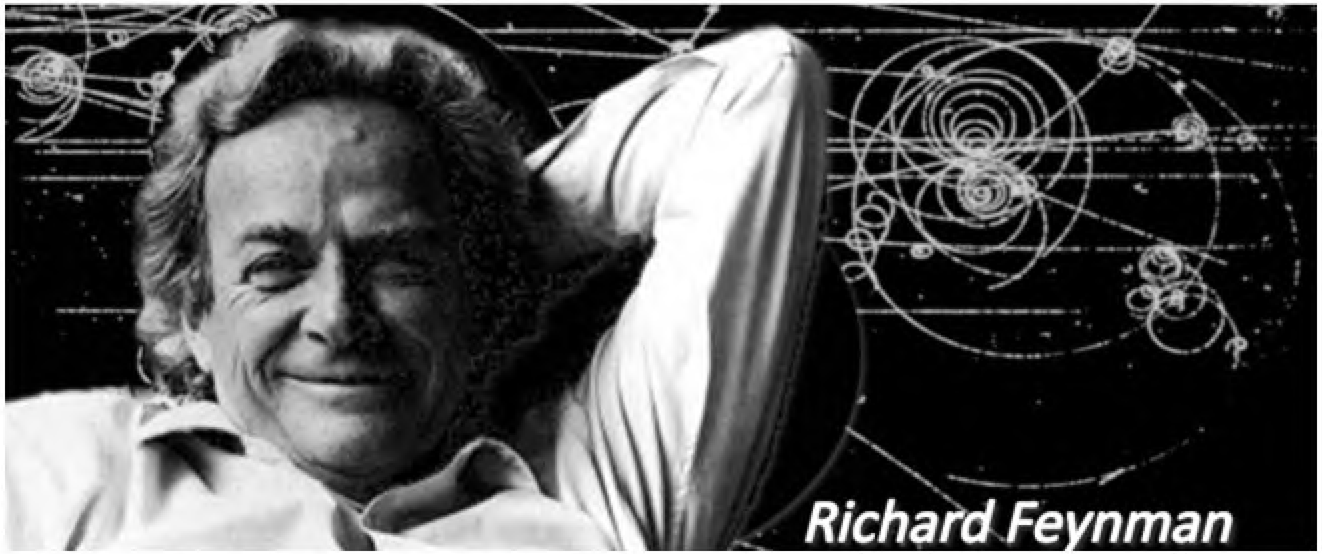
# Electromagnetism I

**Faculty of Physics-Kharazmi University**

**Dr. Faramarz Kanjouri**

**Spring 2023**




اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

# درس دوم

# اسکالر، بردار و تانسور

# Scalar, Vector and Tensor

دانشگاه خوارزمی

# لطفا پیش از شروع این درس،

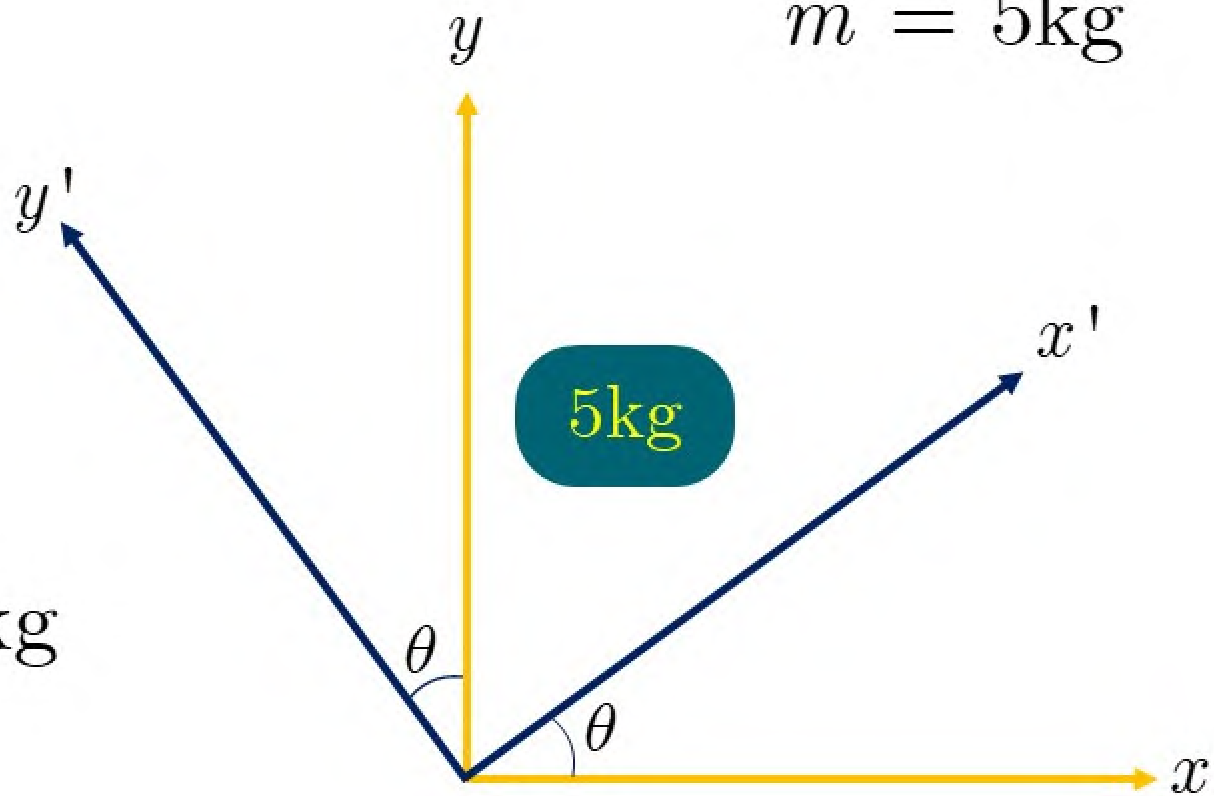
# درس‌نامه‌های ۱ و ۲ و ۳ درس **فیزیک پایه ۲**

# اینجانب را مطالعه کنید

https://kanjouri.com

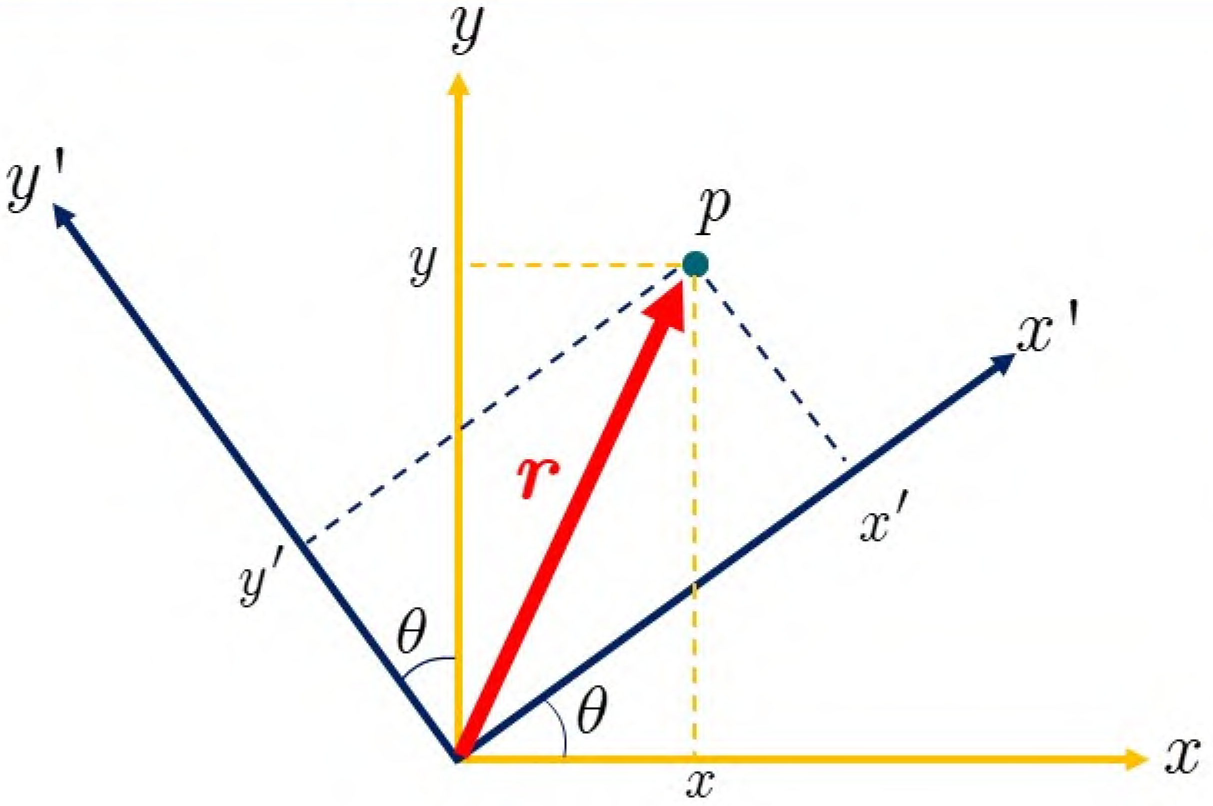
دانشگاه خوارزمی

$$m = 5\text{kg}$$




$$m' = 5\text{kg}$$

# تبدیل مختصات یک نقطه با چرخش دستگاه مختصات




$$x' = x\cos\theta + y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$y' = x\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ x'_2 &= -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

تبدیل خطی $\left[\boldsymbol{r}'\right] = \left[\boldsymbol{A}\right]\left[\boldsymbol{r}\right]$

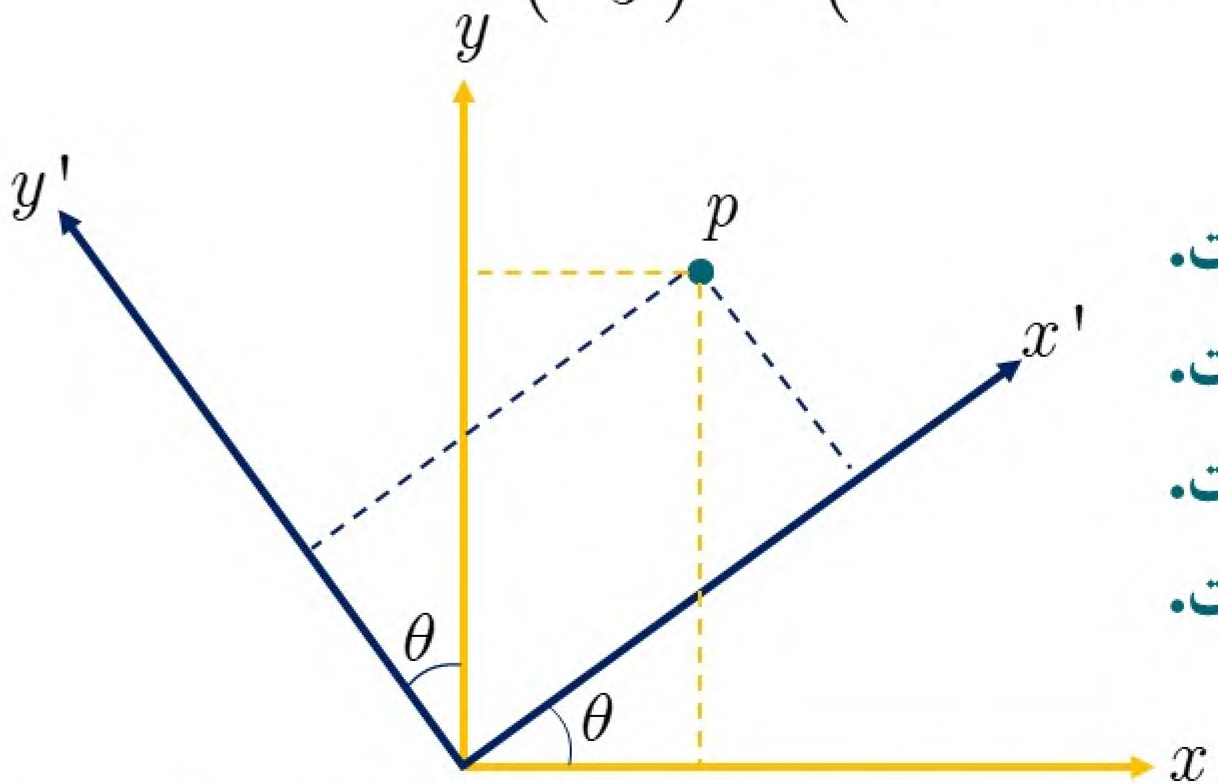
ماتریس تبدیل

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j}$$




$a_{11}$ کسینوس زاویه‌ی بین محور $x'$ و $x$ است.

$a_{12}$ کسینوس زاویه‌ی بین محور $x'$ و $y$ است.

$a_{21}$ کسینوس زاویه‌ی بین محور $y'$ و $x$ است.

$a_{22}$ کسینوس زاویه‌ی بین محور $y'$ و $y$ است.

اگر دستگاه پریم‌دار نسبت به دستگاه بدونِ پریم حول محورِ دلخواهی چرخیده باشد، رابطه‌ی تبدیل را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j$$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$a_{ij}$ ها کسینوس‌های هادی محورهای دستگاه پریم‌دار نسبت به محورهای دستگاه بدون پریم است.

$$\boxed{x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (i = 1,2,3)}$$

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی

بردار کمیتی است که مؤلفه‌های آن تحت چرخش دستگاه مختصات، مانند مختصات نقاط تغییر کند.

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

$$\boxed{F_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} F_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} F_j \qquad (i = 1, 2, 3)}$$

به راحتی دیده می‌شود که تحت تبدیل زیر طول بردار مکان ناوردا است.

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |\boldsymbol{r}'|^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= x^2\cos^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\cos^2\theta + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= |\boldsymbol{r}|^2 \end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

به طور کلی، تبدیلی که تحتِ آن اندازه‌ی بردار ثابت بماند **تبدیل متعامد** نامیده می‌شود.

$$\boxed{x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j}$$

$$\boxed{\sum_{i}^{3} (x'_i)^2 = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} x_j x_k = \sum_{j}^{3} (x_j)^2}$$

**شرط این که تبدیل $A = \{a_{ij}\}$ متعامد باشد این است که**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\left[\boldsymbol{r}'\right]=\left[\boldsymbol{A}\right]\left[\boldsymbol{r}\right]$$

$$x_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j$$

---

## اگر $B=A^{-1}$ وارون تبدیل $A$ باشد،

$$\left[\boldsymbol{B}\right]\left[\boldsymbol{r}'\right]=\left[\boldsymbol{A}^{-1}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left[\boldsymbol{r}\right]=\left[\boldsymbol{r}\right]$$

$$\left[\boldsymbol{r}\right]=\left[\boldsymbol{B}\right]\left[\boldsymbol{r}'\right]$$

$$x_j=\sum_{i=1}^{3}b_{ji}x_i'$$

$$x_j=\sum_{i=1}^{3}b_{ji}\sum_{k=1}^{3}a_{ik}x_k$$

$$x_j=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}b_{ji}a_{ik}x_k$$

$$\sum_{i=1}^{3}b_{ji}a_{ik}=\delta_{jk}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\sum_{i=1}^{3} b_{ji}a_{ik} = \delta_{jk}$$

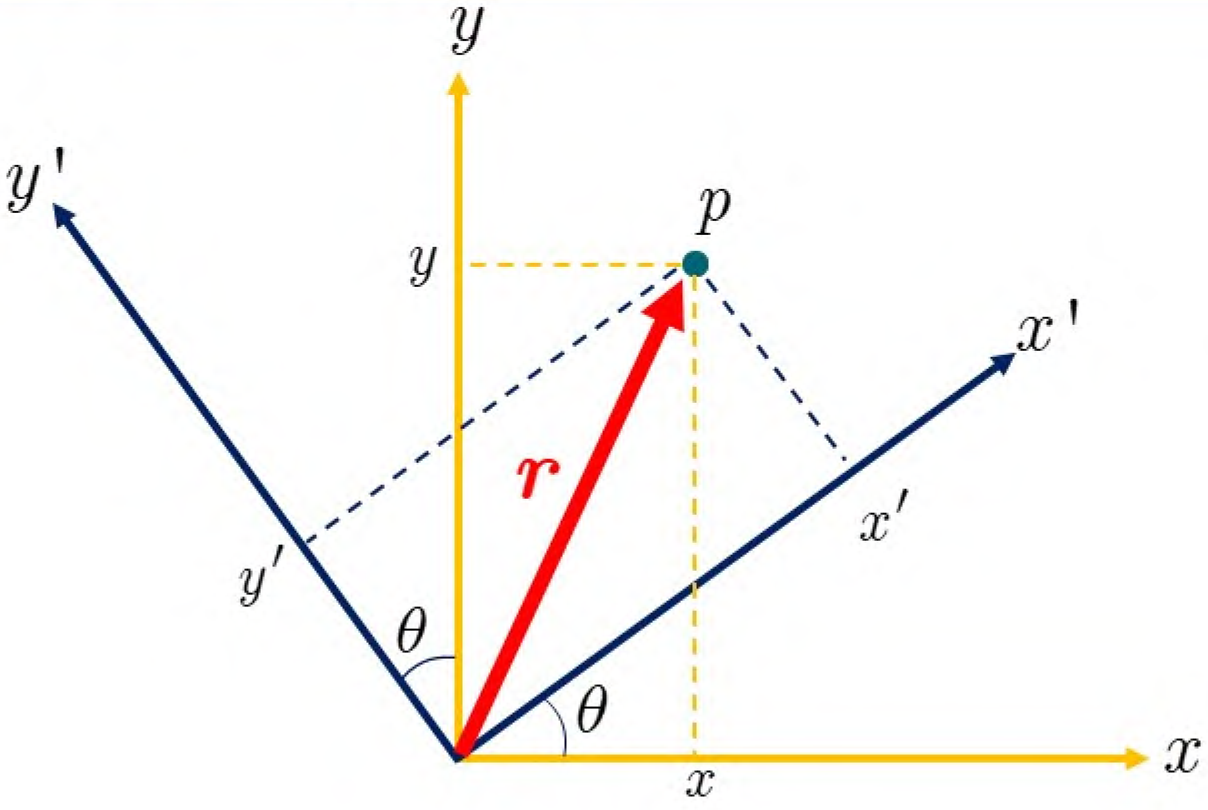
اما برای تبدیل متعامد دیدیم $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$ بنابر این $b_{ji} = a_{ij}$

**یعنی وارون یک تبدیل متعامد برابر با ترانهاده‌ی آن است**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

دانشگاه خوارزمی




$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$
$$z = z'$$

فرض کنید بردارهای $F$ و $G$ طبق معادله‌ی زیر
با هم رابطه دارندمتعامد باشد این است که

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{G}; \qquad F_i = \sum_j T_{ij} G_j$$

مثالی از چنین رابطه‌ای، رابطه‌ی بین
تکانه‌ی زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای‌است

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\omega \qquad \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

اگر $F'$ و $G'$ تبدیل یافته‌ی $F$ و $G$ تحت تبدیل $A$ باشند

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}; \qquad \boldsymbol{G}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$$

می‌خواهیم رابطه‌ی تبدیل $T$ را تحت تبدیل $A$ به دست آوریم

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{G}; \qquad F_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} G_j$$

$$F_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} F_j \qquad G_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} G_j$$

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{G}'; \qquad F_i' = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}' G_j'$$

فرض کنید $T'$ تبدیل یافته‌ی $T$ تحت تبدیل $A$ باشند

$$F_i' = \sum_{l=1}^{3} a_{il} F_l = \sum_{l=1}^{3} a_{il} \sum_{k=1}^{3} T_{lk} G_k$$

$$F_i' = \sum_{l=1}^{3} a_{il} \sum_{k=1}^{3} T_{lk} \sum_{j=1}^{3} a_{jk} G_j'$$

$$F_i' = \sum_{j=1}^{3} \left[ \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{il} a_{jk} T_{lk} \right] G_j'$$

$$T_{ij}' = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{il} a_{jk} T_{lk}$$

$$\boxed{T'_{ij} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{il} a_{jk} T_{lk}}$$

$$\boxed{T'_{ij} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\frac{\partial x'_j}{\partial x_k} T_{lk}}$$

دانشگاه خوارزمی

با دوران دستگاه مختصات

$m' = m$ تانسور مرتبه‌ی صفر (اسکالر)

$$F_i' = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} F_j$$ تانسور مرتبه‌ی یک (بردار)

$$T_{ij}' = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_l} \frac{\partial x_j'}{\partial x_k} T_{lk}$$ تانسور مرتبه‌ی دو (تانسور)

$$T_{ijm}' = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_l} \frac{\partial x_j'}{\partial x_k} \frac{\partial x_m'}{\partial x_s} T_{lks}$$ تانسور مرتبه‌ی سه

⋮

دانشگاه خوارزمی

در این‌جا به اجمال در مورد تانسورها و بردارها تحت تبدیل دستگاه مختصات سخن گفتیم. بسیار مطالب جالب و کاربردی در مورد تانسورها و بردارها هست که در این‌جا مطرح نکردیم. در متون نسبتاً پیشرفته‌تر، می‌توانید جزئیات لازم و مفیدی را پیدا کنید. در این‌جا تمایزی بین بردارها و تانسورهای هموردا و پادوردا قائل نشدیم. مطالب را صرفا در حد آشنایی اولیه با اصطلاحات بیان کرده‌ایم.

دانشگاه خوارزمی

# شاد و مهربان باشید