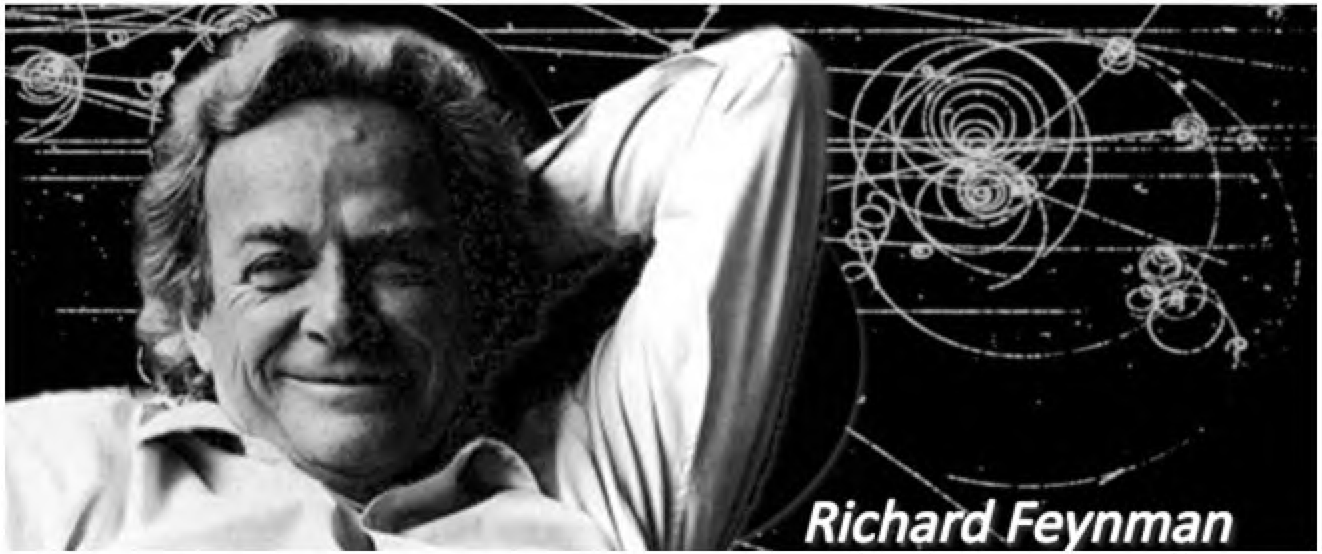
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

فاینمن

دانشگاه خوارزمی

درس ششم

حساب انتگرال

Integral Calculus

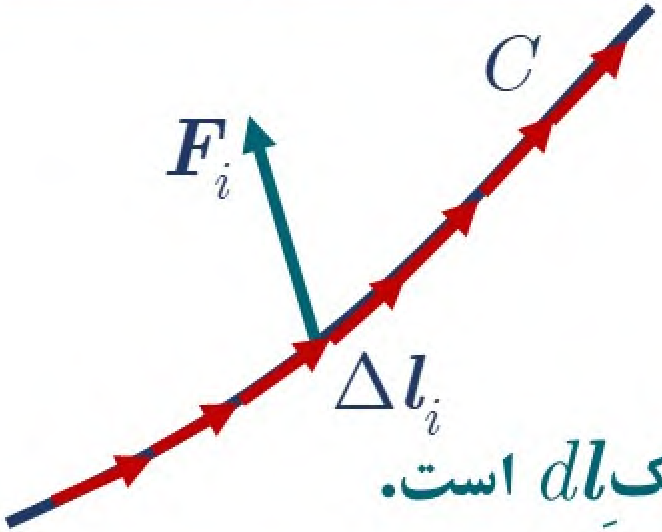
دانشگاه خوارزمی

در الکترومغناطیس معمولاً با انتگرال هایی به شکل زیر سروکار داریم:

انتگرال خطی (بر روی مسیر C) $\int_C f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l}$ $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{l}$ $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\times d\boldsymbol{l}$

انتگرال سطحی (بر روی سطحِ A) $\int_A \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{a}$

انتگرال حجمی (درونِ حجمِ A) $\int_V f(\boldsymbol{r})dv$ $\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv$



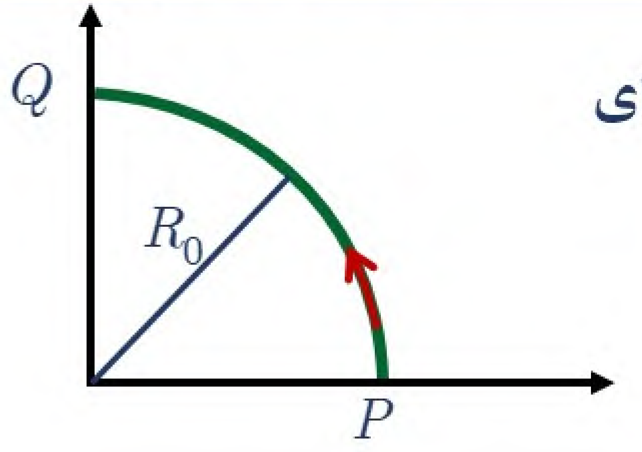
انتگرال خطی $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l}$

این انتگرال بر روی منحنی C گرفته می‌شود

انتگرال‌ده (تابع درونِ انتگرال) تصویرِ بردارِ $\boldsymbol{F}$ بر روی جابجایی کوچکِ $d\boldsymbol{l}$ است.
$d\boldsymbol{l}$ در هر نقطه بر منحنی مماس است. این انتگرال بر روی منحنی C گرفته می‌شود

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta \boldsymbol{l}_i \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{l}_i$$

اگر مسیر C یک منحنیِ بسته باشد، از نماد $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ استفاده می‌کنیم



اگر $\boldsymbol{F} = xy\hat{\boldsymbol{e}}_x - 2x\hat{\boldsymbol{e}}_y$ باشد، انتگرالِ $\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$ را بر روی مسیرِ ربعِ دایره‌ای به شعاعِ $R_0 = 1$ در شکلِ زیر از نقطه‌ی P تا نقطه‌ی Q حساب کنید.

حل:

الف) استفاده از دستگاه مختصاتِ کارتزین:

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = xydx - 2xdy$$

معادله‌ی ربعِ دایره:

$$x^2 + y^2 = R_0^2 = 1 \qquad 0 \le x, y \le 1$$

$$\int_P^Q \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{R_0=1}^{0} x\sqrt{R_0^2 - x^2}dx - 2\int_0^{R_0=1}\sqrt{R_0^2 - y^2}dy = -\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

ب) استفاده از دستگاه مختصاتِ قطبی:

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho(R_0^2\cos^2\phi\sin\phi - 2R_0\cos\phi\sin\phi) - \hat{\boldsymbol{e}}_\phi(R_0^2\cos\phi\sin^2\phi + 2R_0\cos^2\phi)$$

$$d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi R_0 d\phi$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_P^Q \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\int_0^{\pi/2} R_0^2(R_0\cos\phi\sin^2\phi + 2\cos^2\phi)d\phi \\ &= -R_0^2\left(\frac{R_0}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}}$$

دانشگاه خوارزمی

انتگرال‌های خطی

$$\int_C f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l}, \quad \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times d\boldsymbol{l}$$

این انتگرال‌ها نیز به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\boxed{\int_C f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta \boldsymbol{l}_i \to 0} \sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\Delta \boldsymbol{l}_i}$$

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta \boldsymbol{l}_i \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}_i \times \Delta \boldsymbol{l}_i}$$

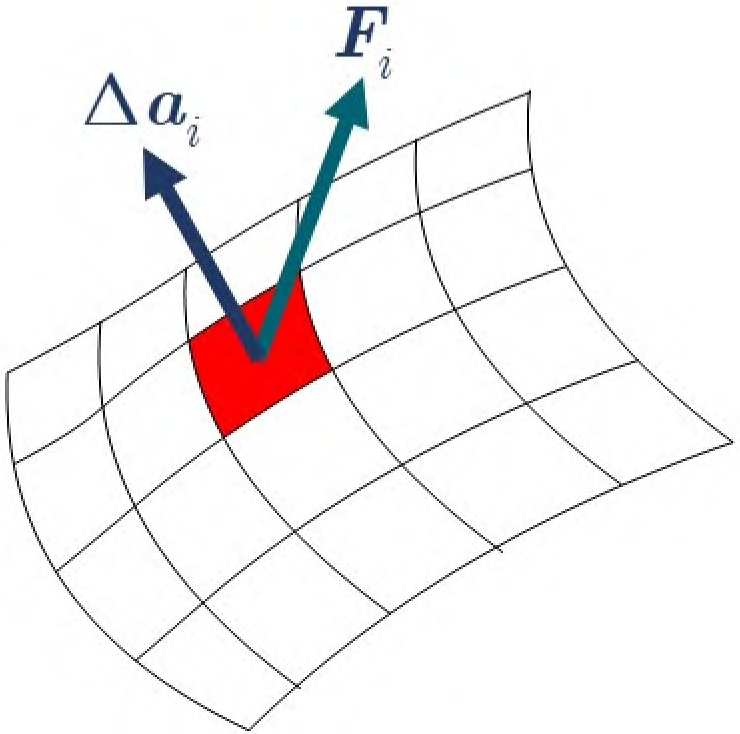
توجه شود که در دستگاه مختصات کارتزین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\int f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \int f(\boldsymbol{r})dx + \hat{\boldsymbol{e}}_y \int f(\boldsymbol{r})dy + \hat{\boldsymbol{e}}_z \int f(\boldsymbol{r})dz}$$

اما در حالت کلی در دستگاه‌های دیگر رابطه‌ی مشابه برقرار نیست:

$$\int f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} \neq \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \int f(\boldsymbol{r})d\rho + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \int f(\boldsymbol{r})\rho d\phi + \hat{\boldsymbol{e}}_z \int f(\boldsymbol{r})dz$$

$$\int f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} \neq \hat{\boldsymbol{e}}_r \int f(\boldsymbol{r})dr + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \int f(\boldsymbol{r})rd\theta + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \int f(\boldsymbol{r})r\sin\theta d\phi$$



انتگرالِ سطحیِ $\int_A \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{a}$

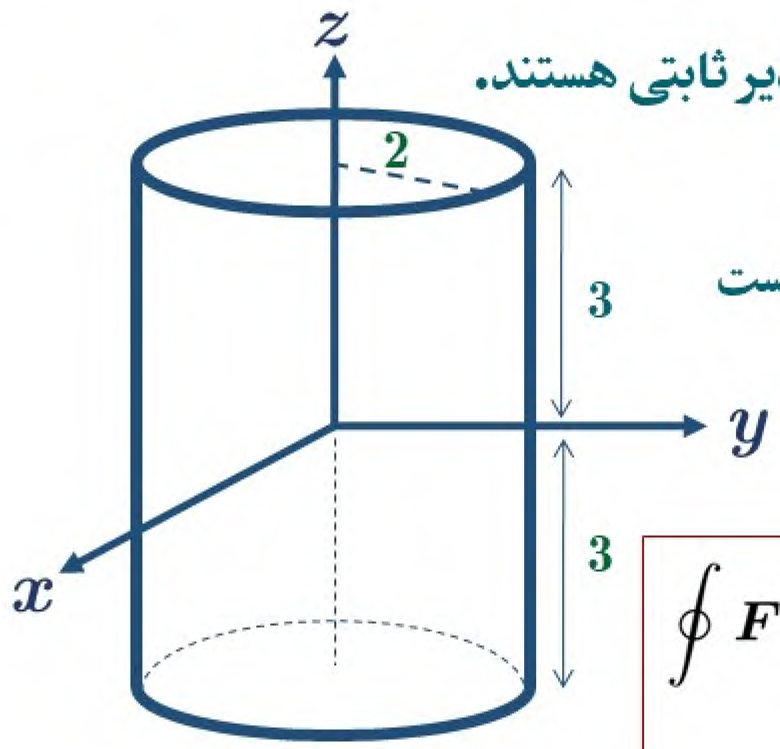
حاصل این انتگرال یک کمیت عددی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\int_A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta \boldsymbol{a}_i \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{a}_i}$$

این انتگرال را **شارِ (فلویِ)** میدانِ $\boldsymbol{F}$ بر سطحِ A می‌نامیم.

اگرسطحِ A یک سطحِ بسته باشد، انتگرال را به شکل زیر می نویسیم:

$$\oint_A \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{a}$$



میدان برداری $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \dfrac{a}{\rho} + bz\hat{\boldsymbol{e}}_z$ را در نظر بگیرید که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند.

انتگرال $\oint \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{a}$ را بر روی سطحِ استوانه‌ای حساب کنید که محور آن، محور z است و با معادلاتِ $z = \pm 3$ و $\rho = 2$ مشخص می‌شود.

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{\text{سطحِ بالایی}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z da + \int_{\text{سطحِ پایینی}} \boldsymbol{F} \cdot (-\hat{\boldsymbol{e}}_z) da + \int_{\text{سطحِ جانبی}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\rho da$$

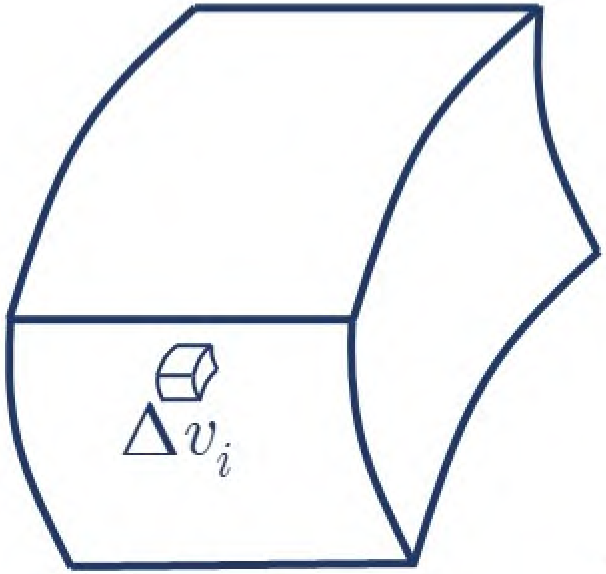
$$= \int_{[z=+3]} bz\rho d\rho d\phi + \int_{[z=-3]} -bz\rho d\rho d\phi + \int_{[\rho=2]} \frac{a}{\rho} dz\rho d\phi$$

$$=3b \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi + 3b \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi + a \int_{-3}^3 dz \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$=12\pi(a + 2b)$$

الف) انتگرالِ $\int_V f(\boldsymbol{r})dv$

در این‌جا بر روی یک میدانِ عددی، درونِ حجمِ V انتگرال گرفته می‌شود. حاصلِ انتگرال نیز یک کمیت عددی خواهد بود. این انتگرال به صورتِ زیر تعریف می‌شود:



$$\int_V f(\boldsymbol{r})dv = \lim_{\Delta v_i \to 0} \sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\Delta v_i$$

ب) انتگرالِ $\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv$

در این‌جا بر روی یک میدانِ برداری، درونِ حجمِ V انتگرال گرفته می‌شود. حاصلِ انتگرال نیز یک کمیت برداری خواهد بود. این انتگرال به صورتِ زیر تعریف می‌شود:

$$\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv = \lim_{\Delta v_i \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\Delta v_i$$

دانشگاه خوارزمی

انتگرال حجمی $\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv$

اگر $\boldsymbol{F}$ را بر حسب مؤلفه‌هایش در دستگاه مختصات کارتزین بنویسیم، می توان نوشت:

$$\boxed{\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv = \hat{\boldsymbol{e}}_x \int F_x(\boldsymbol{r})dv + \hat{\boldsymbol{e}}_y \int F_y(\boldsymbol{r})dv + \hat{\boldsymbol{e}}_z \int F_z(\boldsymbol{r})dv}$$

توجه شود که رابطه‌ی فوق در دستگاه‌های مختصات دیگر برقرار نیست:

$$\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv \neq \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \int F_\rho dv + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \int F_\phi dv + \hat{\boldsymbol{e}}_z \int F_z dv$$
$$\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv \neq \hat{\boldsymbol{e}}_r \int F_r dv + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \int F_\theta dv + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \int F_\phi dv$$

مثال

میدان برداری $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = xy\hat{e}_x - zx\hat{e}_y + \hat{e}_z$ را در نظر بگیرید. انتگرال $\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dv$ را محاسبه کنید.

V حجم یک‌هشتم کره‌ای به شعاع $R=1$ در ناحیه‌ی اول مختصات است: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$\boxed{\int_V \boldsymbol{F}dv = \hat{\boldsymbol{e}}_x \int F_x dv + \hat{\boldsymbol{e}}_y \int F_y dv + \hat{\boldsymbol{e}}_z \int F_z dv}$$

$$\begin{aligned}\int F_x dv &= \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx\, xy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \frac{1}{2} y\left(1-y^2-z^2\right) \\ &= \int_0^1 dz \frac{1}{8}\left(1-z^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{15}\end{aligned}$$

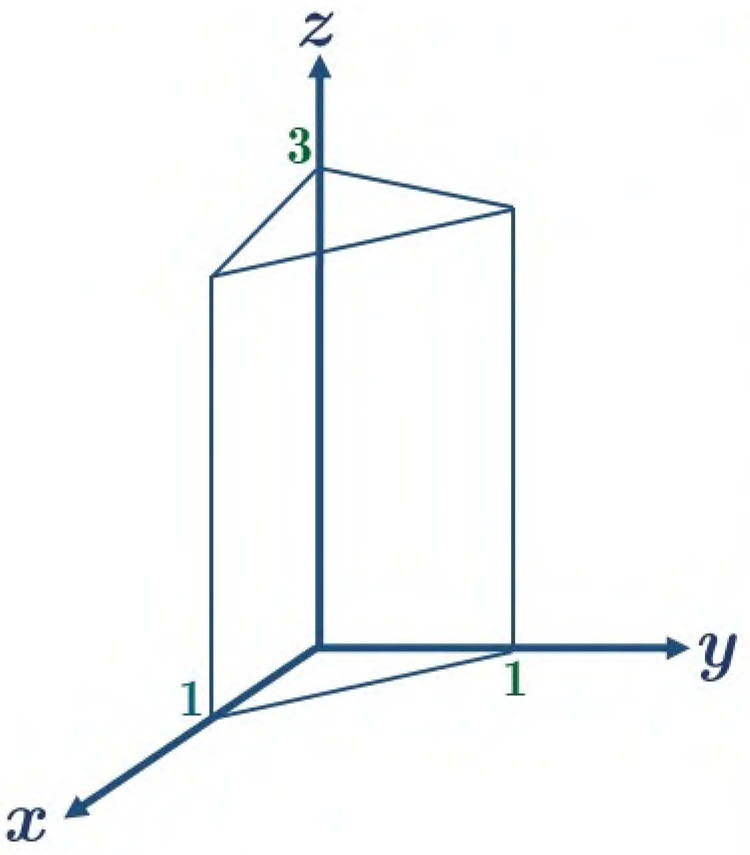
$$\begin{aligned}\int F_y dv &= -\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx\, zx \\ &= -\frac{1}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int F_z dv &= -\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx \\ &= -\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_V \boldsymbol{F}dv = \hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{1}{15} - \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{1}{15} - \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\pi}{6}}$$

دانشگاه خوارزمی

انتگرال حجمی تابع $f(x,y,z)= \; xyz^2$ در ناحیه‌ی شکل زیر حساب کنید



$$\int_V f dv = \int_0^3 z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x dx \right] dy \right\} dz$$

$$\begin{aligned}\int_V f dv &= \frac{1}{2} \int_0^3 z^2 \left\{ \int_0^1 y(1-y)^2 dy \right\} dz \\ &= \frac{1}{2}(9)\left(\frac{1}{12}\right) \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

شاد و مهربان باشید