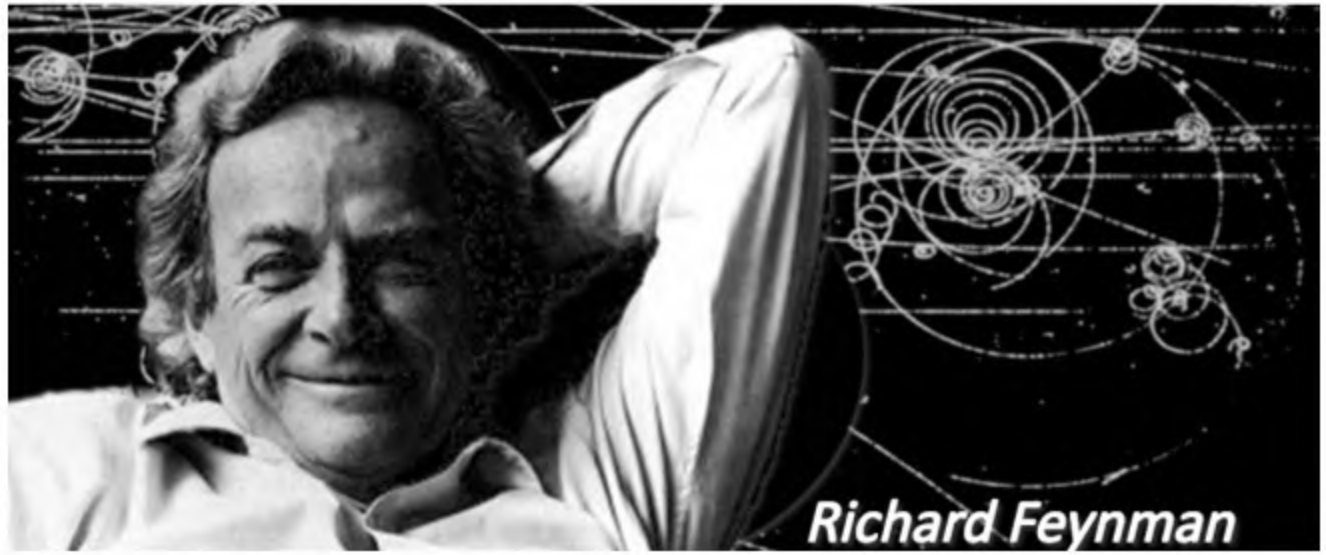
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

درس پنجم

گرادیان یک میدان اسکالر

Gradient of a Scalar Field

دانشگاه خوارزمی

دیدیم که تغییر تابع $f(x,y,z)$ از نقطه‌ی (x,y,z) به نقطه‌ی مجاور $(x+dx,y+dy,z+dz)$ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

از سوی دیگر

$$d\boldsymbol{l} = dx\hat{\boldsymbol{e}}_x + dy\hat{\boldsymbol{e}}_y + dz\hat{\boldsymbol{e}}_z = \sum_{i=1}^{3}\hat{\boldsymbol{e}}_i dx_i$$

بنابراین با توجه حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\cdot d\boldsymbol{l}$$

عبارت داخل پرانتز یک بردار است که **گرادیان تابع f** نامیده می‌شود.

$$\overrightarrow{grad}\, f \equiv \vec{\nabla} f$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z\right)\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z = \sum_{i=1}^{3}\hat{e}_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Del Operator عملگر گرادیان (عملگر دل)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z = \sum_{i=1}^{3}\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$df = (\vec{\nabla} f)\cdot d\boldsymbol{l}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

گرادیان هریک از توابع زیر را بیابید:

(الف) $f = x$

(ب) $f = r^2$ (r اندازه‌ی بردار مکان است)

(ج) $f = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{r}$ بردار مکان و $\boldsymbol{A}$ یک بردار ثابت است)

(د) $f = f(r)$ (فقط تابع اندازه‌ی بردار مکان است. بستگی زاویه‌ای ندارد.)

(الف)

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial x}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial x}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial x}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x + 0 + 0 = \boldsymbol{e}_x}$$

(ب)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} r^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)(x^2 + y^2 + z^2)\\ &= 2x\boldsymbol{e}_x + 2y\boldsymbol{e}_y + 2z\boldsymbol{e}_z\\ &= 2\boldsymbol{r}\end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال

(ج)

$$\vec{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)(A_x x + A_y y + A_z z)$$
$$= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$
$$= \boldsymbol{A}$$

مثال

(د)

$$\vec{\nabla} f(r) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{e}_z \right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

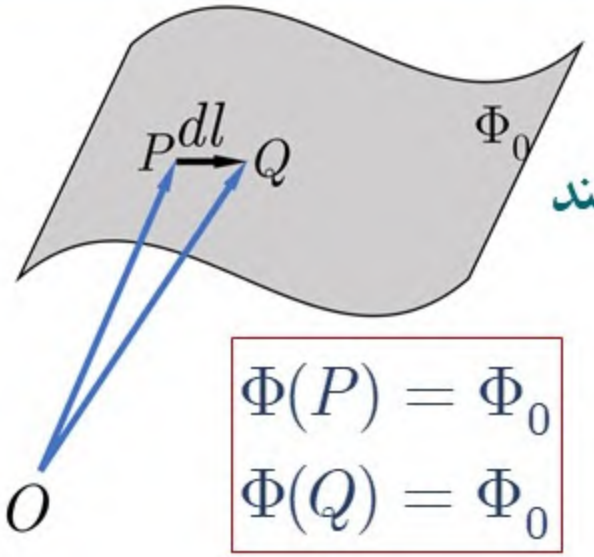
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \left(\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} \boldsymbol{e}_y + \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} \boldsymbol{e}_z \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(r) &= \frac{df}{dr}\left(\frac{x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z}{r} \right) \\ &= \frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \\ &= \frac{df}{dr}\boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

دانشگاه خوارزمی



عبارتِ $\Phi(x,y,z)=\Phi_0$ یک سطح ثابت را در فضای سه بُعدی مشخص می کند.

فرض کنید نقاطِ $P:(x,y,z)$ و $Q:(x+dx, y+dy, z+dz)$ دو نقطه بر روی این سطح باشند

$$\Phi(P) = \Phi_0$$
$$\Phi(Q) = \Phi_0$$

$$d\Phi = \Phi(P) - \Phi(Q) = 0$$
$$d\Phi = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = \vec{\nabla}\Phi \cdot dl$$

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot dl = 0$$

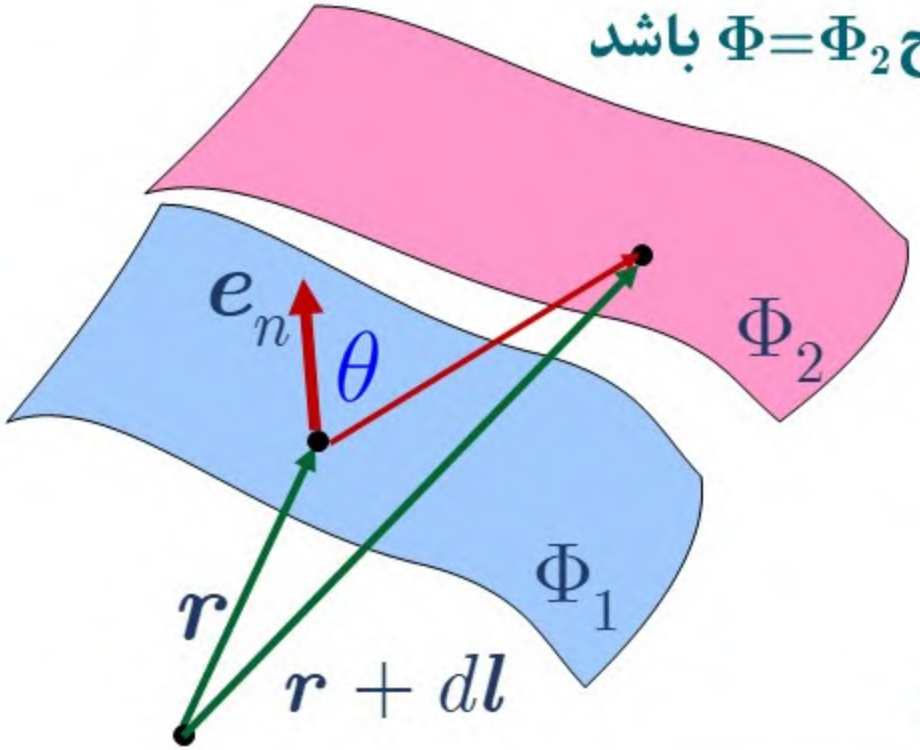
این رابطه نشان می‌دهد که $\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)$ برداری است که در نقطه‌ی $P:(x,y,z)$ بر سطح $\Phi(x,y,z)=\Phi_0$ عمود است.

$$e_n = \frac{\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)}{\left|\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right|}$$

بردار یکه‌ی عمود بر سطح در نقطه‌ی (x,y,z)

دانشگاه خوارزمی

حال فرض کنید نقطه‌ی P_1 بر سطح $\Phi=\Phi_1$ و نقطه‌ی P_2 بر سطح $\Phi=\Phi_2$ باشد



$$d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \vec{\nabla}\Phi \cdot dl = \left|\vec{\nabla}\Phi\right|\left|dl\right|\cos\theta$$

$$\frac{d\Phi}{dl} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{dl}{dl} = \left|\vec{\nabla}\Phi\right|\cos\theta$$

مشتق جهتی در جهت dl

به ازای $\theta=0$ مشتقِ جهتی بیش‌ترین مقدار را دارد و این بیش‌ترین مقدار همان گرادیانِ تابع است

$$\left.\frac{d\Phi}{dl}\right|_{\max} = \left|\vec{\nabla}\Phi\right|$$

خلاصه‌ی این مطالب را می توان به شکلِ زیر بیان کرد:

۱. گرادیان یک تابعِ اسکالر (مانند Φ)، برداری است که در هر نقطه بر سطحِ [ثابت $=\Phi$] عمود است.

۲. جهتِ گرادیان، راستای بیش‌ترین تغییرات را نشان می‌دهد.

مثال: تابع $\Phi(x,y,z)=xy$ را در نظر بگیرید. بردار یکه‌ی عمود بر صفحه‌ی $\Phi=2$ را در نقطه‌ی $(2,1,0)$ تعیین کنید.

حل:

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(xy) = \hat{e}_x \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial(xy)}{\partial z} = y\hat{e}_x + x\hat{e}_y$$

$$\vec{\nabla}\Phi\Big|_{(2,1,0)} = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y$$

$$\hat{e}_n = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{\left|\vec{\nabla}\Phi\right|} = \frac{\hat{e}_x + 2\hat{e}_y}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{e}_x + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{e}_y$$

دانشگاه خوارزمی

دیدیم که شکلِ عملگرِ گرادیان در دستگاه مختصاتِ کارتزین به صورت زیر است

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

می‌خواهیم عملگرِ گرادیان در دستگاه مختصاتِ استوانه‌ای بنویسیم

در دستگاه مختصاتِ استوانه‌ای بردار جابجایی جزیی dl به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\boxed{d\boldsymbol{l} = \hat{e}_\rho d\rho + \hat{e}_\phi \rho d\phi + \hat{e}_z dz}$$

از سوی دیگر اگر $\Phi = \Phi(\rho,\phi,z)$ یک تابع اسکالر باشد

$$\boxed{d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz}$$

$$\boxed{d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \rho d\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz}$$

$$
\begin{aligned}
d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\rho d\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\rho d\rho + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \rho d\phi + \hat{\boldsymbol{e}}_z dz\right) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \cdot d\boldsymbol{l}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{\nabla} = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}
$$

دانشگاه خوارزمی

روش دوم: از رابطه‌ی بین مختصات دستگاه کارتزین و دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\hat{e}_x = \cos\phi\hat{e}_\rho - \sin\phi\hat{e}_\phi$$
$$\hat{e}_y = \sin\phi\hat{e}_\rho + \cos\phi\hat{e}_\phi$$
$$\hat{e}_z = \hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

دانشگاه خوارزمی

عنصر طول در دستگاه مختصات کروی:

$$d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{e}}_r dr + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta r d\theta + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi r \sin\theta d\phi$$

به عنوان تمرین نشان دهید:

عملگر گرادیان در دستگاه مختصات کروی

$$\vec{\nabla} = \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

دانشگاه خوارزمی

تمرین: نشان دهیدکه شکلِ عملگرِ گرادیان در دستگاه مختصات خمیده به صورتِ زیر است:

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i}$$
$$= \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}$$

دانشگاه خوارزمی

مثال: گرادیان هر یک از توابع زیر را پیدا کنید. a و b مقادیر ثابتی هستند

(الف) $f(x,y,z) = ax^2y + by^3z$

(ب) $g(\rho,\phi,z) = a\rho^2 \sin\phi + b\rho z \cos 2\phi$

(ج) $h(r,\theta,\phi) = \dfrac{a}{r} + br\sin\theta\cos\phi$

حل:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = 2axy\hat{e}_x + (ax^2 + 3by^2z)\hat{e}_y + by^3\hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla} g(\rho,\phi,z) = (2a\rho\sin\phi + bz\cos 2\phi)\hat{e}_\rho + (a\rho\cos\phi - 2bz\sin 2\phi)\hat{e}_\phi + b\rho\cos 2\phi\hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla} h(r,\theta,\phi) = \left(-\frac{a}{r^2} + b\sin\theta\cos\phi\right)\hat{e}_r + (b\cos\theta\cos\phi)\hat{e}_\theta - b\sin\phi\hat{e}_\phi$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید