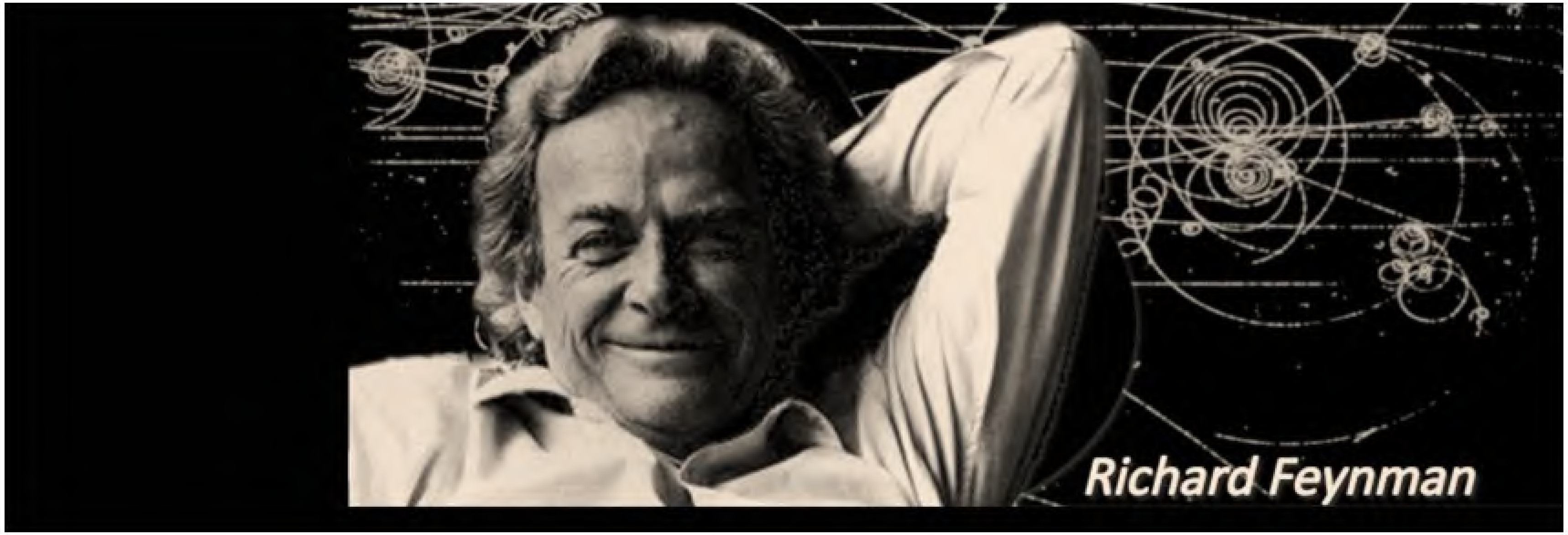
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس سی و یک‌اُم

بسط تابع گرین بر حسب ویژه توابع

Eigenfunction Expansions for Green Function

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید می‌خواهیم تابع گرین را برای یک معادله‌ی دیفرانسیل به شکل زیر پیدا کنیم.

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\,u(\mathbf{x})\right] = f(\mathbf{x})}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\\ &G\Big|_S = 0\end{aligned}}$$

یک معادله‌ی ویژه مقداری مناسب در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم تابع گرین را بر حسب ویژه‌توابع آن معادله بسط دهیم

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}\left[\,\Psi(\mathbf{x})\right] + \lambda\Psi(\mathbf{x}) = 0\\ &\Psi(\mathbf{x})\Big|_S = 0\end{aligned}}$$

فرض کنید Ψ_n ها ویژه توابع این معادله با ویژه مقادیر λ_n باشند که بهنجار شده‌اند.

$$\int \Psi_m^*(\mathbf{x})\Psi_n(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \delta_{mn}$$

دانشگاه خوارزمی

بسط تابع گرین معادله‌ی دیفرانسیل را بر حسب این ویژه توابع می‌نویسیم

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_n A_n(\mathbf{x}')\Psi_n(\mathbf{x})$$

عملگر معادله‌ی دیفرانسیل را بر این تابع اثر می‌دهیم

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_n A_n(\mathbf{x}')\boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi_n(\mathbf{x})$$

$$-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_n A_n(\mathbf{x}')\left[-\lambda_n\Psi_n(\mathbf{x})\right]$$

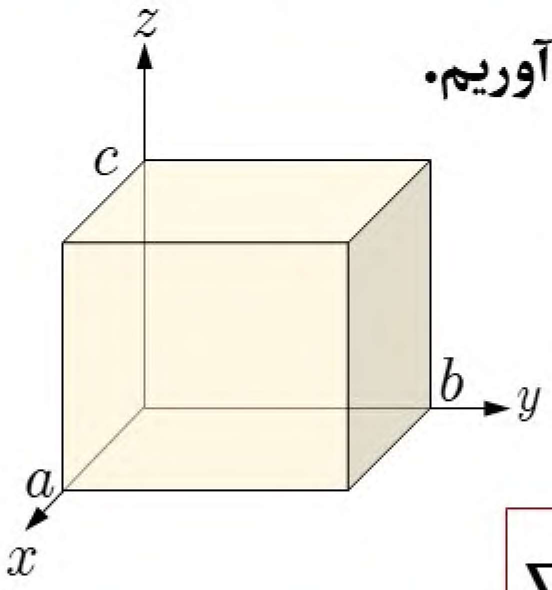
$$-4\pi\int\Psi_m^*(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d^3\mathbf{x} = -\sum_n A_n(\mathbf{x}')\lambda_n\int\Psi_m^*(\mathbf{x})\Psi_n(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

$$-4\pi\Psi_m^*(\mathbf{x}') = -\sum_n A_n(\mathbf{x}')\lambda_n\delta_{mn} = -A_m(\mathbf{x}')\lambda_m$$

$$A_n(\mathbf{x}') = \frac{4\pi\Psi_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi\sum_n\frac{\Psi_n^*(\mathbf{x}')\Psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n}$$

دانشگاه خوارزمی



می‌خواهیم تابع گرین را برای معادله‌ی پواسون برای فضای درون مکعبی با ابعاد a,b,c به دست آوریم.

برای این کار معادله‌ی موج را برای فضای درون مکعب با شرایط مرزی همگن در نظر می‌گیریم.

$$\boxed{\nabla^2\Psi(\mathbf{x}) + k^2\Psi(\mathbf{x}) = 0}$$

$$\boxed{\Psi(\mathbf{x}) = X(x)Y(y)Z(z)}$$

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2}$$

$$-k_x^2 + -k_y^2 + -k_z^2 = -k^2$$

$$-k_x^2 \qquad -k_y^2 \qquad -k_z^2$$

معادله‌ی ویژه مقداری با روش جداسازی متغیرها به سه معادله‌ی دیفراسیل معمولی تبدیل می‌شود که با توجه به شرایط مرزی (صفر بودنِ تابه بر روی دیواره‌های مکعب) پاسخ‌ها به شکل زیرند.

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$$
$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0$$
$$Z''(z) + k_z^2 Z(z) = 0$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$
$$Y''(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$
$$Z''(z) = \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)$$

$$k_{nml}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2$$

$$\Psi_{nml}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)$$

دانشگاه خوارزمی

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Psi^*_{nml}(\mathbf{x}')\Psi_{nml}(\mathbf{x})}{k^2_{nml}}$$

$$\Psi_{nml}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi \sqrt{\frac{8}{abc}}\sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)\sin\left(\frac{l\pi}{c}z'\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}\right]$$

دانشگاه خوارزمی

تابع گرین معادله‌ی پواسون را برای فضای تهی (بدون مرز) به دست آورید

تابع گرین معادله‌ی پواسون برای فضای تهی:

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}$$

معادله‌ی موج اسکالر را در فضای تهی در نظر می‌گیریم

$$\boxed{\nabla^2\Psi(\mathbf{x}) + k^2\Psi(\mathbf{x}) = 0}$$

با توجه به این که هیچ مرزی نداریم، پاسخ معادله به شکل زیر است

$$\boxed{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}$$

و چون هیچ قیدی روی $\mathbf{k}$ نداریم، $\mathbf{k}$ هر مقدار پیوسته‌ای را می‌گیرد.

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 4\pi \int \frac{\Psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{k^2} d^3\mathbf{k} = 4\pi \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2} d^3\mathbf{k}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 4\pi \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2} d^3\mathbf{k}$$

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی