شماره‌ی تکلیف: ۱

مسئله‌ی ۱:

نشان دهید هر ماتریس مربعی را می‌توان به شکل حاصل جمع دو ماتریس، یکی ماتریس متقارن (symmetric) و یکی ماتریس پادمتقارن (anti symmetric) نوشت.

ماتریس متقارن ماتریسی است که به ازای هر i و j رابطه‌ی $a_{ij} = a_{ji}$ برقرار است یعنی ماتریس با ترانهاده‌اش برابر است.
ماتریس پادمتقارن ماتریسی است که به ازای هر i و j رابطه‌ی $a_{ij} = -a_{ji}$ برقرار است یعنی ماتریس با قرینه‌ی ترانهاده‌اش برابر است. (واضح است که در ماتریس پادمتقارن، عناصر قطر صفر هستند)

پاسخ ۱: فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد. اگر حاصل جمع ماتریس A و ترانهاده‌اش را B بنامیم، به سادگی دیده می‌شود که B یک ماتریس متقارن است.

$$B = A + A^T; \qquad B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = B$$

هم‌چنین به راحتی دیده می‌شود که تفاضل ماتریس A و ترانهاده‌اش یک ماتریس پادمتقارن است:

$$C = A - A^T; \qquad C^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -C$$

از سوی دیگر با محاسبه‌ی حاصل جمع B و C دیده می‌شود:

$$B + C = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2}(B + C)$$

بدین ترتیب، اگر A یک ماتریس مربعی باشد، می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

که جمله‌ی اول ماتریسی متقارن و جمله‌ی دوم ماتریسی پادمتقارن است.

مسئله‌ی ۲:

ماتریس زیر را به صورت حاصل جمع دو ماتریس، یکی متقارن و یکی پادمتقارن بنویسید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

پاسخ ۲:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 9 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \qquad A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

بنابر این ماتریس A را به شکل مجموع دو ماتریس یکی متقارن و یکی پادمتقارن می‌توان نوشت:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5 & 9/2 \\ 3/2 & 9/2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ -2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

مسئله‌ی ۳:

اگر برای ماتریس‌های A و B روابط زیر برقرار باشند،

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad -4A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های A و B را به دست آورید.

پاسخ ۳:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

مسئله‌ی ۴:

اگر

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

حاصل ضرب ماتریسی AB را به دست آورید.

پاسخ ۴:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

مسئله‌ی ۵:

اگر

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

نشان دهید:

$$A^2 - 4A - 5I = o$$

که در آن I ماتریس واحد و o ماتریس صفر است.

پاسخ ۵:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

مسئله‌ی ۶:

اگر

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

درستی تساوی $(AB)^T = B^T A^T$ را تحقیق کنید.

پاسخ ۶:

$$AB = \begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 6\\ 14 & 5 & 0\end{pmatrix}; \qquad (AB)^T = \begin{pmatrix}5 & 3 & 14\\ 1 & 2 & 5\\ -3 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}; \qquad B^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3 & 14\\ 1 & 2 & 5\\ -3 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

مسئله‌ی ۷:

اگر

$$A = \begin{pmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix}\cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta\\ \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta\end{pmatrix}$$

رابطه‌ی بین α و β چه باشد تا حاصل ضرب AB برابر با صفر شود.

پاسخ ۷:

$$\alpha - \beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

مسئله‌ی ۸:

اگر

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

وارونِ ماتریسِ A را به دست آورید.

پاسخ ۸:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$