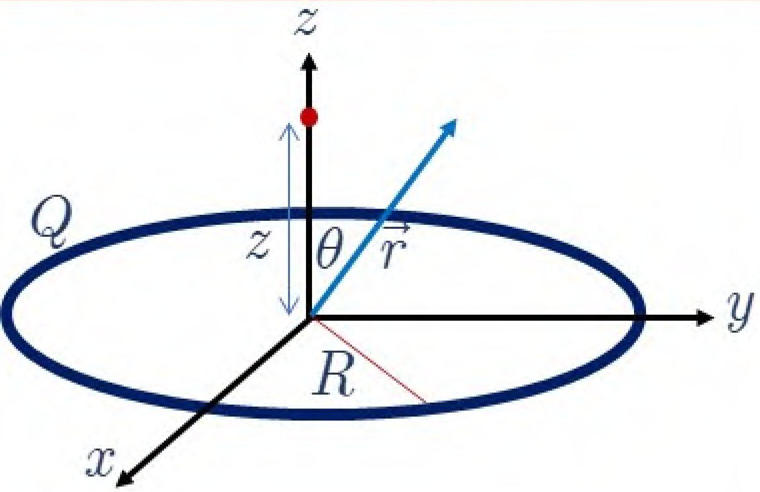
برای $z>R$

$$\Phi(z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+\frac{3}{8}\frac{R^4}{z^4}-\frac{5}{16}\frac{R^6}{z^6}+\cdots\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{R}{z}\right)^{2n}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{R^{2n}}{z^{2n+1}}$$

$$\text{for } z>R \quad A_l=0 \text{ and } B_l=\begin{cases}0 & l=2n+1\\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}R^{2n} & l=2n\end{cases}$$

$$\Phi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{R^{2n}}{r^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta)$$

دانشگاه خوارزمی

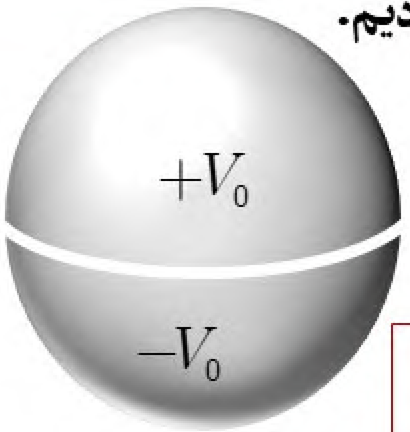


$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{R^{2n}}{r^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta) & r > R \\ \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{r^{2n}}{R^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta) & r < R \end{cases}$$

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\dfrac{R^{2n}}{r^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta) & r > R \\ \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\dfrac{r^{2n}}{R^{2n+1}}P_{2n}(\cos\theta) & r < R \end{cases}$$

مثال: برای مسئله‌ی دو نیم کره در پتانسیل‌های V_0 و $-V_0$ پتانسیل الکتریکی را بر روی محور z به دست آوردیم.



$$\Phi(z) = V_0\left(1 - \frac{z^2 - R^2}{z\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

پتانسیل الکتریکی را در همه‌ی نقاط خارج از کره، برحسب چند جمله‌ای های لژاندر بنویسید

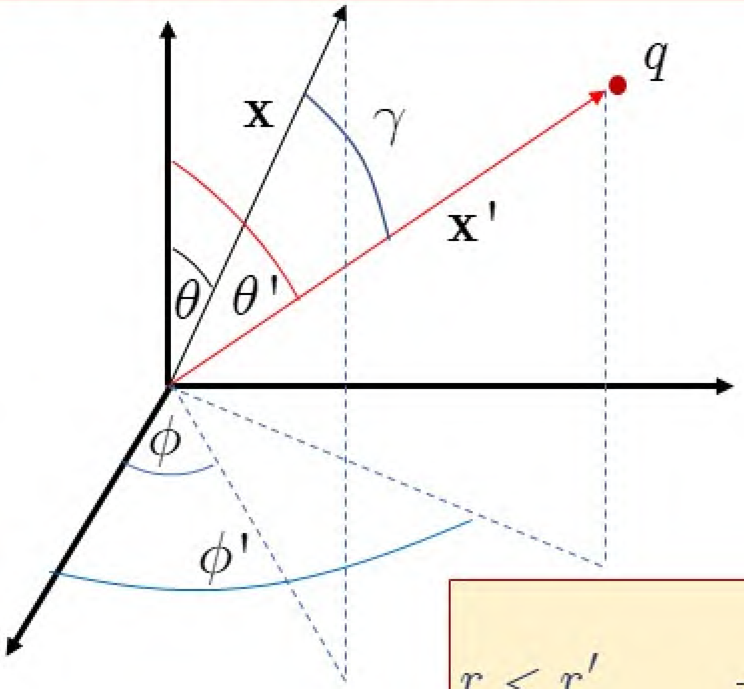
$$\Phi(z) = V_0\left(1 - \frac{z^2\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)}{z^2\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}\right) = V_0\left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = V_0\left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right]$$

$$\Phi(z) = V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(4n+3\right)\left(2n\right)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{R}{z}\right)^{2n+2} = V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{R}{z}\right)^{2n+2}; \qquad z > R$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta); \qquad r > R$$

دانشگاه خوارزمی



$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}}$$

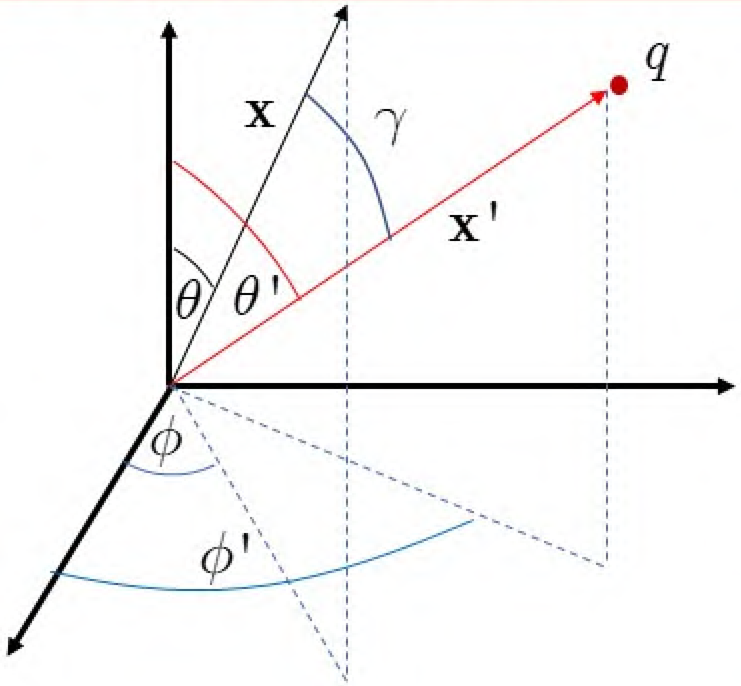
$r < r'$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r'\sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + \frac{r^2}{r'^2}}} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{r'^{l+1}}P_l(\cos\gamma)$$

$r > r'$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\gamma)$$

دانشگاه خوارزمی



$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}$$

$$r < r' \qquad \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{l} P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

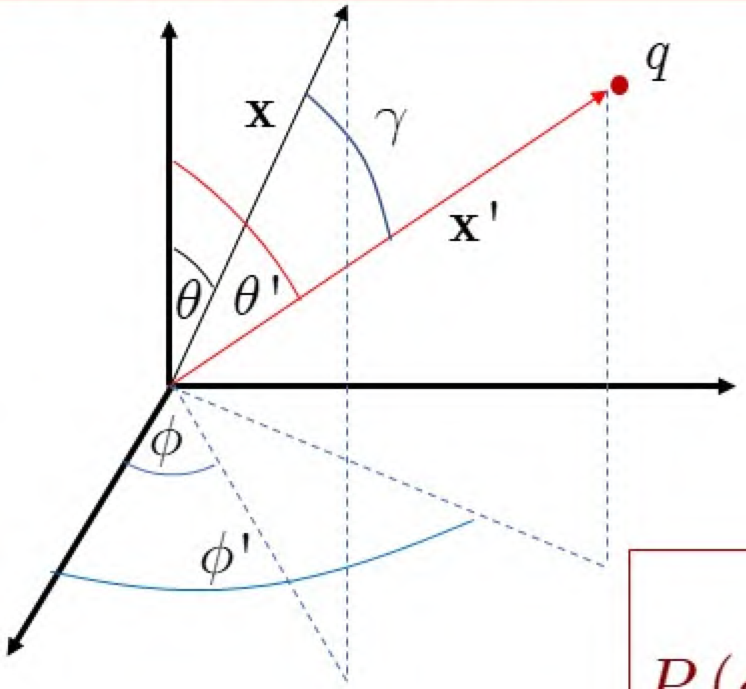
$$r > r' \qquad \frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

$$\frac{1}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^{\,l}}{r_>^{\,l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^{\,l}}{r_>^{\,l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر



$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^{\,l}}{r_>^{\,l+1}}P_l(\cos\gamma)}$$

$$\boxed{\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')}$$

$$\boxed{P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

قضیه‌ی جمع

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی