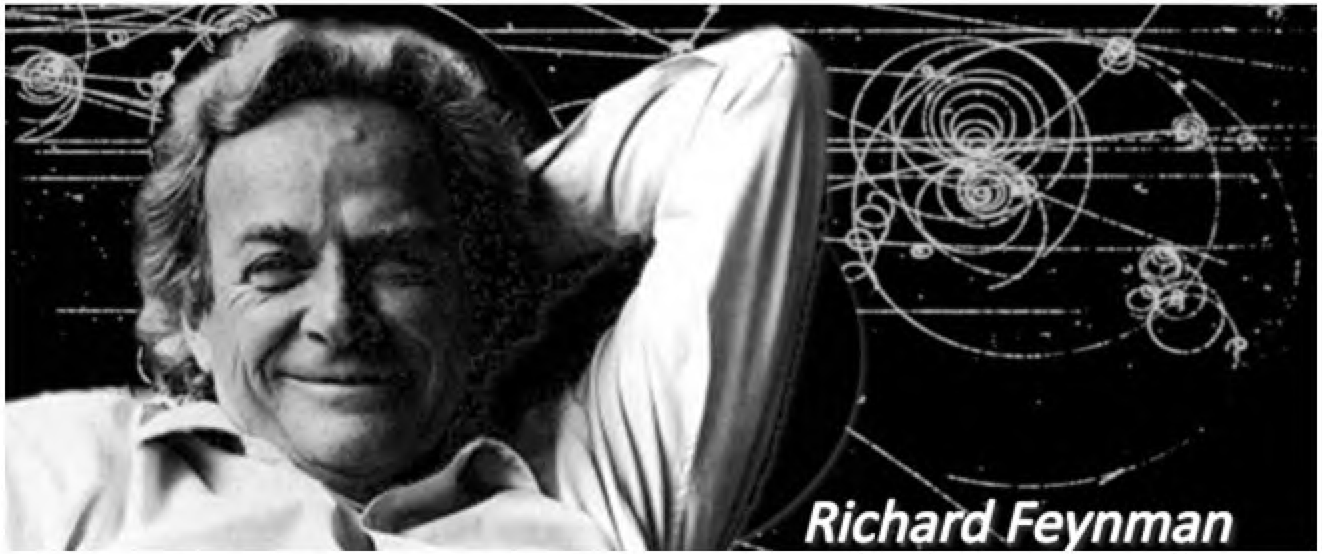
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

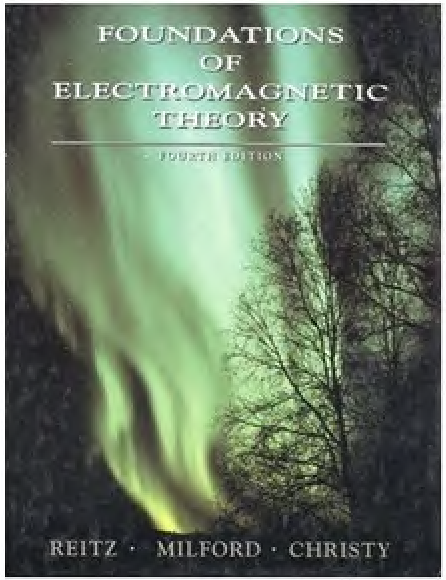
Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

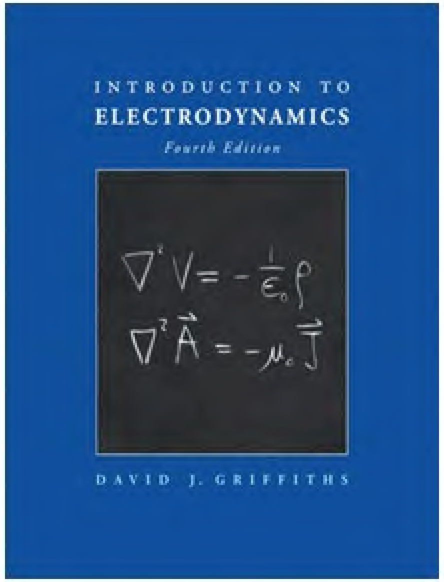


اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

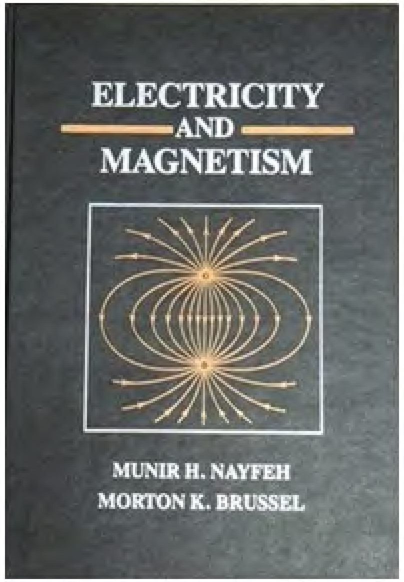
فاینمن



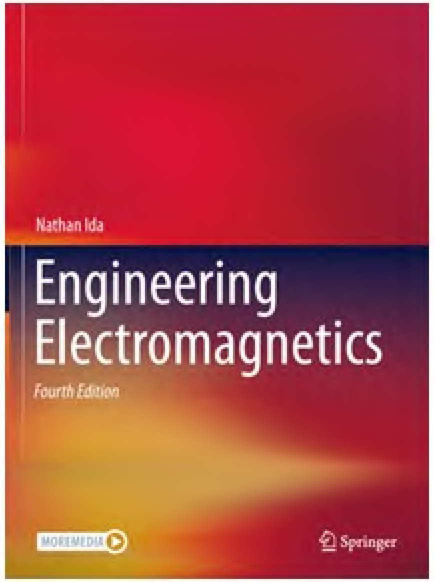
John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, **Foundations of Electromagnetic Theory,** 4th Edition (2008)



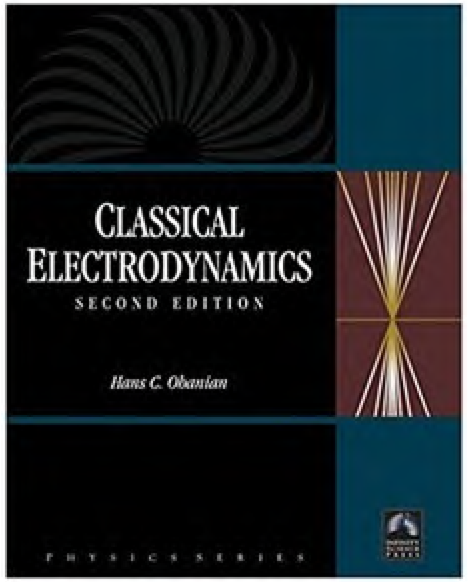
David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics,** 4th Edition (2013)



Munir H. Nayfeh and Morton K. Brussel, **Electricity and Magnetism,** (1986)



Nathan Ida, **Engineering Electromagnetics,** 4th Edition (2018)



Hans Ohanian, **Classical Electrodynamics,** (2006)

- Metrix and Vector Algebra (Review)
- Coordinate Systems
- Scalar and Vector Fields
- Vector Calculus
- Divergence Operator
- Curl Operator
- Green's Identity-Dirac Delta Function-Solid Angle
- Coulomb's Law and Electric Fields
- Electric field lines-Electric Potential
- Electric field lines-Electric Potential
- Dipole and Multipole Fields
- Gauss Law
- Boundary Value Problems
- Electrostatics in Material Media
- Electrostatic Energy
- Electric Current
- Magnetostatics
- Amper's Law and Biot-Savar Law
- Magnetic Vector Potential
- Magnetic Materials

دانشگاه خوارزمی

درس اول

مروری بر جبر ماتریس‌ها

Matrix Algebra Review

دانشگاه خوارزمی

ماتریس، آرایه‌ای منظم از اعداد حقیقی یا مختلط است که در سطرها و ستون‌های مشخصی مرتب شده‌اند.

یک ماتریس $m \times n$ به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

عنصر یا درایه‌ی ماتریس

تعداد سطرها

تعداد ستون‌ها

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

اگر ماتریسی فقط یک سطر داشته باشد، آن را ماتریسِ سطری یا بردارِ سطری می‌نامیم.

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

اگر ماتریسی فقط یک ستون داشته باشد، آن را ماتریسِ ستونی یا بردارِ ستونی می‌نامیم.

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

اگر تعدادِ سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

در ماتریس مربعیِ A با n سطر و n ستون، عناصرِ $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ را قطرِ اصلیِ ماتریسِ A می‌نامیم.

مثلاً ماتریس زیر یک ماتریس مربعی 3×3 است:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

که قطرِ اصلیِ آن (-1,3,9) است.

دانشگاه خوارزمی

ماتریس بالامثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام عناصرِ زیرِ قطر اصلی صفر باشند، آن را ماتریس بالامثلثی می‌نامیم.

ماتریس زیر یک ماتریس بالامثلثی است:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ماتریس پایین‌مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام عناصرِ بالای قطر اصلی صفر باشند، آن را ماتریس پایین‌مثلثی می‌نامیم.

ماتریس زیر یک ماتریس پایین‌مثلثی است:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ماتریس قطری: ماتریسی که همه ی عناصرِ غیرِ قطری آن صفر باشند، یعنی هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی باشد،

ماتریس قطری نامیده می‌شود.

ماتریس همانی: ماتریس قطری که همه‌ی عناصرِ قطرِ آن برابر با ۱ باشد، ماتریس همانی یا ماتریس واحد نامیده می‌شود. ماتریس زیر یک ماتریس همانیِ مرتبه‌ی n است:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ترانهاده‌ی یک ماتریس: اگر در یک ماتریس، جای سطر و ستون را با هم عوض کنیم، ماتریسی به دست می‌آید که آن را ترانهاده‌ی ماتریسِ نخست می‌نامیم. اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد، ترانهاده‌ی آن ماتریسی $m \times n$ است. ترانهاده‌ی ماتریس را با حرف T مشخص می‌کنیم: $\left(a_{ij}\right)^T = \left(a_{ji}\right)$

مثلاً

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

دترمینان یک ماتریس: به هر ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$، عددی منحصر به فرد به نام دترمینانِ آن ماتریس، نسبت می‌دهیم که با نماد $dct(A)$ یا $|A|$ نشادن داده می‌شود. مقدار دترمینان را به روش استقرایی بر روی مرتبه‌ی ماتریس، n ، به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$n=1\to A_{1\times 1}=(a); \qquad dct(A)=|A|=a$$

برای ماتریس‌های مرتبه‌ی بالاتر ابتدا لازم است مفهوم دیگری به نام همسازه (cofactor) تعریف کنیم.

$$\mathrm{cof}a_{ij}=(-1)^{i+j}dct(M_{a_{ij}})$$

برای ماتریس 2×2 ماتریس‌های M ، ماتریس‌هایی 1×1 هستند که تا این‌جا برای آن‌ها دترمینان را تعریف کرده‌ایم.

بدین‌ترتیب برای یک ماتریس 2×2 همسازه‌ها برابرند با:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\to \mathrm{cof}a_{11}=a_{22}; \quad \mathrm{cof}a_{12}=-a_{21}; \quad \mathrm{cof}a_{21}=-a_{12}; \quad \mathrm{cof}a_{22}=a_{11}$$

دانشگاه خوارزمی

$$dct(A) = dct\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}\text{cof}\ \ a_{1j} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ بسط برحسب سطر اول

$$dct(A) = dct\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} a_{2j}\text{cof}\ \ a_{2j} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$$ بسط برحسب سطر دوم

برای ماتریس‌های با مرتبه‌ی بالاتر:

$$dct(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\text{cof}\ \ a_{ij} = a_{i1}\text{cof}\ \ a_{i1} + a_{i2}\text{cof}\ \ a_{i2} + \cdots + a_{in}\text{cof}\ \ a_{in}$$ بسط برحسب سطر iام

$$dct(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\text{cof}\ \ a_{ij} = a_{1j}\text{cof}\ \ a_{1j} + a_{2j}\text{cof}\ \ a_{2j} + \cdots + a_{nj}\text{cof}\ \ a_{nj}$$ بسط برحسب ستون jام

مثال: دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را حساب کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

حل:

$$\boxed{dct(A) = 1 \times (-3) - 2 \times 0 = -3}$$

$$\begin{aligned} dct(B) &= 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \Big((-3) \times 2 - 2 \times 3\Big) - 3 \times \Big(4 \times 2 - 2 \times 9\Big) + 8 \times \Big((4 \times 3 - (-3) \times 9)\Big) \\ &= -12 + 30 + 312 \\ &= 330 \end{aligned}$$

الحاقی یک ماتریس: ترانهاده‌ی ماتریس همسازه‌های ماتریس A را الحاقی ماتریس A می‌نامیم:

$$adj(A) = \left(\text{cof } a_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} \text{cof } a_{11} & \text{cof } a_{12} & \dots & \text{cof } a_{1n} \\ \text{cof } a_{21} & \text{cof } a_{22} & \dots & \text{cof } a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof } a_{n1} & \text{cof } a_{n2} & \dots & \text{cof } a_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \text{cof } a_{11} & \text{cof } a_{21} & \dots & \text{cof } a_{n1} \\ \text{cof } a_{12} & \text{cof } a_{22} & \dots & \text{cof } a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof } a_{1n} & \text{cof } a_{2n} & \dots & \text{cof } a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال: الحاقی ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حل:

$$\text{cof } a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad \text{cof } a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{cof } a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{cof } a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad \text{cof } a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{cof } a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{cof } a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6; \quad \text{cof } a_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad \text{cof } a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\boxed{adj(A) = \begin{pmatrix} \text{cof } a_{11} & \text{cof } a_{21} & \text{cof } a_{31} \\ \text{cof } a_{12} & \text{cof } a_{22} & \text{cof } a_{32} \\ \text{cof } a_{13} & \text{cof } a_{23} & \text{cof } a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$B = \alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{b_{ij} = \alpha a_{ij}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$-A = (-1)A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\left(A\right)_{n\times m}\left(B\right)_{m\times p}=\left(C\right)_{n\times p}$$

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}}$$

مثال زیر چگونگی ضرب ماتریس‌ها را نشان می دهد:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times5+2\times3 & 1\times4+2\times2\\ 3\times5+5\times3 & 3\times4+\times5\times2\\ 4\times5+1\times3 & 4\times4+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 30 & 22\\ 23 & 18\end{pmatrix}$$

واضح است که حاصل‌ضرب ماتریسی در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نیست:

$$AB\neq BA$$

در مورد اعداد، با مفهوم وارنِ یک عدد آشنا هستیم. وارونِ هر عدد به شکلی تعریف می‌شود که حاصل‌ضربِ هر عدد در وارونش برابر با 1 می‌شود. مثلاً وارونِ عدد 5 را به شکلِ $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$ می‌نویسیم و $5 \times 5^{-1} = 1$

ماتریس مربعی A با مرتبه‌ی $n \times n$ وارون پذیر است هرگاه بتوان ماتریس مربعی B با مرتبه‌ی $n \times n$ را به گونه‌ای یافت که حاصل ضربِ آن با A برابر با ماتریس همانی شود. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم

$$\boxed{AB = BA = I_n; \qquad B = A^{-1}}$$

وارونِ ماتریس A را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

ماتریسی وارون‌پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی