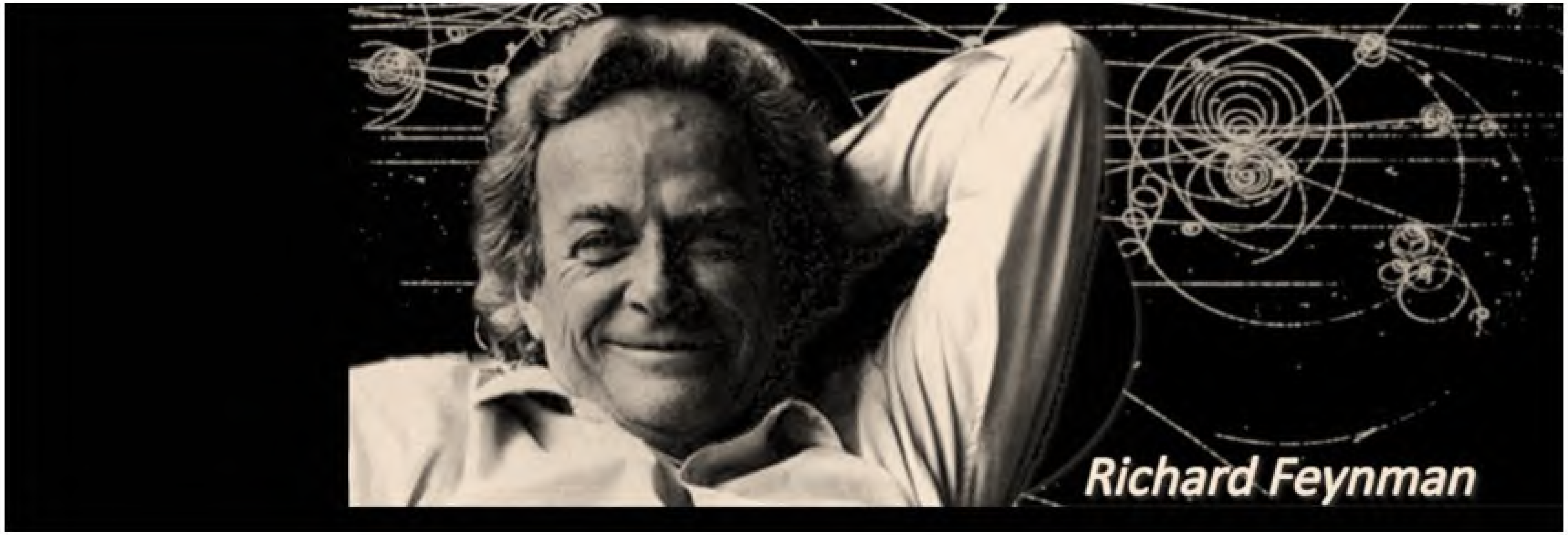
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

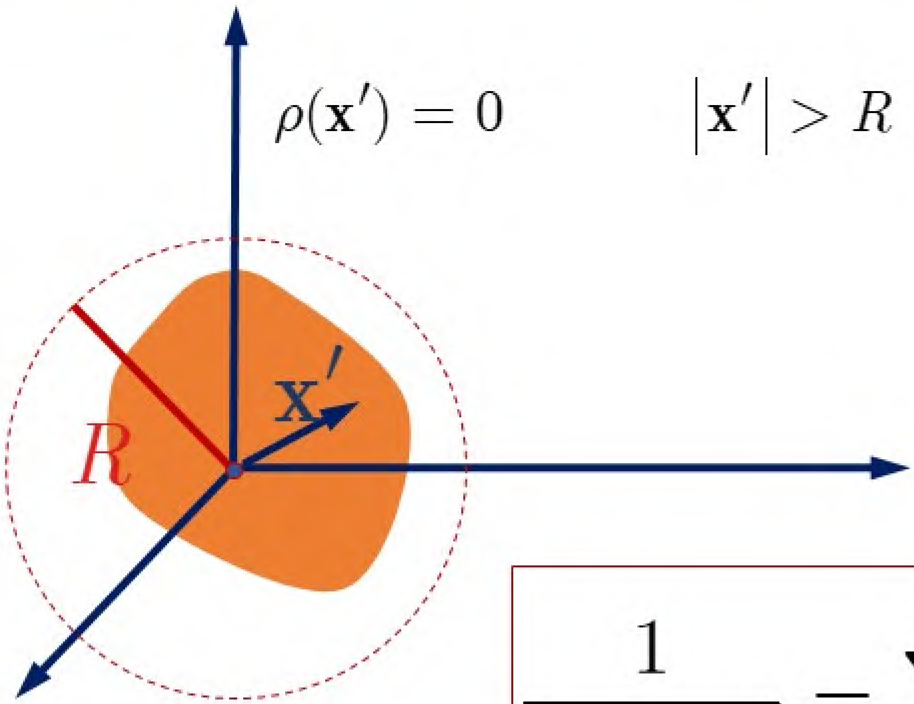
فاینمن

درس سی و دوم

بسط چندقطبی

Multipole Expansion

دانشگاه خوارزمی



یک توزیع بار جای‌گزیده داریم. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی ناشی از آن را بر حسب چندقطبی‌ها بسط دهیم.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'$$

اما طبق قضیه‌ی جمع می‌توان نوشت

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

برای نقـــاط خارج از R داریـــم $r_< = r';\ r_> = r$ بنابراین

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left[\int Y_{lm}^*(\theta',\phi')r'^l\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'\right]\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

از سوی دیگر پتانسیل الکتریکی را می‌توان در مختصات کروی، به شکل زیر نوشت:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^{l} + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

اما برای نقاط خارج از R، با توجه به متناهی بودنِ پتانسیل در بی‌نهایت، ضرایب A_{lm} صفرند. اگر ضرایب B_{lm} را به شکل زیر بنویسیم:

$$\boxed{B_{lm} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}}$$

آن گاه

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

اما در اسلاید قبل دیدیم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left[\int Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')r'^{l}\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'\right]\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$q_{lm} = \int Y^*_{lm}(\theta',\phi')r'^l\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi)$$

$$q_{l,-m} = (-1)^m q^*_{lm}$$

$$q_{00} = \int Y^*_{00}(\theta',\phi')r'^0\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$q_{00} = \int \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}q$$

$$q = \int \rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$ بارِ کل

دانشگاه خوارزمی

$$\boxed{Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}$$

$$\boxed{Y_{1,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi)}$$

$$\boxed{Y_{1,-1}(\theta,\phi) = (-1)Y^{*}_{1,1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi)}$$

$$q_{1,0} = \int Y^{*}_{1,0}(\theta',\phi')r'^{1}\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \int \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\overset{z'}{r'\cos\theta'}\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$\boxed{q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int z'\,\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z}$$

$$q_{1,1} = \int Y^*_{1,1}(\theta',\phi') r'^{1} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$
$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \left(\overset{x'}{r'\sin\theta'\cos\phi'} - i\,\overset{y'}{r'\sin\theta'\sin\phi'} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$

$$q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \left(x' - iy' \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(p_x - ip_y \right)$$

$$q_{1,-1} = (-1)^1 q^*_{1,1}$$

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \left(x' + iy' \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(p_x + ip_y \right)$$

$$\mathbf{p} = \left(p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k} \right) = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$

دانشگاه خوارزمی

به طور مشابه می‌توان q_{lm} ها را به ازای $l = 2$ و $m = -2, -1, 0, 1, 2$ محاسبه کرد.

$$\boxed{Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)}$$

$$\boxed{q_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int\left(3z'^2 - r'^2\right)\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Q_{33}}$$

$$\boxed{Y_{2,1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta}$$

$$\boxed{q_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int z'\left(x' - iy'\right)\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(Q_{13} - iQ_{23}\right)}$$

$$\boxed{Y_{2,2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{2i\phi}\sin^2\theta}$$

$$\boxed{q_{2,2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int\left(x' - iy'\right)^2\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\left(Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}\right)}$$

$$\boxed{Y_{2,-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta}$$

$$\boxed{q_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int z'\left(x' + iy'\right)\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(Q_{13} + iQ_{23}\right)}$$

$$\boxed{Y_{2,-2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{-2i\phi}\sin^2\theta}$$

$$\boxed{q_{2,-2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int\left(x' - iy'\right)^2\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\left(Q_{11} + 2iQ_{12} - Q_{22}\right)}$$

دانشگاه خوارزمی

در روابط اسلاید قبل عناصر تانسور چهارقطبی به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\boxed{Q_{ij} = \int \left(3x'y' - r'^2 \delta_{ij} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}$$

$$\boxed{\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{Q_{ij} = Q_{ji}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0}$$

$l = 1$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{2\times 1+1}\frac{1}{r^2}\Big(q_{1,1}Y_{1,1}(\theta,\phi) + q_{1,-1}Y_{1,-1}(\theta,\phi) + q_{1,0}Y_{1,0}(\theta,\phi)\Big)$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}\frac{1}{r^2}\left(\frac{3\pi}{8}\big(p_x - ip_y\big)\frac{x+iy}{r} + \frac{3}{8\pi}\big(p_x + ip_y\big)\frac{x-iy}{r} + \frac{3}{4\pi}p_z\,\frac{z}{r}\right)$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^3}$$

$l = 2$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}Q_{ij}\,\frac{x_i x_j}{r^5}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x}) + \cdots$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} Q_{ij}\,\frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots\right]}$$

می‌توانستیم همین نتیجه را با استفاده از بسط تیلور به دست آوریم

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\ \mathbf{x}-\mathbf{x}'\ |}d^3\mathbf{x}'$$

$$\frac{1}{|\ \mathbf{x}-\mathbf{x}'\ |} = e^{-\mathbf{x}'\cdot\nabla}\,\frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{r} - \mathbf{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(-\mathbf{x}'\cdot\nabla\right)^2\frac{1}{r} + \cdots$$

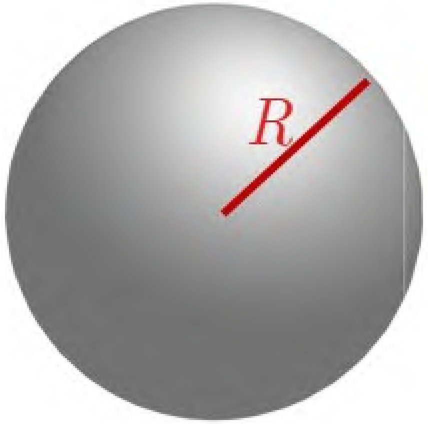
$$\left(-\mathbf{x}'\cdot\nabla\right)\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}}{r^3}$$

$$\left(-\mathbf{x}'\cdot\nabla\right)^2\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j\,\frac{3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2}{r^5}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} Q_{ij}\,\frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots\right]$$

دانشگاه خوارزمی

نشان دهید که اگر توزیع بار دارای تقارن کروی باشد، تمام گشتاورهای دوقطبی، چهارقطبی و ... صفر است.



$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho(r) & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} = \Theta(R - r)\rho(r)$$

دانشگاه خوارزمی

$$
\begin{aligned}
q_{lm} &= \int Y_{lm}^*(\theta',\phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \\
&= \int_0^\infty r'^2 dr' \int d\Omega' r'^l Y_{lm}^*(\theta',\phi')\Theta(R-r')\rho(r') \\
&= \int_0^R \rho(r') r'^{l+2} dr' \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\phi') Y_{00}(\theta',\phi')\sqrt{4\pi} \\
&= \int_0^R r'^{l+2} dr' \rho(r') \sqrt{4\pi}\delta_{l,0}\delta_{m,0} \\
&= \sqrt{4\pi}\delta_{l,0}\delta_{m,0} \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' \\
&= \sqrt{4\pi}\delta_{l,0}\delta_{m,0}\, \frac{q}{4\pi}
\end{aligned}
$$

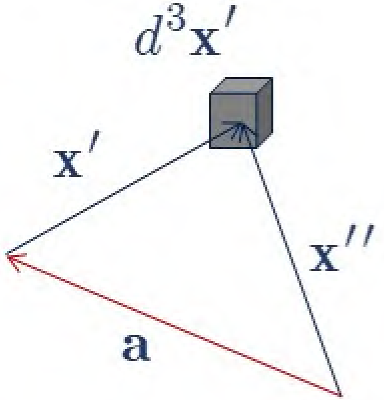
$$
\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm}\,\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}
$$

$$
\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\sqrt{4\pi}\delta_{l,0}\delta_{m,0}\,\frac{q}{4\pi}\,\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}}
$$

در حالت کلی مقدار گشتاورهای چند قطبی به انتخاب مبدأ مختصات بستگی دارد.

الف) تک قطبی: ← به مبدأ بستگی ندارد

$$q = \int \rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$



ب) دو قطبی : ← به مبدأ بستگی دارد

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= \int \mathbf{x}''\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'' = \int \left(\mathbf{x}' + \mathbf{a}\right)\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \\ &= \int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' + \int \mathbf{a}\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{a}q\end{aligned}$$

اگر بارِ کل صفر باشد، گشتاور دو قطبی به مبدأ بستگی ندارد.

در مورد چهار قطبی، در صورتی گشتاور چهار قطبی به مبدأ بستگی نخواهد داشت که هم بارِ کل و هم گشتاور دوقطبی صفر باشند

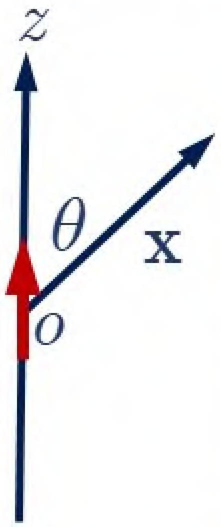
$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x})}$$

$$E_r = -\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial r} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{l+1}{2l+1}q_{lm}\,\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+2}}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial\theta} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{-1}{2l+1}q_{lm}\,\frac{1}{r^{l+2}}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial\phi} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{-1}{2l+1}q_{lm}\,\frac{1}{r^{l+2}}\frac{im}{\sin\theta}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

مثلاً برای یک دوقطبی واقع در مبدأ مختصات که در راستای محور z است:

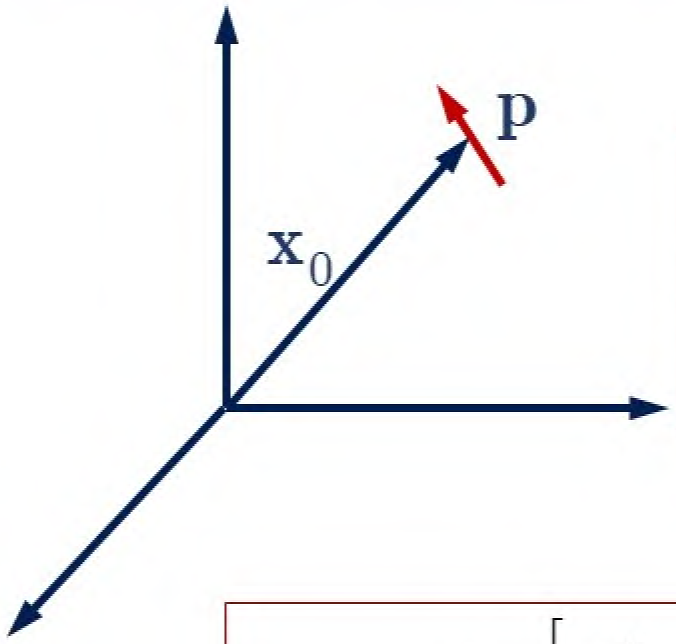


$$q_{1,1} = 0$$
$$q_{1,-1} = 0$$
$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z$$

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$
$$E_\theta = \frac{2p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$
$$E_\phi = 0$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\overset{\hat{r}\cdot\hat{k}}{\cos\theta}\hat{r}\overset{-\hat{k}}{\overbrace{-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}}}\right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[3\left(\mathbf{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} + \mathbf{p}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)\mathbf{x} + r^2\mathbf{p}}{r^5}\right]$$



اگر دوقطبی در مبدأ نباشد:

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left[\mathbf{p}\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right]\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)+\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right|^2\mathbf{p}}{r^5}\right]}$$

نشان خواهیم داد که رابطه‌ی فوق را بایستی به شکل زیر اصلاح کرد

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left[\mathbf{p}\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right]\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)+\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right|^2\mathbf{p}}{r^5}-\frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right]}$$

برای این منظور ابتدا در مورد میانگین حجمی میدان الکتریکی در یک ناحیه از فضا بحث می کنیم.

$$\int_{r<R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{E}(0) & \text{اگر درونِ حجم بار نباشد} \\ \\ -\dfrac{\mathbf{p}}{3\varepsilon_0} & \text{اگر درونِ حجم بار باشد} \end{cases}$$

در رابطه‌ی زیر انتگرال دو جمله‌ی اول صفر می‌شود. بنابر این جمله‌ی اصلاحی سوم ضروری است

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left[\mathbf{p}\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right]\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)+\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right|^2\mathbf{p}}{r^5}-\frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\right]}$$

دانشگاه خوارزمی

$$W = U = \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + \mathbf{x}\cdot\nabla\Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i x_j \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \cdots$$

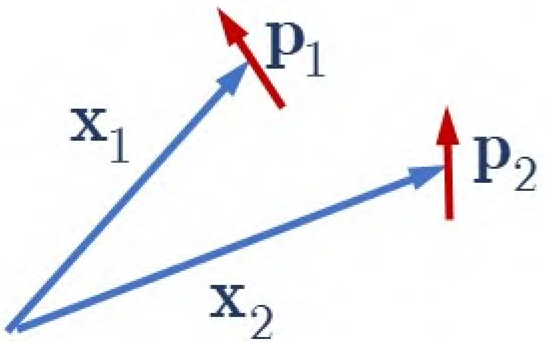
با توجه به این که میدانِ الکتریکیِ خارجی با چشمه‌هایی ایجاد شده است که از مبدأ دورند، داریم: $\nabla\cdot\mathbf{E}(0) = 0$

عبارتِ $-\frac{1}{6}r^2\nabla\cdot\mathbf{E}(0) = 0$ را به رابطه‌ی بالا اضافه می‌کنیم.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_i\sum_j\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \cdots$$

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_i\sum_j Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \cdots$$

دانشگاه خوارزمی



$$W_{12} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{x}_1)$$

$$\boxed{W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-3[\mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)](\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{p}_1 + \left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^2 \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^5}\right]}$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید