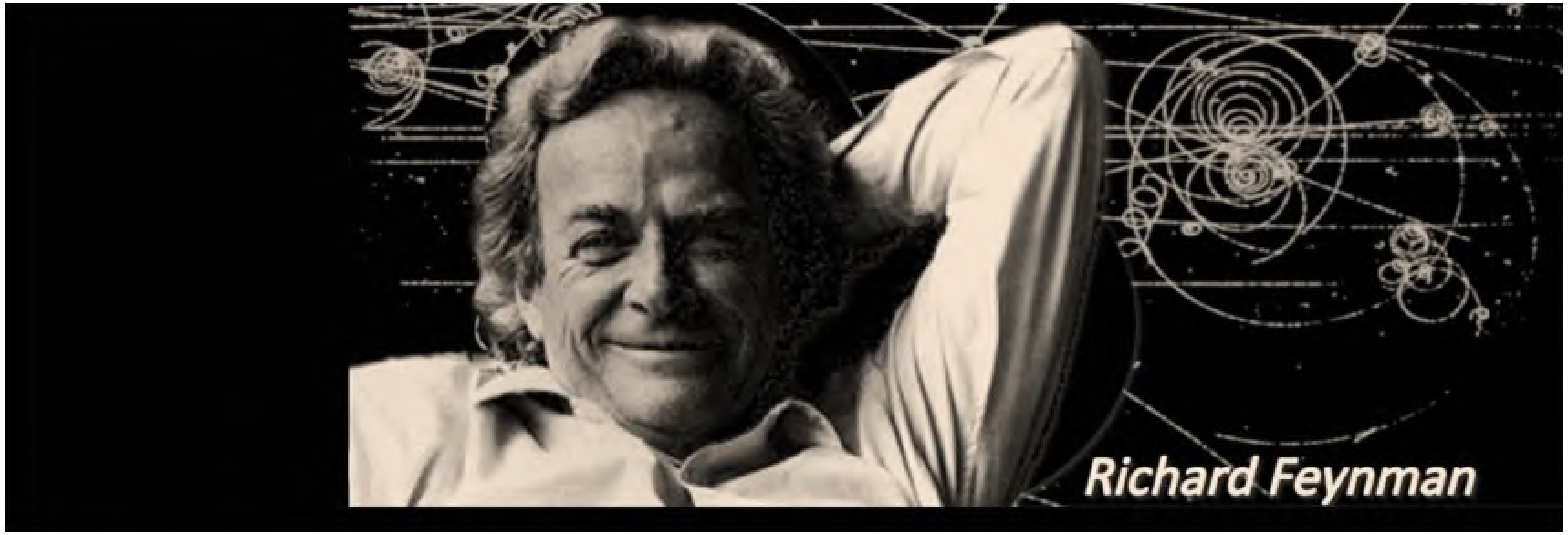
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس بیست و نهم

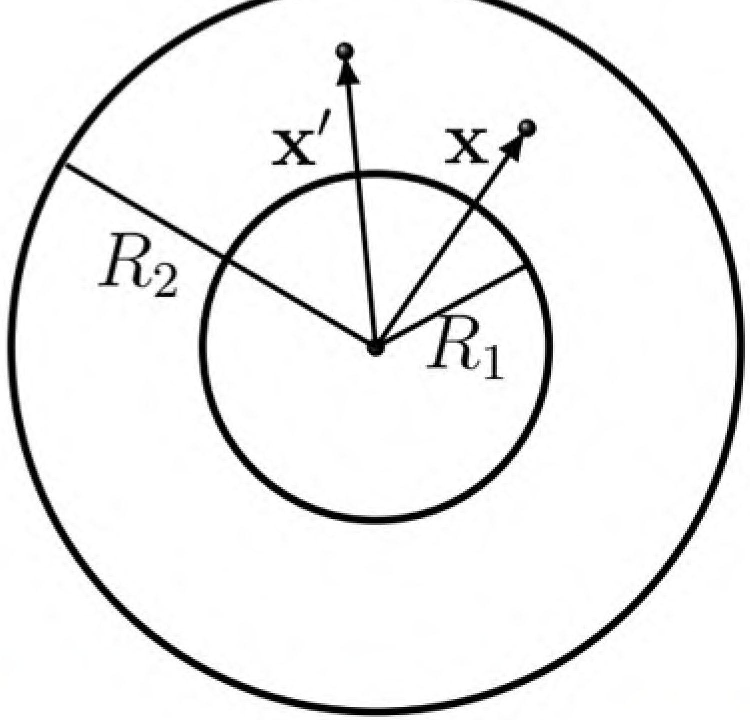
بسط تابع گرین در مختصات کروی

Expansion of Green Functions in Spherical Coordinates

دانشگاه خوارزمی

می‌خواهیم تابع گرین را برای فضای بین دو کره پیدا کنیم. در واقع مسئله این است که در فضای بین دو کره یک چگالی بار داریم و می‌خواهیم معادله‌ی پواسون را حل کنیم. برای این منظور تابع گرین سیستم را پیدا می‌کنیم. مسئله را برای شرایط دیریکله حل می‌کنیم. در این شرایط تابع گرین در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 G(\mathrm{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$
$$G(r = R_1, \mathbf{x}') = G(r = R_2, \mathbf{x}') = 0$$



تابع دلتای دیراک در دستگاه مختصات کروی

$$
\begin{aligned}
\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} \\
&= \frac{\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')}{r^2} \\
&= \frac{\delta(r-r')\delta(\Omega-\Omega')}{r^2}
\end{aligned}
$$

بسط تابع دلتا را برحسب هماهنگ‌های کروی Y_{lm}ها می‌نویسیم (این همان رابطه‌ی کامل بودن Y_{lm}هاست)

$$
\delta(\Omega-\Omega') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} Y^*_{lm}\left(\theta',\phi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)
$$

بسط تابع گرین را نیز برحسب هماهنگ‌های کروی به شکل زیر می‌نویسیم

$$
G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}(r,r',\theta',\phi')Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)
$$

دانشگاه خوارزمی

عمل‌گر لاپلاسی را بر روی این تابع گرین اثر می‌دهیم.

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}(r,r',\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\nabla_{\theta\phi}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla_{\theta\phi}^2 Y_{lm}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\nabla^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \left(\nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2\right)G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\frac{\delta(r-r')\delta(\Omega-\Omega')}{r^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \left(\nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta\phi}^2\right) G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\,\frac{\delta(r-r')\delta(\Omega-\Omega')}{r^2}}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_{lm}}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \\
&= -4\pi\,\frac{\delta(r-r')\delta(\Omega-\Omega')}{r^2} \\
&= -4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{\delta(r-r')}{r^2}Y_{lm}^*(\theta',\phi')\,Y_{lm}(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial A_{lm}\left(r;r',\theta',\phi'\right)}{\partial r}\right)-\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}A_{lm}\left(r;r',\theta',\phi'\right)\right]=-4\pi\frac{\delta(r-r')}{r^2}Y_{lm}^{*}\left(\theta',\phi'\right)$$

اگر بنویسیم:

$$A_{lm}\left(r;r',\theta',\phi'\right)=g_l(r,r')Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')$$

در این صورت

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d}{dr}g_l(r;r')\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r;r')=-4\pi\frac{\delta(r-r')}{r^2}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_l(r;r')Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}g_l(r;r')\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r;r')=-4\pi\frac{\delta(r-r')}{r^2}}$$

$$G(r=R_1,\mathbf{x}')=G(r=R_2,\mathbf{x}')=0\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} g_l(R_1;r')=g_l(R_2;r')=0 \\ g_l(r;R_1)=g_l(r;R_2)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{r\neq r'\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}g_l(r;r')\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r;r')=0}$$

$$
r \neq r' \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}g_l(r;r')\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r;r') = 0
$$

در معادله‌ی فوق برای $r < r'$ باید شرط $g_l(R_1;r') = 0$ را و برای $r > r'$ باید شرط $g_l(R_2;r') = 0$ را به کار ببریم.پاسخ معادله‌ی فوق به شکل ترکیبی از r^l و $r^{-(l+1)}$ است. با توجه به شرایط مرزی، پاسخ معادله‌ی فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$
g_l(r;r') = \begin{cases} \left(r^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)f(r') & r < r' \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r^{l+1}} - \dfrac{r^l}{R_2^{2l+1}}\right)h(r') & r > r' \end{cases}
$$

دانشگاه خوارزمی

تابع $g_l(r,r')$ باید نسبت به r و r' متقارن باشد

$$g_l(r;r') = \begin{cases} \left(r^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) f(r') & r < r' \\ \\ \left(\dfrac{1}{r^{l+1}} - \dfrac{r^l}{R_2^{2l+1}}\right) h(r') & r > r' \end{cases}$$

$$g_l(r';r) = \begin{cases} \left(r'^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right) f(r) & r' < r \\ \\ \left(\dfrac{1}{r'^{l+1}} - \dfrac{r'^l}{R_2^{2l+1}}\right) h(r) & r' > r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(r') &= C_l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{R_2^{2l+1}}\right) \\ h(r') &= C_l \left(r'^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right) \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

$$g_l(r;r') = \begin{cases} C_l\left(r^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)\left(\dfrac{1}{r'^{l+1}} - \dfrac{r'^l}{R_2^{2l+1}}\right) & r < r' \\ \\ C_l\left(\dfrac{1}{r^{l+1}} - \dfrac{r^l}{R_2^{2l+1}}\right)\left(r'^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right) & r > r' \end{cases}$$

توجه کنید که در تابع فوق پیوسته بودنِ تابع $g_l(r,r')$ (و در نتیجه تابع گرین) در نقطه‌ی $r = r'$ تضمین شده است. اما مشتقِ این تابع در در نقطه‌ی $r = r'$ پیوسته نیست. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دیفرانسیل، این نکته قابل بررسی است. معادله را در $r^2 dr$ ضرب می‌کنیم و در بازه‌ی $[r' - \alpha, r' + \alpha]$ انتگرال می‌گیریم و α را به سمت صفر میل می‌دهیم

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int_{r'-\alpha}^{r'+\alpha} dr\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d}{dr}\,g_l(r;r')\right) - l(l+1)\,\cancelto{0}{\int_{r'-\alpha}^{r'+\alpha} dr g_l(r;r')}\right] = -4\pi\,\lim_{\alpha\to 0}\int_{r'-\alpha}^{r'+\alpha}\delta(r-r')dr$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{r'-\alpha}^{r'+\alpha} d\left(r^2\,\frac{d}{dr}\,g_l(r;r')\right) = -4\pi$$

$$\frac{d}{dr}\,g_l(r'+0;r') - \frac{d}{dr}\,g_l(r'-0;r') = -\frac{4\pi}{r'^2}$$

$$C_l = \frac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right]}$$

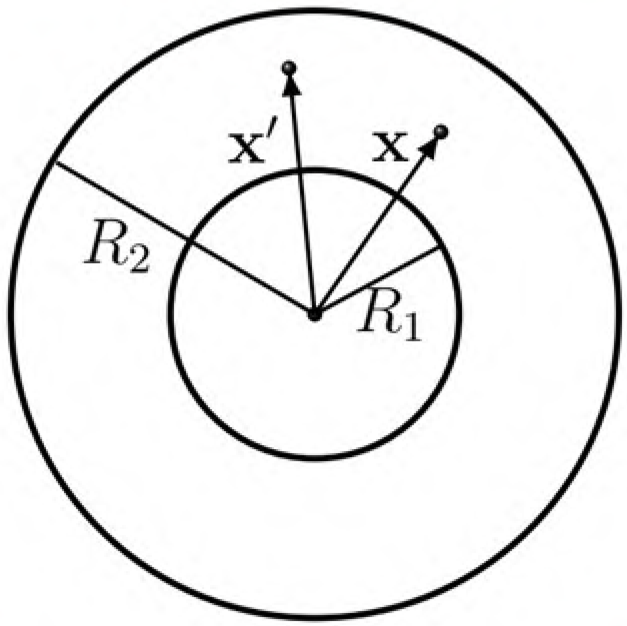
دانشگاه خوارزمی

$$g_l(r;r') = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right]}\left(r^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)\left(\dfrac{1}{r'^{l+1}} - \dfrac{r'^l}{R_2^{2l+1}}\right) & r < r' \\[2ex] \dfrac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right]}\left(\dfrac{1}{r^{l+1}} - \dfrac{r^l}{R_2^{2l+1}}\right)\left(r'^l - \dfrac{R_1^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right) & r > r' \end{cases}$$

$$g_l(r;r') = \frac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right]}\left(r_<^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{R_2^{2l+1}}\right)$$

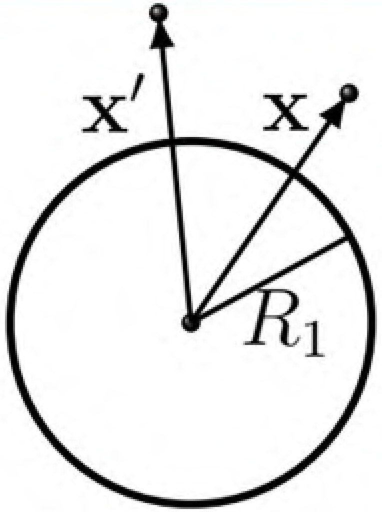
دانشگاه خوارزمی

$$\nabla^2 G(\mathrm{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$
$$G(r = R_1, \mathbf{x}') = G(r = R_2, \mathbf{x}') = 0$$



$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^{*}(\theta', \phi')}{(2l+1)\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{R_2^{2l+1}} \right)$$

دانشگاه خوارزمی



الف $R_2 \to \infty$

یعنی در واقع یک کره به شعاع R_1 داریم و می‌خواهیم تابع گرین را در خارج آن به دست آوریم.

این مسئله را قبلا به روش تصویر حل کردیم

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}\left(\theta,\phi\right) Y_{lm}^{*}\left(\theta',\phi'\right)}{(2l+1)} \left(r_<^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} \right)$$

بدین ترتیب با داشتن تابع گرین برای فضای خارج کره، پاسخ معادله‌ی پواسون با شرایط دیریکله

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$
$$\Phi(\mathbf{x})\Big|_S = f(\theta,\phi)$$

به شکل زیر خواهد بود

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')dv' - \frac{1}{4\pi}\oint_S f(\theta',\phi')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'$$

که در آن

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \vec{\nabla} G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot\hat{\mathbf{n}}' = \vec{\nabla} G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\partial G(r,\theta,\phi;r',\theta',\phi')}{\partial r'}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')dv' - \frac{1}{4\pi}\oint_S f(\theta',\phi')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \vec{\nabla} G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\partial G(r,\theta,\phi;r',\theta',\phi')}{\partial r'}$$

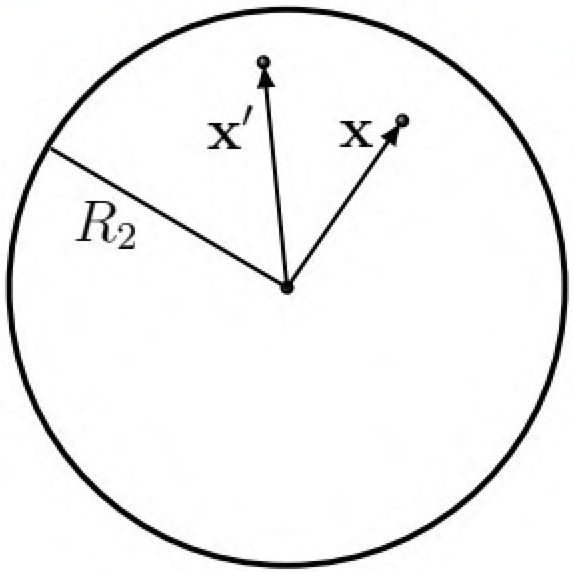
$$\left.\frac{\partial G(r,\theta,\phi;r',\theta',\phi')}{\partial r'}\right|_{r'=R_1} = \left[\frac{\partial}{\partial r'}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}\left(r_<^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')\right]_{r'=R_1}$$

$$= \left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{R_1^{2l+1}}{r^{l+1}r'^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')\right]_{r'=R_1}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}\left(\frac{lR_1^{l-1}}{r^{l+1}} + \frac{(l+1)R_1^{2l+1}}{r^{l+1}R_1^{l+2}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

$$= 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{R_1^{l-1}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

دانشگاه خوارزمی



ب) $R_1 \to 0$

یعنی می‌خواهیم تابع گرین داخل کره را به دست آوریم.

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi')}{(2l+1)} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{R_2^{2l+1}}\right)}$$

بدین ترتیب با داشتن تابع گرین برای فضای داخل کره، پاسخ معادله‌ی پواسون با شرایط دیریکله

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(\mathbf{x})\Big|_S = f(\theta,\phi)$$

به شکل زیر خواهد بود

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')dv' - \frac{1}{4\pi}\oint_S f(\theta',\phi')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'}$$

که در آن

$$\boxed{\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \vec{\nabla}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot\hat{\mathbf{n}}' = \vec{\nabla}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial G(r,\theta,\phi;r',\theta',\phi')}{\partial r'}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')dv' - \frac{1}{4\pi}\oint_S f(\theta',\phi')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \vec{\nabla} G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial G(r,\theta,\phi;r',\theta',\phi')}{\partial r'}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G(r,\theta,\phi;r',\theta',\phi')}{\partial r'}\right|_{r'=R_2} &= \left[\frac{\partial}{\partial r'}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{R_2^{2l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')\right]_{r'=R_2} \\
&= \left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}r^l\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{r'^{l+1}}-\frac{r'^l}{R_2^{2l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')\right]_{r'=R_2} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)}r^l\left(-\frac{l+1}{R_2^{l+2}}-\frac{lR_2^{l-1}}{R_2^{2l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi') \\
&= -4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{r^l}{R_2^{l+2}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')
\end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی

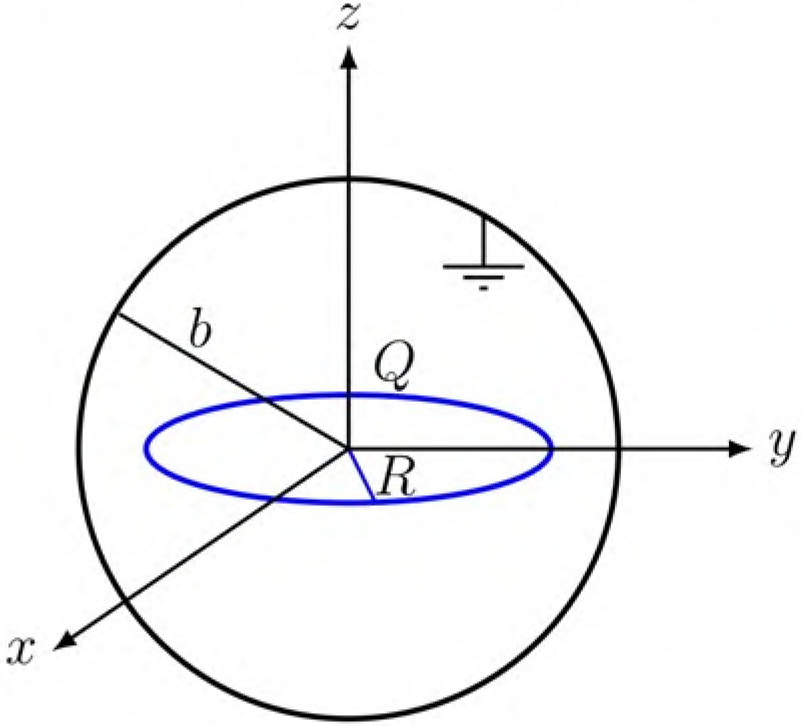
ج) $R_1 \to 0$ و $R_2 \to \infty$

این حالت در واقع تابع گرین فضای تهی (بدون مرز) را به دست می‌دهد.

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)Y_{lm}^{*}\left(\theta',\phi'\right)}{(2l+1)}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\ \mathbf{x}-\mathbf{x}'\ |} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)Y_{lm}^{*}\left(\theta',\phi'\right)}{(2l+1)}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)}$$

پوسته‌ی کروی به شعاع b و پتانسیل صفر در نظر بگیرید که درونِ آن حلقه‌ی دایره‌ای باردار به شعاع $R < b$ قرار دارد. بار حلقه Q و به طور یکنواخت بر آن توزیع شده است. حلقه در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن بر مرکز کره منطبق است. پتانسیل الکتریکی را درون کره پیدا کنید.



حل:

می‌دانیم که با داشتن تابع گرین، پتانسیل الکتریکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'}$$

در این مسئله پتانسیل روی سطح صفر است بنابر این انتگرال دوم صفر می‌شود:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'}$$

حلقه‌ی باردار را به صورت یک چگالی حجمی بار به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r-R)\delta(\cos\theta)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\infty} r'^2 dr' \int_{-1}^{1} d(\cos\theta')\delta(r'-R)\delta(\cos\theta')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0 R^2}\int_0^{2\pi} d\phi' R^2 G(r,\theta,\phi;R,\pi/2,\phi')$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}(\theta,\phi)r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)\int_0^{2\pi} d\phi' Y_{lm}^*(\pi/2,\phi')$$

$r_<$ و $r_>$ مقایسه‌ی بین r و R است

دانشگاه خوارزمی

ادامه‌ی حل :

$$Y^*_{lm}(\pi/2,\phi') = P_l^m(0)e^{-im\phi'}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'}d\phi' = \begin{cases} 0 & m\neq 0 \\ 2\pi & m=0 \end{cases}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0}2\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{l0}(\theta,\phi)r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(0)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0}2\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(0)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

$$P_l(0) = \begin{cases} 0 & l=2n+1 \\ (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} & l=2n \end{cases}$$

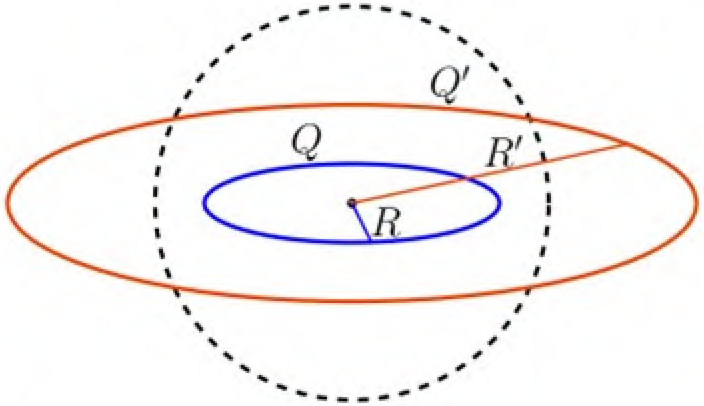
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}r_<^{2n}\left(\frac{1}{r_>^{2n+1}}-\frac{r_>^{2n}}{b^{4n+1}}\right)P_{2n}(\cos\theta)$$

$r_<$ و $r_>$ مقایسه‌ی بین r و R است

این نتیجه شامل دو جمله است

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}r_<^{2n}\left(\frac{1}{r_>^{2n+1}}\right)P_{2n}(\cos\theta)$$

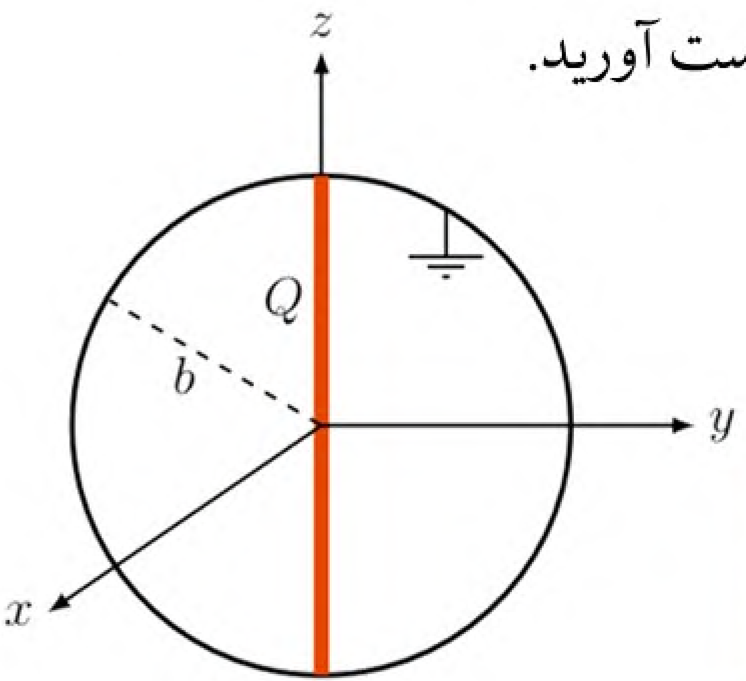
$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}r_<^{2n}\left(-\frac{r_>^{2n}}{b^{4n+1}}\right)P_{2n}(\cos\theta)$$



جمله‌ی اول بیان‌گر پتانسیل ناشی از یک حلقه‌ی باردار با بار Q و شعاع b است و جمله‌ی دوم بیان‌گر پتانسیل به شعاع $R' = \dfrac{b^2}{R}$ و بار $Q' = -\dfrac{b}{R}$. این همان نتیجه‌ای است که با روش تصویر به دست می‌آید.

دانشگاه خوارزمی

مطابق شکل، یک پوسته‌ی رسانا به شعاع b و با پتانسیل صفر در نظر بگیرید. درون کره یک میله‌ی باردار به طول $2b$ و بار یکنواخت Q قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را درون کره به دست آورید.



حل:

می‌دانیم که با داشتن تابع گرین، پتانسیل الکتریکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}da'$$

در این مسئله پتانسیل روی سطح صفر است بنابر این انتگرال دوم صفر می‌شود:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

تابع گرین داخل کره را به شکل زیر به دست آوردیم

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)Y_{lm}^{*}\left(\theta',\phi'\right)}{(2l+1)}r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

برای این مسئله توزیع بار را به کمک تابع دلتا به صورت یک چگالی حجمی بار به شکل زیر می‌نویسیم

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi r'}\left[\delta(\cos\theta'-1)+\delta(\cos\theta'+1)\right]$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \int_0^b r'^2 dr' \left[\frac{\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)}{r'^2}\right] \times$$
$$4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')}{(2l+1)} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

$$\boxed{Y_{lm}^*(\theta',\phi') = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta') e^{-im\phi'}}$$

$2\pi\delta_{m,0}$

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta',\phi') d\phi' = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta') \int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi'$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta',\phi') d\phi' = 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos\theta') \delta_{m,0}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2b}\frac{2\pi}{2\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta')\int_0^b dr'\left[\delta(\cos\theta'-1)+\delta(\cos\theta'+1)\right]\times 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Y_{l,0}Y_{l,0}^*}{(2l+1)}r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{(2l+1)}\int_0^b dr' r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)\times\int_{-1}^{1} d(\cos\theta')\left[\delta(\cos\theta'-1)+\delta(\cos\theta'+1)\right]Y_{l,0}Y_{l,0}^*$$

$$Y_{l,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2b}\sum_{l=0}^{\infty}\underbrace{\left(P_l(1)+P_l(-1)\right)}_{1+(-1)^l}P_l(\cos\theta)\int_0^b dr' r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{2b}\sum_{k=0}^{\infty}P_{2k}(\cos\theta)\int_0^b dr' r_<^{2k}\left(\frac{1}{r_>^{2k+1}}-\frac{r_>^{2k}}{b^{4k+1}}\right)}$$

$$\boxed{\int_0^b dr' r_<^{2k}\left(\frac{1}{r_>^{2k+1}}-\frac{r_>^{2k}}{b^{4k+1}}\right) = \int_0^b dr' \frac{r_<^{2k}}{r_>^{2k+1}} - \frac{1}{b^{4k+1}}\int_0^b dr' r_<^{2k} r_>^{2k}}$$

$$\int_0^b dr' r_<^{2k}\left(\frac{1}{r_>^{2k+1}}-\frac{r_>^{2k}}{b^{4k+1}}\right)=\int_0^b dr'\,\frac{r_<^{2k}}{r_>^{2k+1}}-\frac{1}{b^{4k+1}}\int_0^b dr' r_<^{2k} r_>^{2k}$$

$$k \neq 0$$

$$\int_0^b dr'\,\frac{r_<^{2k}}{r_>^{2k+1}}=\frac{1}{r^{2k+1}}\int_0^r dr' r'^{2k}+r^{2k}\int_r^b \frac{dr'}{r'^{2k+1}}=\frac{4k+1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{2k}\frac{r^{2k}}{b^{2k}}$$

$$\int_0^b dr' r_<^{2k} r_>^{2k}=r^{2k}\int_0^r dr' r'^{2k}+r^{2k}\int_r^b dr' r'^{2k}=\frac{r^{2k}}{2k+1}b^{2k+1}$$

$$\int_0^b dr' r_<^{2k}\left(\frac{1}{r_>^{2k+1}}-\frac{r_>^{2k}}{b^{4k+1}}\right)=\frac{4k+1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{2k}\frac{r^{2k}}{b^{2k}}-\frac{1}{b^{4k+1}}\frac{r^{2k}}{2k+1}b^{2k+1}=\frac{4k+1}{2k(2k+1)}\left(1-\frac{r^{2k}}{b^{2k}}\right)$$

$$k=0 \Rightarrow$$

$$\int_0^b dr' r_<^{2k}\left(\frac{1}{r_>^{2k+1}}-\frac{r_>^{2k}}{b^{4k+1}}\right)=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)\int_0^r dr'+\int_r^b dr'\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{b}\right)=\left(1-\frac{r}{b}\right)+\ln\frac{b}{r}-1+\frac{r}{b}=\ln\frac{b}{r}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{b}\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}(\cos\theta)\int_0^b dr' r_<^{2k}\left(\frac{1}{r_>^{2k+1}} - \frac{r_>^{2k}}{b^{4k+1}}\right)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{b}\left\{\ln\frac{b}{r} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4k+1}{2k(2k+1)}\left(1 - \frac{r^{2k}}{b^{2k}}\right)\right]P_{2k}(\cos\theta)\right\}$$

چگالی سطحی بار بر روی سطح داخلی کره برابر است با

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{E}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})\Big|_{r=b} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{x})\Big|_{r=b} = \epsilon_0 \frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial r}\Bigg|_{r=b}$$

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi b^2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k+1}{2k(2k+1)}P_{2k}(\cos\theta)\right\}$$

شاد و مهربان باشید