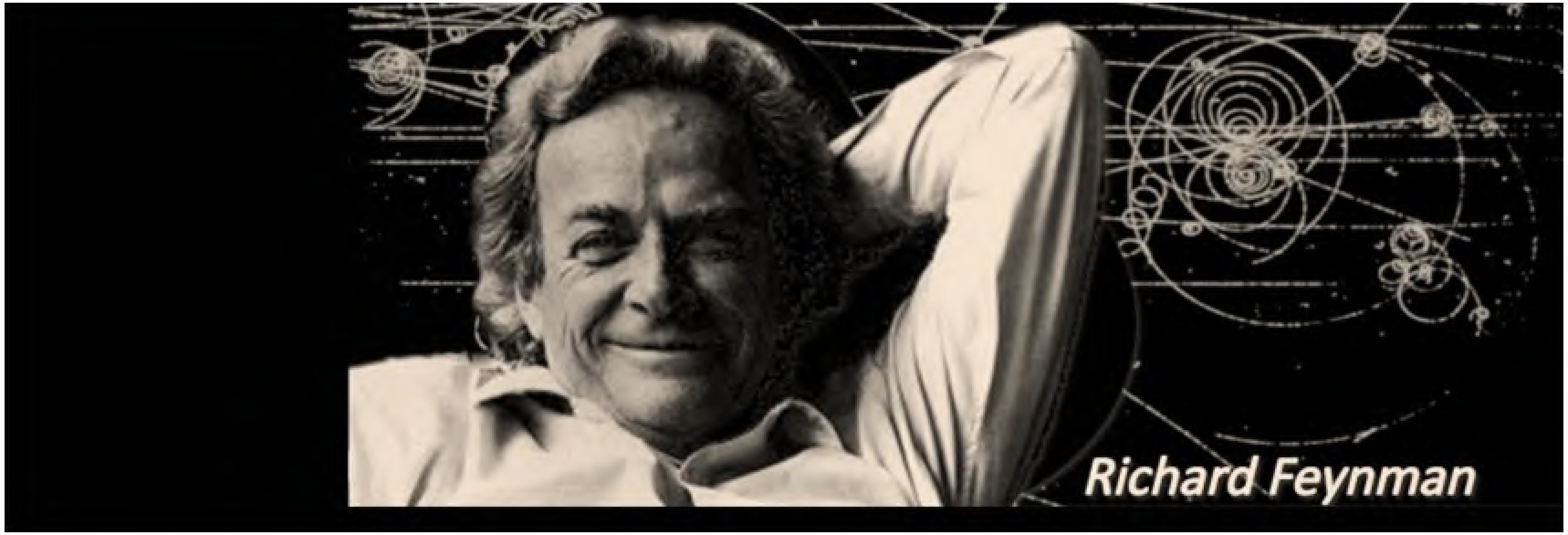
Electrodynamics

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

https://kanjouri.com

دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس سی و سوم

مواد دی‌الکتریک

Dielectrics

دانشگاه خوارزمی

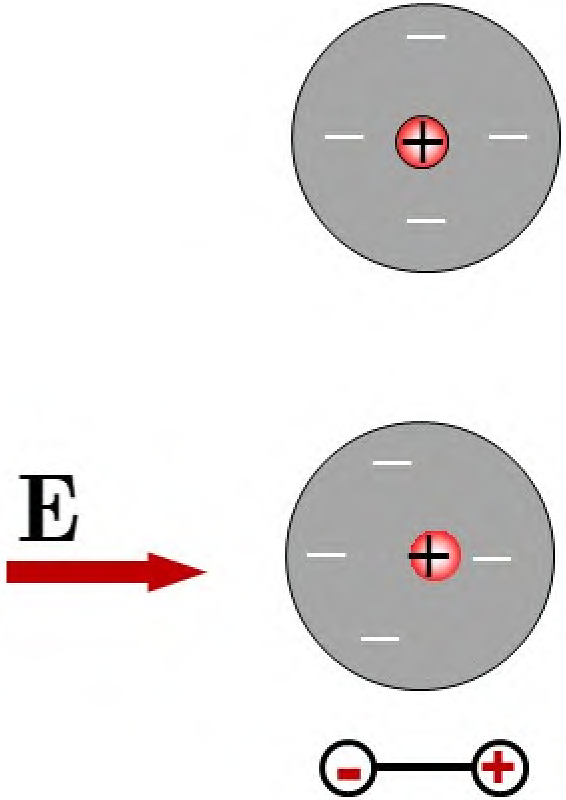
تا این‌جا بارهای الکتریکی را در فضای تهی بررسی کرده‌ایم.

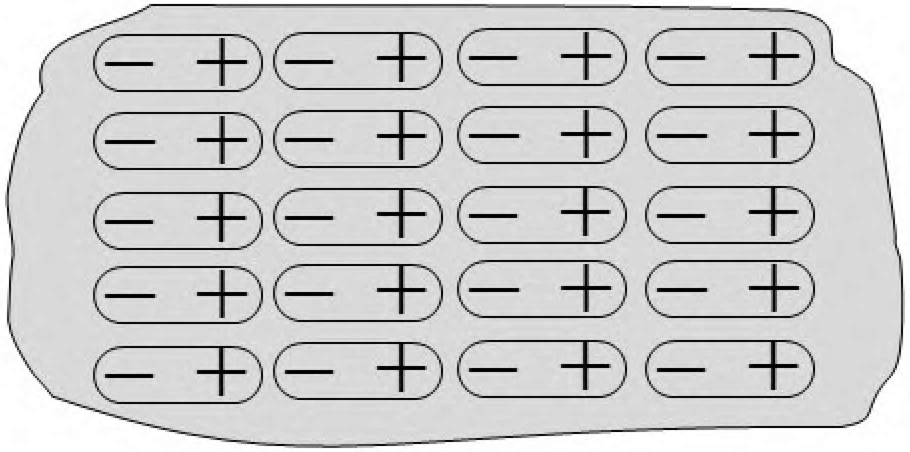
حال می‌خواهیم ببینیم که اگر محیط، خلأ نباشد یعنی شامل اتم‌ها و مولکول‌ها باشد، میدان الکتریکی ناشی از بارهای آزاد چه تأثیری بر روی این اتم‌ها و مولکول‌ها دارد. همچنین حضور این اتم‌ها و مولکول‌ها چه تأثیری بر میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا خواهد داشت.

میدانی که درونِ ماده اندازه‌گیری می‌شود، میدان ماکروسکوپی است. در واقع میانگین است. در نزدیکی اتم‌ها و مولکول‌ها، در نقاط مختلف، تغییرات بار الکتریکی و در نتیجه تغییرات میدانِ الکتریکی شدید است.

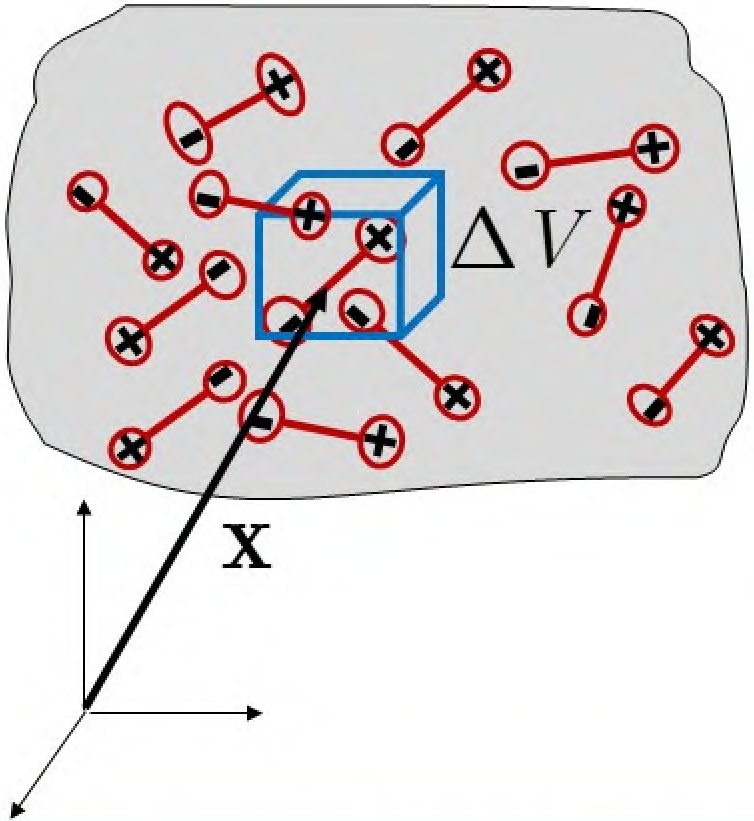
میدان ماکروسکوپی میانگین میدان ناشی از بارهای آزاد و میدان ناشی از ماده است:

$$\mathbf{E} = \left\langle \mathbf{E}_{\text{ext}} \right\rangle + \left\langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \right\rangle$$





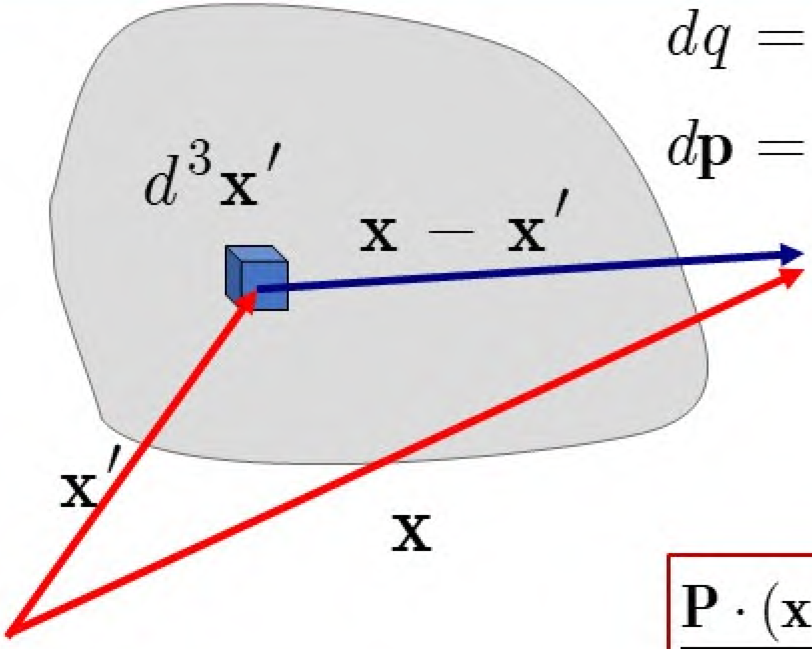
قطعه‌ای از یک ماده‌ی
قطبیده (اغراق آمیز)



چگالی گشتاور دو قطبی ماده در نقطه‌ی x:

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}}$$

چگالی گشتاور دو قطبی در هر نقطه را قطبش ماده در آن نقطه می‌نامیم.



$$dq = \rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

$$d\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' + \int\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3\mathbf{x}'\right]$$

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = +\mathbf{P}\cdot\nabla_{\mathbf{x}'}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) = \nabla_{\mathbf{x}'}\cdot\left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) - \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' + \oint\frac{\mathbf{P}\cdot\hat{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da' + \int\frac{-\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' + \oint\frac{\sigma_p(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da' + \int\frac{\rho_p(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\right]$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' + \oint \frac{\sigma_p(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da' + \int \frac{\rho_p(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\right]$$

$$\boxed{\rho_p(\mathbf{x}) = -\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x})\ ; \qquad \sigma_p(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\hat{n}}$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int \frac{\rho(\mathbf{x}')+\rho_p(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' + \oint \frac{\sigma_p(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da'\right]} \qquad \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x})}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})+\rho_p(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = \frac{\rho(\mathbf{x})-\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\epsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\Big(\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x})+\mathbf{P}(\mathbf{x})\Big) = \rho(\mathbf{x})} \qquad \boxed{\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})}$$

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x})+\mathbf{P}(\mathbf{x})}$$

بردار جابجایی الکتریکی

دانشگاه خوارزمی

در مواد خطی و همسان‌گرد می‌توان نوشت:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$\boxed{\text{electric susceptibility} \quad \text{پذیرفتاری الکتریکی}}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \left(1 + \chi_e\right) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \; ;$$

ضریب گذردهی ماده $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \chi_e\right)$

ثابت دی‌الکتریک یا ضریب گذردهی نسبی $\epsilon_r = \kappa = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left(1 + \chi_e\right)$

اگر ماده **همگن و خطی** باشد، ضریب گذردهی ماده مستقل از مکان است. بنابر این

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \left(\epsilon \mathbf{E}\right) = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}}$$

در حالت کلی ماده ممکن است همسانگرد نباشد. در این حالت مؤلفه‌های قطبش را می‌توان به شکل زیر نوشت:

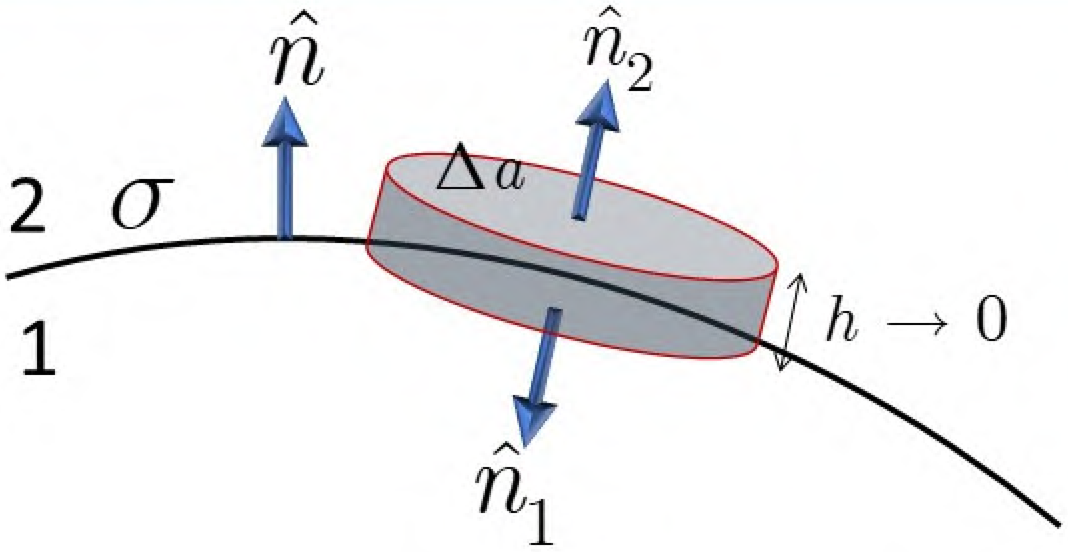
$$P_i = \sum_j \epsilon_0 \chi_{cij} E_j$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} & \chi_{e13} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} & \chi_{e23} \\ \chi_{e31} & \chi_{e32} & \chi_{e33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}}$$

یعنی **P** و **E** و همچنین **D** و **E** در حالت کلی هم‌جهت نیستند.

دانشگاه خوارزمی



$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot \hat{n} da = Q_{in}$$

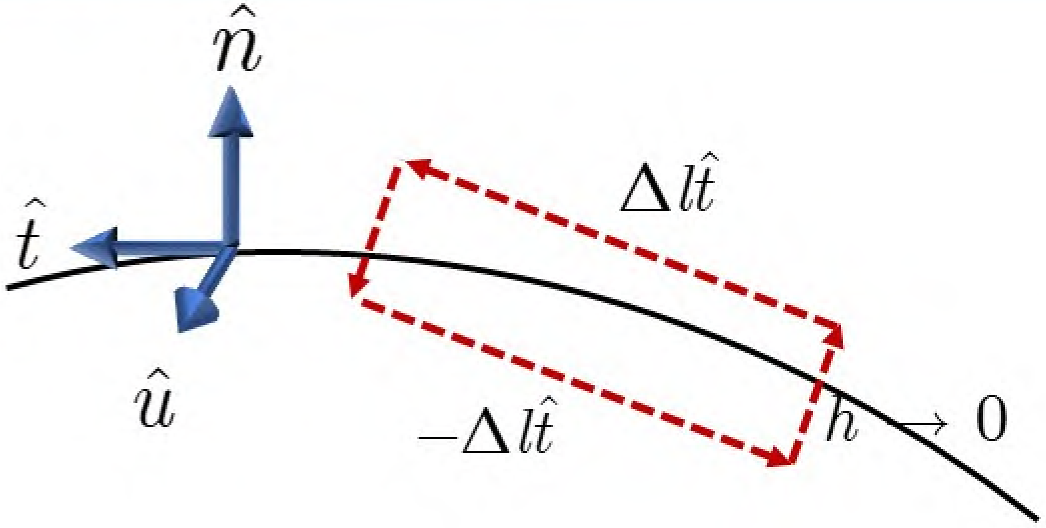
$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta a + \mathbf{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta a = \sigma \Delta a$$

$$\left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \right) \cdot \hat{n} = \sigma$$

$$\left(\epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1 - \mathbf{P}_1 \right) \cdot \hat{n} = \sigma$$

$$\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \right) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 \right) \cdot \hat{n}$$

$$\sigma_{total} = \sigma + \sigma_p$$



$$\boxed{\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_2 \cdot \Delta l\hat{t} - \mathbf{E}_1 \cdot \Delta l\hat{t} = 0}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) \cdot \hat{t} = 0}$$

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) \cdot (\hat{u} \times \hat{n}) = 0}$$

$$\boxed{\left[\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) \times \hat{n}\right] \cdot \hat{u} = 0}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) \times \hat{n} = 0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

برای دی‌الکتریک‌های خطی، همسانگرد و همگن داریم:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

بدین ترتیب پتانسیل در معادله‌ی پواسون صدق می‌کند:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

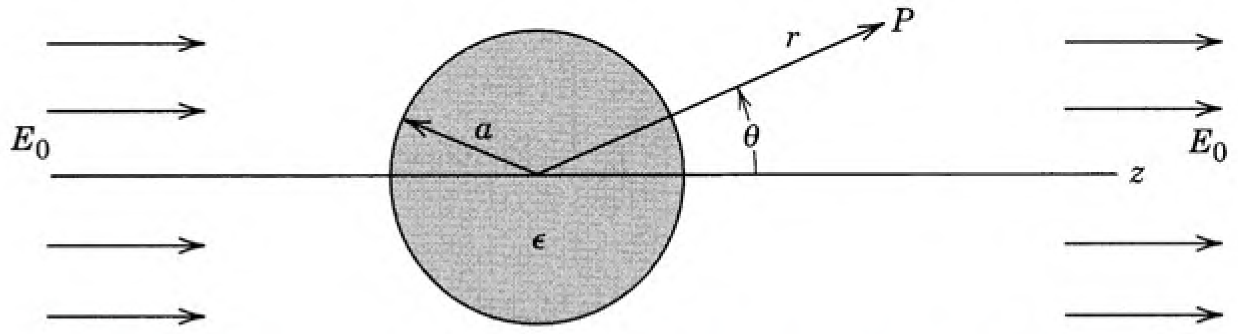
در نقاطی که چگالی بار آزاد صفر است داریم:

$$\nabla^2 \Phi = 0\epsilon$$

کره‌ی دی‌الکتریک به شعاع R در یک میدان الکتریکی (که در ابتدا یکنواخت بوده) قرار دارد، پتانسیل و میدان الکتریکی را درون و بیرون کره به دست آورید.

راستای اولیه‌ی میدان را محور z انتخاب می‌کنیم.
$$\mathbf{E}_0 = E_0\hat{e}_z$$

تحت این شرایط پتانسیل مستقل از زاویه‌ی سمتی است



John David Jackson, Classical Electrodynamics, Third Edition, Chapter 4, Page 157

$$\Phi_{out}\left(r,\theta\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l\left(\cos\theta\right), \qquad r > R$$

$$\Phi_{in}\left(r,\theta\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l' r^l + B_l' r^{-(l+1)}\right] P_l\left(\cos\theta\right), \qquad r < R$$

$$\Phi_{in}\left(r = 0,\theta\right) \neq \infty \Rightarrow B_l' = 0 \quad for \quad l \geq 0$$

$$\lim_{r\to\infty} \Phi_{out}(r,\theta) = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C$$

$$A_0 = C, \quad A_1 = -E_0\ , \quad A_l = 0 \ \text{ for } \ l \geq 2$$

در این مسئله بار نقطه‌ای نداریم. پس $B_0 = 0$

$$\boxed{\Phi_{out}(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \, P_l(\cos\theta), \qquad r > R}$$

$$\boxed{\Phi_{in}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_l' r^l P_l(\cos\theta), \qquad r < R}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi_{in}(R,\theta) = \Phi_{out}(R,\theta) \\ \left[D_{1r} = D_{2r}\right]_{r=R} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi_{in}(R,\theta) = \Phi_{out}(R,\theta) \\ \epsilon \left.\dfrac{\partial \Phi_{in}}{\partial r}\right|_{r=R} = \epsilon_0 \left.\dfrac{\partial \Phi_{out}}{\partial r}\right|_{r=R} \end{array}}$$

$$A_0 - E_0 R\cos\theta + \sum_{l=1}^{\infty} B_l R^{-(l+1)}\ P_l\left(\cos\theta\right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l' R^l\ P_l\left(\cos\theta\right)$$

$$A_0 - E_0 R\cos\theta + B_1 R^{-2}\ \cos\theta + \sum_{l=2}^{\infty} B_l R^{-(l+1)}\ P_l\left(\cos\theta\right)$$
$$= A_0' + A_1' R^1\ \cos\theta + \sum_{l=2}^{\infty} A_l' R^l\ P_l\left(\cos\theta\right)$$

$$A_0 = A_0', \qquad - E_0 R + B_1 R^{-2} = A_1' R,$$
$$B_l = A_l' R^{2l+1} \qquad \text{for} \qquad l \geq 2$$

$$-\epsilon_0 E_0 \cos\theta + \epsilon_0 \sum_{l=1}^{\infty} -(l+1) B_l R^{-(l+2)} \; P_l\left(\cos\theta\right) = \epsilon \sum_{l=1}^{\infty} l A_l' R^{l-1} \; P_l\left(\cos\theta\right)$$

$$-\epsilon_0 E_0 \cos\theta - 2\epsilon_0 B_1 R^{-3} \; \cos\theta - \epsilon_0 \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) B_l R^{-(l+2)} \; P_l\left(\cos\theta\right)$$

$$= \epsilon A_1' \cos\theta + \epsilon \sum_{l=2}^{\infty} l A_l' R^{l} \; P_l\left(\cos\theta\right)$$

$$-\epsilon_0 E_0 - 2\epsilon_0 B_1 R^{-3} = \epsilon A_1',$$

$$B_l = \frac{-l\epsilon}{\epsilon_0\left(l+1\right)} A_l' R^l \qquad \text{for} \quad l \geq 2$$

$$B_l = A_l' = 0 \qquad \text{for} \quad l \geq 2$$

$$B_1 = E_0 R^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}$$

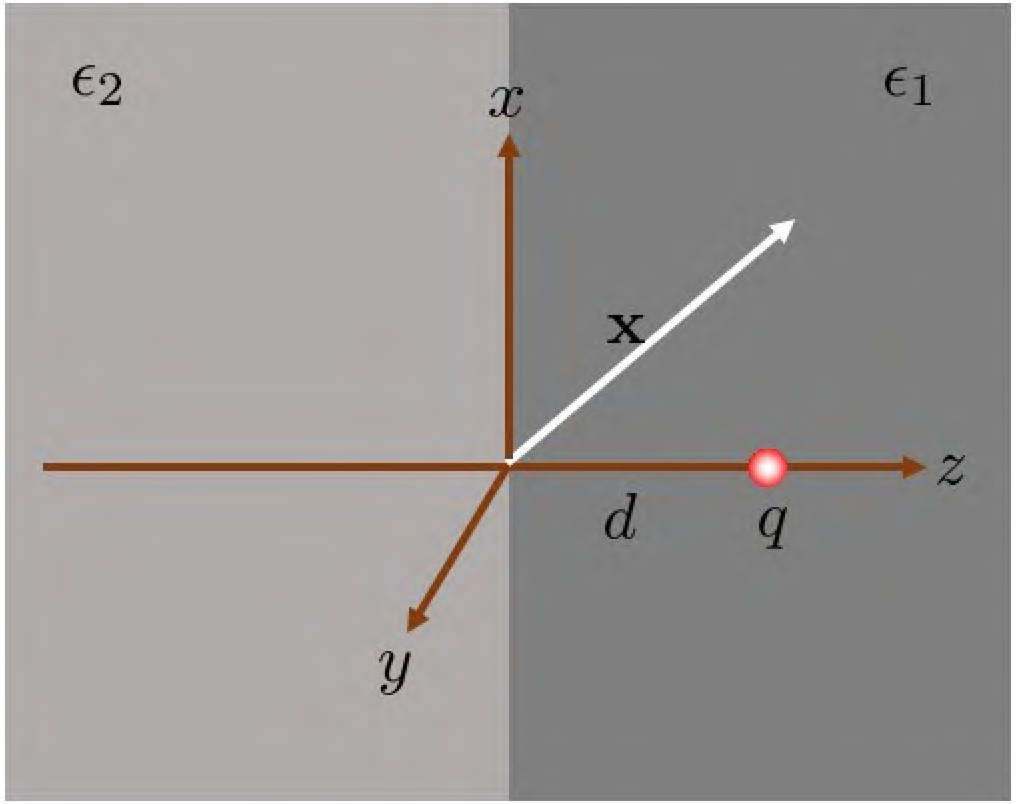
$$A_1' = \frac{-3\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$$

$$\boxed{\Phi_{out}\left(r,\theta\right) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 R^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad r > R}$$

$$\boxed{\Phi_{in}\left(r,\theta\right) = A_0 - \frac{3\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 r\cos\theta, \qquad r < R}$$

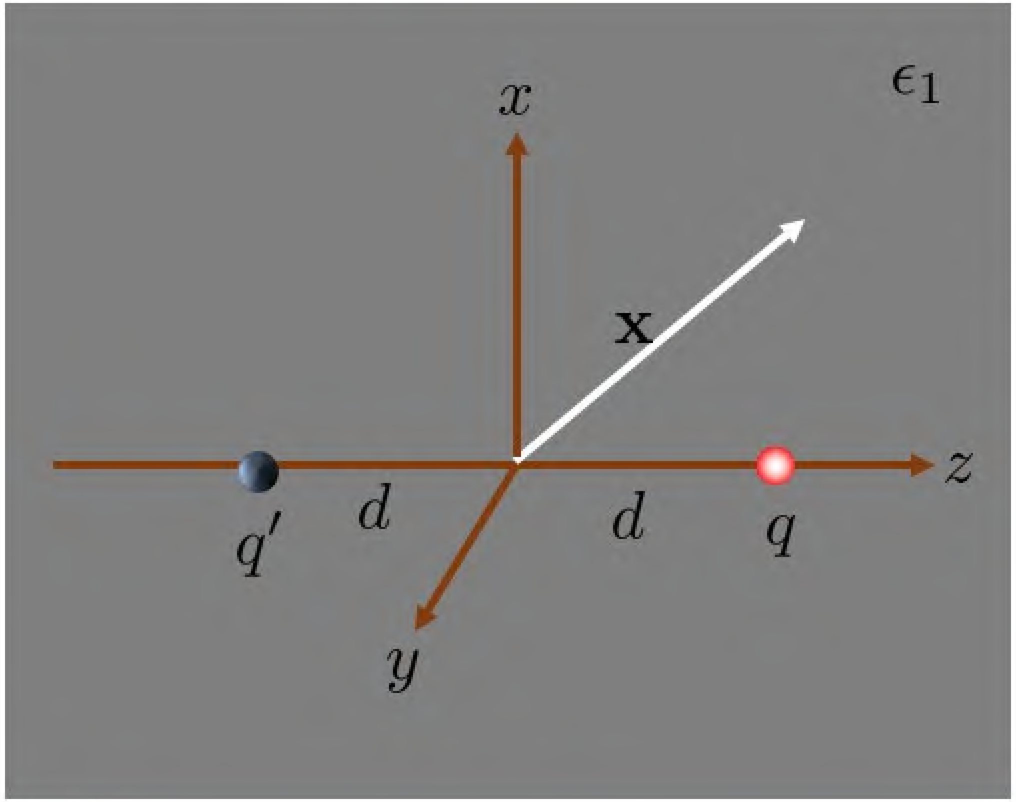
$$\boxed{\vec{\mathrm{E}}_{in} = \frac{3\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0}\vec{\mathrm{E}}_0}$$

دانشگاه خوارزمی



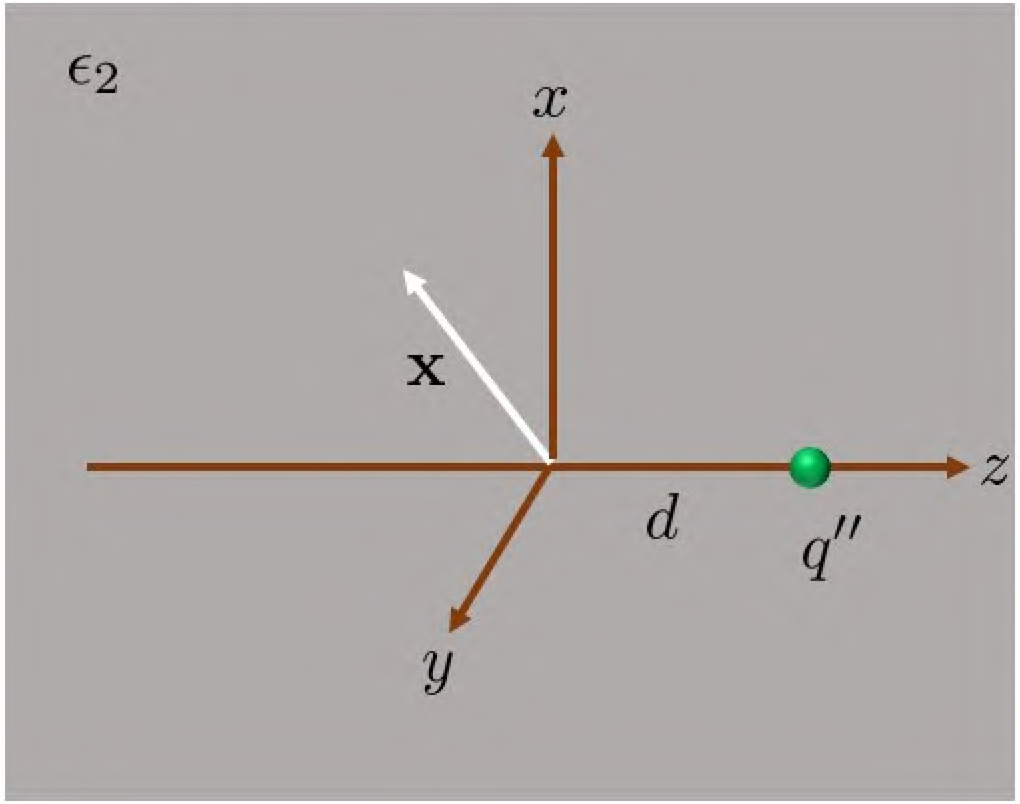
می‌خواهیم $\mathbf{P}$ و $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را در همه‌ی نقاط

فضا $z > 0$ و $z < 0$ پیدا کنیم



مسئله را به روش تصویر حل می‌کنیم. برای پیدا کردن پتانسیل در ناحیه‌ی $z>0$، فرض می‌کنیم کل فضا یک ماده با ضریب دی‌الکتریک ϵ_1 است و اثر ماده‌ی دوم را به صورت بار تصویری q' در نظر می‌گیریم.

$$\boxed{\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]; \quad z>0}$$



برای پیدا کردن پتانسیل در ناحیه‌ی سمت چپ $z<0$ ، فرض می‌کنیم کل فضا یک ماده با ضریب دی‌الکتریک ϵ_2 است و اثر ماده‌ی دیگر (و نیز بار q) را به صورت بار تصویری q'' در نظر می‌گیریم.

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}; \qquad z > 0$$

بارهای q' و q'' را با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌کنیم.

بر روی مرز مشترک دو ماده، در $z=0$ ، پتانسیل الکتریکی پیوسته است:

$$\Phi_2(x,y,0) = \Phi_1(x,y,0)$$

این شرط، هم ارز با پیوستگیِ مؤلفه‌های مماسیِ میدان الکتریکی بر روی مرز است:

$$\boxed{\begin{aligned} E_{2x}(x,y,0) &= E_{1x}(x,y,0) \\ E_{2y}(x,y,0) &= E_{1y}(x,y,0) \end{aligned}}$$

از آن‌جا که بر روی مرز مشترک بار الکتریکی آزاد وجود ندارد، مؤلفه‌های عمودی بردار جابجایی الکتریکی نیز پیوسته هستند:

$$\boxed{D_{2z}(x,y,0) = D_{1z}(x,y,0)}$$

$$\boxed{\epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\Phi_2(x,y,0) = \Phi_1(x,y,0) \Rightarrow \frac{q+q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} \Rightarrow q'' = q - q'$$

$$q' = -\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q \; ; \qquad q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right)\frac{d}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

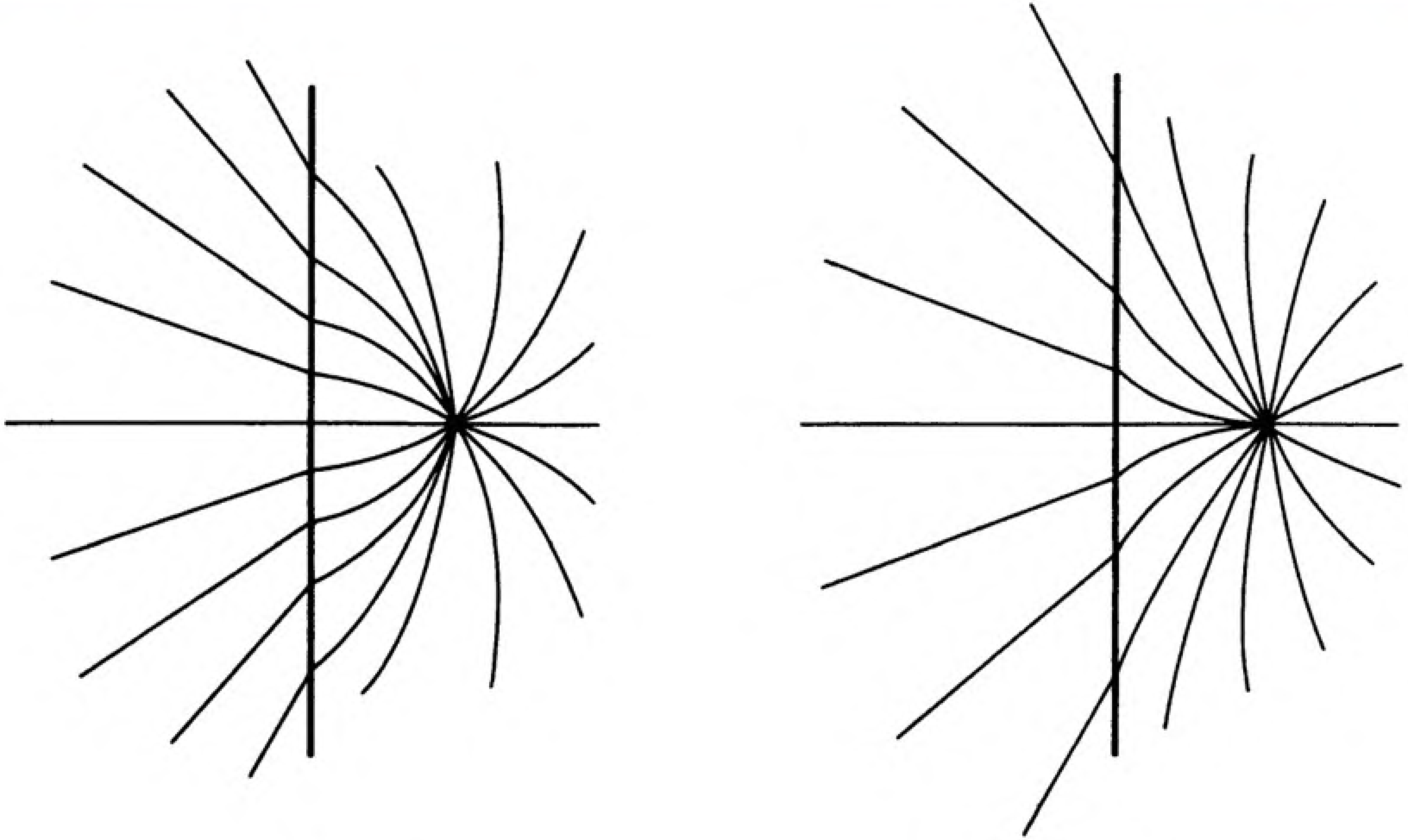
$$\boxed{\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi_1(\mathbf{x})} \qquad \boxed{\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi_2(\mathbf{x})}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = (\epsilon_1 - \epsilon_0)\mathbf{E}_1(\mathbf{x})}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_2(\mathbf{x}) = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) = (\epsilon_2 - \epsilon_0)\mathbf{E}_2(\mathbf{x})}$$

$$\boxed{\sigma_p = \left[\mathbf{P}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_1(\mathbf{x})\right]\cdot\hat{n}}$$

$$\boxed{\sigma_p = -\frac{q}{2\pi}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right)\frac{d}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

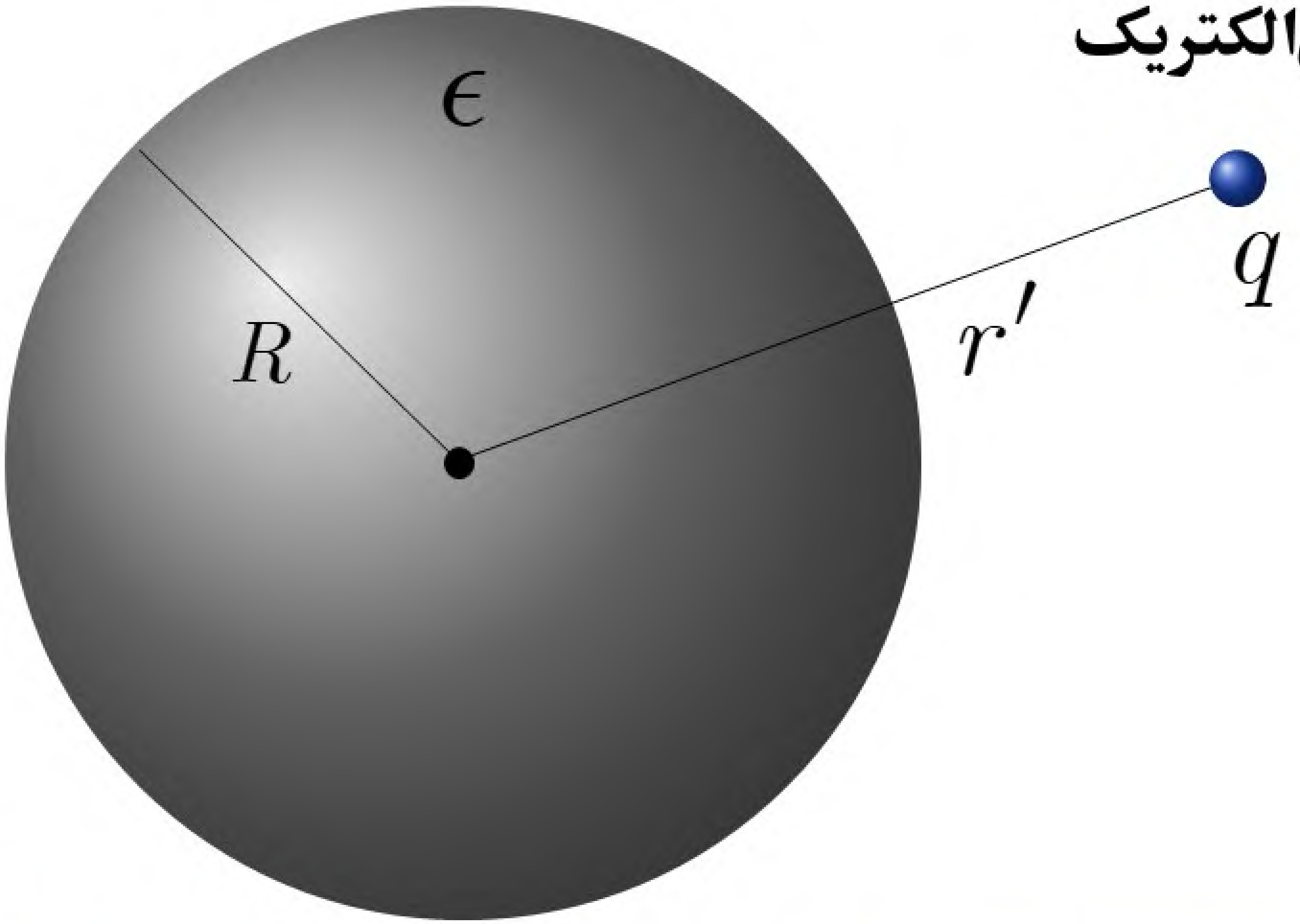


$\epsilon_2 > \epsilon_1$ $\epsilon_2 < \epsilon_1$

John David Jackson, Classical Electrodynamics, Third Edition, Chapter 4, Page 156

تمرین:

بار نقطه‌ای در کنار یک کره‌ی دی‌الکتریک



شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی