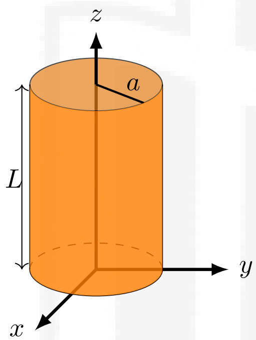
مسئله‌ی اول

استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع L، هم محور با محور z، در نظر بگیرید. یک قاعده‌ی آن در $z=0$ و قاعده‌ی دیگر در $z=L$ قرار دارد. اگر پتانسیل بر روی قاعده‌ها و بدنه‌ی این استوانه با معادلات زیر مشخص شوند، پتانسیل الکتریکی را درون استوانه پیدا کنید.



$$\Phi(\rho,\phi,0)=0$$

$$\Phi(a,\phi,z)=0$$

$$\Phi(\rho,\phi,L)=V(\rho,\phi)$$

حل:

درون استوانه، بار الکتریکی وجود ندارد. بنابر این معادله‌ای که باید حل کنیم، معادله‌ی لاپلاس است:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x})=0$$

مسئله را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل می‌کنیم.

$$\nabla^2\Phi(\rho,\phi,z)=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

مسئله را به روش جداسازی متغیرها حل می‌کنیم. با نوشتن پتانسیل به شکل حاصل ضرب سه تابع $\Phi=R(\rho)Q(\phi)Z(z)$، و قرار دادنِ آن در معادله‌ی لاپلاس به سادگی دیده می‌شود که هر یک از این توابع در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}-k^2Z(z)=0 \quad\longrightarrow\quad Z(z)=\sinh kz,\ \cosh kz$$

$$\frac{d^2Q(\phi)}{d\phi^2}+\nu^2Q(\phi)=0 \quad\longrightarrow\quad Q(\phi)=\sin\nu\phi,\ \cos\nu\phi$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\left(k^2\rho^2-\nu^2\right)R(\rho)=0 \quad\longrightarrow R(\rho)=J_\nu(\rho),\ N_\nu(\rho)$$

تک‌مقدار بودنِ پتانسیل تحت تبدیل $\phi \to \phi + 2\pi$، ایجاب می‌کند که $\nu = m$ عددی صحیح باشد. همچنین متناهی بودن پتانسیل بر روی محور z، یعنی نقاط $\rho = 0$، ایجاب می‌کند که پاسخ‌های N_ν را نداشته باشیم. هم‌چنین صفر بودن پتانسیل بر سطح قاعده‌ی پایین، یعنی در $z = 0$، ایجاب می‌کند که پاسخ $\cosh kz$ را نداشته باشیم. هم‌چنین با توجه به شرط صفر بودن پتانسیل بر بدنه‌ی جانبی استوانه می‌توان نوشت

$$\Phi(a,\phi) = 0 \Rightarrow R(a) = 0 \Rightarrow J_m(ka) = 0$$

بنابر این

$$ka = x_{nm} \Rightarrow k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}$$

بدین ترتیب، به ازای هر n و m، پاسخی برای معادله‌ی لاپلاس داریم و ترکیب همه‌ی آن‌ها نیز طبق قضیه‌ی برهم‌نهی، پاسخ است

$$\Phi(\rho,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho)\sinh k_{mn}z\,[A_{mn}\sin m\phi + B_{mn}\cos m\phi]$$

هنوز یک شرط مرزی، یعنی پتانسیل بر روی قاعده‌ی بالایی استوانه، باقی‌مانده است. برای پیدا کردن ضرایب A_{nm} و B_{nm}، این شرط را به کار می‌بریم:

$$\Phi(\rho,\phi,L) = V(\rho,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho)\sinh k_{mn}L\,[A_{mn}\sin m\phi + B_{mn}\cos m\phi]$$

برای پیدا کردن A_{nm}، طرفین رابطه را در $\rho J_q(k_{ql}\rho)\sin q\phi$ ضرب می‌کنیم و روی ρ از 0 تا a و روی ϕ از 0 تا 2π انتگرال می‌گیریم. هنگام انتگرال‌گیری از شرط تعامد توابع مثلثاتی و نیز شرط تعامدتوابع بسل استفاده می‌کنیم

$$\int_0^{2\pi} \sin q\phi \sin m\phi d\phi = \pi\delta_{q,m}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos q\phi \cos m\phi d\phi = \pi\delta_{q,m}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin q\phi \cos m\phi d\phi = 0$$

$$\int_0^{a} \rho J_q(k_{ql}\rho) J_q(k_{qn}\rho) d\rho = \frac{a^2}{2} J_1^2(k_{qn}a)\delta_{l,n}$$

بدین ترتیب A_{mn}ها به شکل زیر به دست می‌آیند

$$A_{mn}=\frac{2}{\pi a^2[\sinh k_{mn}L][J_{m+1}^2(k_{mn}a)]}\int_0^a \rho d\rho\int_0^{2\pi}V(\rho,\phi)J_m(k_{mn}\rho)\sin m\phi d\phi$$

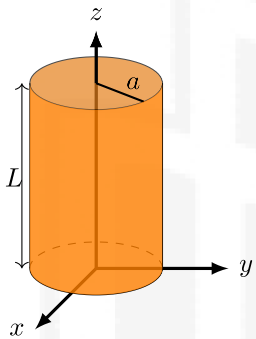
و به طور کاملاً مشابه

$$B_{mn}=\frac{2}{\pi a^2[\sinh k_{mn}L][J_{m+1}^2(k_{mn}a)]}\int_0^a \rho d\rho\int_0^{2\pi}V(\rho,\phi)J_m(k_{mn}\rho)\cos m\phi d\phi$$

$$B_{0n}=\frac{21}{\pi a^2[\sinh k_{0n}L][J_1^2(k_{0n}a)]}\int_0^a \rho d\rho\int_0^{2\pi}V(\rho,\phi)J_0(k_{0n}\rho)\phi d\phi$$

مسئله‌ی دوم

مثال قبل را برای حالتی که پتانسیل بر روی قاعده‌ی استوانه مقدار ثابت V_0 باشد، حل کنید.



$$\Phi\Big|_{z=0} = 0$$
$$\Phi\Big|_{\rho=a} = 0$$
$$\Phi\Big|_{z=L} = V_0$$

حل:

می‌توانیم از نتیجه‌ی مثال قبل استفاده کنیم و نشان دهیم که تمام ضرایب A_{mn} و B_{mn} برابر با صفرند به جز B_{0n} و پاسخ نهایی را بنویسیم. یا این که مسئله را از ابتدا حل کنیم و البته توجه کنیم که در این حالت پتانسیل مستقل از ϕ است. بنابر این تابع پتانسیل را به شکل $\Phi(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ می‌نویسیم. با قرار دادن در معادله و جداسازی متغیرها خواهیم دید

$$\nabla^2\Phi(\rho, z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$
$$\frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k^2$$
$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z) = 0 \quad \longrightarrow \quad Z(z) = A\sinh kz + B\cosh kz$$
$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \left(k^2\rho^2\right)R(\rho) = 0 \quad \longrightarrow R(\rho) = CJ_0(k\rho) + DN_0(k\rho)$$

صفر بودنِ پتانسیل در $z = 0$ ایجاب می‌کند که $B = 0$،

$$\Phi(\rho, 0) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

و متناهی بودنِ پتانسیل بر روی محور z، یعنی برای نقاط $\rho = 0$، ایجاب می‌کند که جمله‌ی N_0 نداشته باشیم

$$\Phi(0, z) \neq \infty \Rightarrow D = 0$$

و شرط صفر بودنِ پتانسیل بر سطح جانبی استوانه موجب می‌شود که k مقادیر گسسته‌ای داشته باشد

$$\Phi(0,z)=0 \Rightarrow R(0)=a \Rightarrow J_0(ka)=0 \Rightarrow ka=x_{0,n} \Rightarrow k_{0,n}=\frac{x_{0,n}}{a}$$

بدین ترتیب به ازای هر n پاسخی برای معادله‌ی لاپلاس داریم و طبق قضیه‌ی برهم‌نهی، ترکیب همه‌ی آن‌ها نیز پاسخ معادله است. یعنی پتانسیل الکتریکی را درون استوانه می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\Phi(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_{0,n}\rho)\sinh(k_{0,n}z)$$

A_nها را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط مرزی برقرار باشد. در واقع با توجه به مطالب گفته شده، این تابع، شرایط مرزی در $z=0$ و $\rho=0$ و $\rho=a$ را برقرار می‌کند. شرط باقی‌مانده، پتانسیل در $z=L$ است.

$$\Phi(\rho,L)=V_0=\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_{0,n}\rho)\sinh(k_{0,n}L)$$

براب پیدا کردنِ A_n از رابطه‌ی تعامد توابع بسل استفاده می‌کنیم. طرفین رابطه‌ی فوق را در $\rho J_0(k_{0,m}\rho)$ ضرب می‌کنیم و روی ρ از 0 تا a انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}
V_0\int_0^a \rho J_0(k_{0,m})d\rho &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_{0,n}L)\int_0^a \rho J_0(k_{0,m}\rho)J_0(k_{0,n}\rho)d\rho \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_{0,n}L)\frac{a^2}{2}J_1^2(k_{0,m}a)\delta_{n,m} \\
&= A_m \sinh(k_{0,m}L)\frac{a^2}{2}J_1^2(k_{0,m}a)
\end{aligned}$$

بدین ترتیب

$$A_n=\frac{2}{a^2\sinh(k_{0,n}L)J_1^2(k_{0,n}a)}V_0\int_0^a \rho J_0(k_{0,n})d\rho$$

برای محاسبه‌ی انتگرال رابطه‌ی فوق، از یکی از روابط بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)]=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

اگر در رابطه‌ی فوق، قرار دهیم $\nu=1$، آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$$

و یا

$$\frac{d}{d\rho}[\rho J_1(k\rho)] = k\rho J_0(k\rho)$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\int_0^a d[\rho J_1(k\rho)] = k\int_0^a \rho J_0(k\rho)$$

و در نتیجه

$$\int_0^a \rho J_0(k\rho)d\rho = \frac{a}{k}J_1(ka)$$

بنابر این، ضرایب A_n در این مسئله به شکل زیر تعیین می‌شود

$$A_n = \frac{2V_0}{a^2\sinh(k_{0,n}L)J_1^2(k_{0,n}a)}\frac{a}{k_{0,n}}J_1(k_{0,n}a)$$

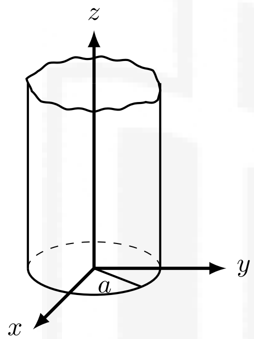
و در نهایت پتانسیل درون استوانه برابر است با

$$\Phi(\rho,z) = 2V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(k_{0,n}\rho)}{k_{0,n}aJ_1(k_{0,n}a)}\frac{\sinh(k_{0,n}z)}{\sinh(k_{0,n}L)}$$

و یا

$$\Phi(\rho,z) = 2V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(x_{0,n}\rho/a)}{x_{0,n}J_1(x_{0,n})}\frac{\sinh(x_{0,n}z/a)}{\sinh(x_{0,n}L/a)}$$

مسئله‌ی سوم استوانه‌ی بسیار درازی با معادله‌ی $\rho = a$ و $0 \leq z < \infty$ هم محور با محور z در نظر بگیرید. اگر پتانسیل بر روی سطح این استوانه با معادلات زیر مشخص شوند، پتانسیل الکتریکی را درون استوانه پیدا کنید.



$$\Phi\Big|_{z=0} = V_0$$

$$\Phi\Big|_{\rho=a} = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \Phi = 0$$

حل:

این مسئله بسیار شبیه مسئله‌ی قبل است (توضیحات مسئله‌ی قبل را با دقت مطالعه کنید). در این‌جا شرط مرزی سوم، ایجاب می‌کند که پاسخ بخش z را به شکل زیر بنویسیم

$$Z(z) = e^{-kz}$$

مانند مسئله‌ی قبل، صفر بودنِ پتانسیل بر روی سطح جانبی هم ایجاب می‌کند که k مقادیر گسسته داشته باشد

$$k_{0,n} = \frac{x_{0,n}}{a}$$

و پتانسیل را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_{0,n}\rho) e^{-k_{0,n}z}$$

برای پیدا کردن A_n، آخرین شرطِ مرزی را به کار می‌بریم

$$\Phi(\rho, 0) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_{0,n}\rho)$$

و با استفاده از شرط تعامد توابع بسل

$$A_n = \frac{2V_0}{a^2 J_1^2(k_{0,n}a)} \int_0^a \rho J_0(k_{0,n}\rho) d\rho$$

اما در مسئله‌ی قبل دیدیم

$$\int_0^a \rho J_0(k_{0,n}\rho)d\rho = \frac{a}{k_{0,n}} J_1(k_{0,n}a)$$

بنابر این

$$A_n = \frac{2V_0}{k_{0,n}aJ_1(k_{0,n}a)}$$

و در نهایت پتانسیل الکتریکی درون استوانه برابر است با

$$\Phi(\rho, z) = 2V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(k_{0,n}\rho)}{k_{0,n}aJ_1(k_{0,n}a)} e^{-k_{0,n}z}$$

و یا

$$\Phi(\rho, z) = 2V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_{0,n}\rho/a)}{x_{0,n}J_1(x_{0,n}a)} e^{-x_{0,n}z/a}$$