فصل ۱

بارِ الکتریکی

در طبیعت چهار نوع برهم‌کنش (نیرو) وجود دارد. یعنی ذرات، به چهار شکل برهم‌کنش می‌کنند. این برهم‌کنش‌ها (نیروها) عبارت‌اند از:

- برهم‌کنشِ (نیرویِ) گرانشی
- برهم‌کنشِ (نیرویِ) الکترومغناطیسی
- برهم‌کنشِ (نیرویِ) قوی (هسته‌ای)
- برهم‌کنشِ (نیرویِ) ضعیف

هر یک از این نیروها ویژگی‌هایِ خاصِ خود را دارند و در مقیاس‌ها و ابعادِ مختلفی عمل می‌کنند. نیروی گرانشی در ابعادِ کیهانی خود را نشان می‌دهد. حداقل یکی از اجسام باید جرمِ بسیار زیادی داشته باشد (مثلِ ستاره یا سیاره). نیرویِ هسته‌ای نیرویِ بینِ ذراتی چون پروتون‌ها و نوترون‌هاست. نیرویِ ضعیف در واپاشیِ ذره‌یِ β ظاهر می‌شود. بدین‌ترتیب نیروهایِ هسته‌ای و ضعیف، کوتاه‌بُرد هستند و در ابعادِ هسته‌یِ اتم‌ها $(10^{-12} - 10^{-16}\mathrm{m})$ حائزِ اهمیت‌اند. نیرویِ الکترومغناطیسی در ابعادِ معمولی، یعنی همان ابعادِ زندگیِ ما، ظاهر می‌شود. به خاطرِ نیرویِ الکترومغناطیس است که می‌توانیم صفحاتِ همین کتاب را ببینیم. هر یک از این نیروها به ویژگی‌هایِ خاص ذرات مربوط می‌شوند. مثلاً نیرویِ گرانشی وابسته به جرمِ ذرات است. در موردِ نیرویِ الکترومغناطیسی این نقش به عهده‌یِ «بارِ الکتریکی» است. در فصل بعد در مورد نیرویِ الکتریکی بحث خواهیم کرد. در این فصل به «بارِ الکتریکی» می‌پردازیم. بار الکتریکی یک کمیتِ عددی است و مانند جرم از **خواص بنیادی** ماده است. همان طور که الکترون و پروتون جرم دارند، دارای خاصیت دیگری به نام «بار الکتریکی» هستند. در طبیعت دو نوع بار الکتریکی وجود دارد که ما آن‌ها را بنا به قرارداد بارهای مثبت و منفی می‌نامیم. اگر ذره‌ای این خاصیت را از خود نشان ندهد، گوئیم از لحاظ الکتریکی خنثی است یا بار الکتریکی آن صفر است. همه‌ی اجسام پیرامونِ ما از پروتون، الکترون و نوترون ساخته شده‌اند. بار الکترون و پروتون با هم برابر ولی از نظر علامت مختلف‌اند. الکترون بار منفی دارد و پروتون بار مثبت. نوترون نیز خنثی است. بدین ترتیب، همه‌ی اجسام دارای بار الکتریکی هستند؛ اما چون در حالت عادی تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های یك جسم با هم برابرند، اجسام از نظر الکتریکی خنثی هستند و ما در اصطلاح می‌گوئیم «بار الکتریکی ندارند». هر گاه به هر دلیل، تساوی بین الکترون‌ها و پروتون‌های یك جسم به هم بخورد، گوئیم جسم «باردار» شده است.

یکای اندازه‌گیری بار الکتریکی، در دستگاه SI، کولن است که آن را با حرف C مشخص می‌کنیم. اندازه‌ی بار

الکترون و پروتون را با e نشان می‌دهیم.

$$\text{بار الکترون} = -e = -1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

$$\text{بار پروتون} = +e = +1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

دو ویژگی مهمِ بارِ الکتریکی

۱. بار الکتریکی پایسته است؛ یعنی در هر واکنشی که ذراتِ باردار حضور داشته باشند، بارِ خالص، قبل و بعد از واکنش، همیشه یکسان است.

۲. بارالکتریکیِ همه‌ی ذراتِ شناخته شده، مضربِ درستی از بارِ الکترون (یا پروتون)، e، است. یعنی بارهای الکتریکیِ ذرات، همیشه صفر یا $\pm e$ یا $\pm 2e$ یا $\cdots$؛ و یا به طور کلی $q = ne$ هستند، که در آن $n = 0 \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots$. بنابر این، گفته می‌شود که بارِ الکتریکی «کوانتیده» است. یعنی به صورت دانه دانه و گسسته است و کم‌ترین مقدارِ آن، که کوانتای بار الکتریکی نامیده می‌شود، بارِ الکترون (یا پروتون) e است.

توزیع پیوسته‌ی بارِ الکتریکی

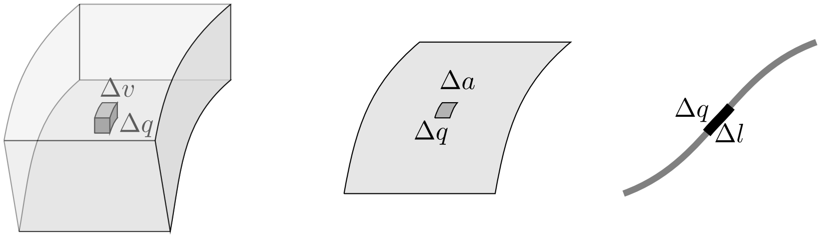
همان طور که در بالا گفته شد، بار الکتریکی کوانتیده است. به بیانِ دیگر، همواره با توزیع گسسته‌یِ بارِ الکتریکی سرو کار داریم. اما از آن‌جا که ابعادِ الکترون و پروتون (یعنی کوانتای بارِ الکتریکی)، بسیار بسیار ناچیز است و فواصل اتمی، نسبت به ابعاد معمولی، بی‌نهایت کوچك‌اند، در مقیاسِ بزرگ (ماکروسکوپیك) می‌توان توزیعِ بار الکتریکی را پیوسته در نظر گرفت.

- **توزیع خطی بار الکتریکی**

هر گاه بارِ الکتریکی را بر روی یك منحنی (خط راست یا خمیده) پخش کرده باشیم، گوئیم یك توزیعِ خطیِ بارِ الکتریکی داریم. ممکن است بار الکتریکی بر روی منحنی به طور یکنواخت توزیع شده باشد، یعنی در بخش‌های مختلف آن مقادیر بارِ الکتریکیِ یکسانی قرار گرفته باشد. و یا ممکن است در بعضی نقاط بارها فشرده‌تر و در نتیجه، مقدار بار الکتریکی در آن نقاط بیش‌تر باشد؛ و در نقاط دیگر بارها به طور رقیق توزیع شده باشند و در نتیجه بارهای کم‌تری در این نقاط قرار گیرند. **برای این که چگونگیِ توزیعِ بارِ الکتریکی را در نقاط مختلفِ یك منحنی مشخص کنیم، کمیتی را به نام چگالیِ خطی بار الکتریکی، به شکل زیر تعریف می‌کنیم:**

چگالیِ خطی بار الکتریکی: قطعه‌یِ کوچكِ Δl از منحنی را در نظر می‌گیریم. مقدارِ بارِ الکتریکیِ رویِ این قطعه را Δq می‌نامیم. چگالیِ خطیِ بارِ الکتریکی را با حرفِ λ نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \tag{۱-۱}$$



شکل ۱-۱: توزیعِ خطی، سطحی و حجمیِ بار الکتریکی

یکای این کمیت در دستگاه SI، $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}=\frac{\text{کولن}}{\text{متر}}$ است. چگالیِ خطیِ بارِ الکتریکی، یك تابعِ نقطه‌ای است، یعنی در حالت کلی از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر، بر روی منحنی، تغییر می‌کند، اگر λ برای همه‌یِ نقاطِ منحنی ثابت باشد، گوئیم توزیعِ بار یکنواخت است.

- **توزیع سطحیِ بارِ الکتریکی**

اگر بار الکتریکی بر رویِ یك سطح توزیع شده باشد، گوئیم یك توزیعِ سطحیِ بارِ الکتریکی داریم. مانند چگالیِ خطیِ بار، در این‌جا نیز **چگالیِ سطحیِ** بار به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta a} = \frac{dq}{da} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{۱-۲}$$

- **توزیع حجمیِ بار الکتریکی** اگر بار الکتریکی در حجمی از فضا توزیع شده باشد، گوئیم یك توزیعِ حجمیِ بار الکتریکی داریم. **چگالیِ حجمیِ** بارِ الکتریکی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} \tag{۱-۳}$$

توجه کنید که در هر یك از سه تعریفِ فوق عملِ حدگیری صورت می‌گیرد و عنصرهای طول، سطح و حجم، به سمت صفر میل داده شده‌اند. اما این عملِ حدگیری از دیدگاهِ بزرگ مقیاس (ماکروسکوپیک) است. یعنی از لحاظ ماکروسکوپیك، این عنصرها بسیار کوچك‌اند ولی از لحاظِ میکروسکوپیك (دیدگاهِ کوچك مقیاس) هنوز این عنصرها شاملِ تعداد قابل توجهی ذره‌ی باردار هستند.

حالات خاص

فرض کنید بار الکتریکی بر روی خطی به طول L با چگالی یکنواختِ λ توزیع شده باشد و ما بخواهیم بارِ الکتریکیِ کل آن را به دست آوریم. اگر این خطِ بار را به قطعاتِ کوچكِ dl تقسیم کنیم و بارِ هر قطعه dq باشد، طبق تعریف (۱-۱) می‌توان نوشت:

$$dq = \lambda dl$$

مجموع همه‌ی dqها برابر با بارِ کل Q خواهد شد، یعنی

$$Q = \int dq = \int_0^L \lambda dl$$

اما چون فرض کرده‌ایم که توزیع بار، یکنواخت است، یعنی λ ثابت است، می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد و در نتیجه

$$Q = \lambda L$$

و یا

$$\lambda = \frac{Q}{L} \tag{۱-۴}$$

به بیانِ دیگر چگالیِ خطیِ بار برابر است با نسبتِ بارِ کل Q به طولِ کل L. رابطه‌ی (۱-۴) فقط برای وقتی صحیح است که توزیع بار، یکنواخت باشد. در غیر این صورت باید ازتعریف (۱-۱) استفاده کرد.

به طریق مشابه وقتی بار Q بر سطح A به طور یکنواخت با چگالیِ σ توزیع شده باشد، می‌توان نوشت:

$$Q = \int \sigma da = \sigma A$$

و یا

$$\sigma = \frac{Q}{A} \tag{۱-۵}$$

همچنین اگر بارِ Q به‌طور یکنواخت در حجمِ V با چگالیِ ρ توزیع شده باشد، داریم:

$$Q = \int \rho dv = \rho V$$

و یا

$$\rho = \frac{Q}{V} \tag{۱-۶}$$

مسائل فصل ۱

مسئله ۱ - ۱ بار الکتریکی یك مول پروتون، ثابت فارادی نامیده می‌شود. مقدار عددی آن چه قدر است؟

حل: منظور از یك مول، تعداد $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ است که آن را عدد آووگادرو می‌نامیم. بنابراین بار الکتریکیِ یك مول پروتون برابر است با

$$q = N_0 e = \left(6.02 \times 10^{23}\right)\left(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}\right) = 9.63 \times 10^4 \mathrm{C}$$

این مقدار بارِ الکتریکی، با تجمعِ تعدادِ بسیار زیادی پروتون حاصل شده است و واضح است که مقدار بسیار زیادی است.

مسئله ۱ - ۲ بار الکتریکیِ جاری در یك لامپ معمولی (110 ولت و 150 وات) برابر با $1.5\ \mathrm{C/s}$ است. این مقدار بار، معادلِ چند الکترون در ثانیه است؟

حل:

$$q = ne \quad \Rightarrow \quad n = \frac{q}{e} = \frac{(1{/}5\ \mathrm{C/s})}{1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}} = 9.4 \times 10^{18} \frac{\text{تعداد}}{\mathrm{s}}$$

در این مسئله دقت کنید که q بر حسب کولن بر ثانیه نوشته شده است (یعنی در حقیقت جریان الکتریکی است). پس نتیجه‌ی به دست آمده، آهنگِ شارشِ الکترون‌ها، یا به بیان دیگر، تعداد الکترون‌ها در واحد زمان را نشان می‌دهد. بنابر این، بار الکتریکیِ جاری در یك لامپ معمولی، معادل 9.4×10^{18} الکترون در ثانیه است.

مسئله ۱ - ۳ چه مقدار بارِ منفی و چه مقدار بارِ مثبت، در یك لیوان آب (250 گرم) موجود است؟

حل: لازم است تعداد اتم‌ها را در250 گرم آب حساب کنیم. می‌دانیم که جرم مولکولیِ آب، یعنی جرمِ یك مول از مولکول‌های آب، برابر با $M = 18 \frac{\mathrm{g}}{mol}$ است. بنابر این جرم یک مولکول آب برابر است با:

$$m_0 = \frac{M}{N_0} = \frac{18}{6.2 \times 10^{23}}\ \mathrm{g}$$

اگر تعداد مولکول‌های آب را در 250g آب، N بنامیم، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$m = Nm_0 = N\frac{M}{N_0}$$

و یا

$$N = \frac{mN_0}{M} = \frac{(250)\left(6.02\times10^{23}\right)}{18} = 83.6\times10^{23}$$

عدد فوق، تعداد مولکول‌ها را در 250 گرم آب نشان می‌دهد.

می‌دانیم که هر مولکول آب از دو اتم هیدروژن و یك اتم اکسیژن درست شده است. هر اتم هیدروژن یك الکترون و هر اتم اکسیژن هشت الکترون دارند. بنابراین هر مولکولِ آب شامل ده الکترون و معادل آن پروتون است. بار هر الکترون $(-e)$ است، پس مقدار بار منفی در 250 گرم آب برابر است با:

$$q = N(10)(-e) = \left(83.6\times10^{23}\right)(10)\left(-1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}\right) = -13.4\ \times10^{6}\ \mathrm{C}$$

البته همین مقدار بارِ مثبت نیز در یك لیوان آب وجود دارد.

مسئله ۱-۴ یك سکه‌ی مسی، به جرمِ $m = 2.3\ \mathrm{g}$ در نظر بگیرید. کلِ بارِ مثبتِ این سکه را بر حسب کولن تعیین کنید.

جرمِ اتمیِ مس، $M = 63.54\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$، و تعدادِ پروتون‌های هر اتمِ آن 29 است.

حل: مانند مسئله‌ی (۱-۳) می‌توان تعداد اتم‌های موجود در سکه‌ی مسی را از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$N = \frac{mN_0}{M}$$

که در آن m جرم سکه، M جرمِ اتمیِ مس و N_0 عدد آووگادرو است. بنابراین:

$$N = \frac{(2.3\ \mathrm{g})\left(6.02\times10^{23}\frac{\mathrm{atoms}}{\mathrm{mol}}\right)}{63.54\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 2.18\times10^{22}\ \mathrm{atoms}$$

و در نتیجه:

$$q = NZe = \left(2.18\times10^{22}\right)(29)\left(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}\right) \approx 10^{5}\ \mathrm{C}$$

مسئله ۱-۵ کل بار هر یك از توزیع بارهای زیر را تعیین کنید

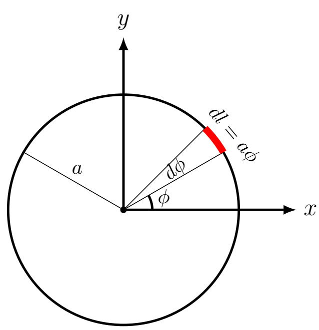
الف) بار خطی λ_0 به طور یکنواخت بر روی حلقهای دایره‌ای به شعاعِ a توزیع شده است.
ب) بار سطحی σ_0 به طور یکنواخت بر سطحِ یك قرص دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است.
ج) بار حجمی ρ_0 به طور یکنواخت درون کره‌ای به شعاع R توزیع شده است.
د) بار خطی به روی محور z با چگالی $\lambda = \lambda_0/(1+\frac{z^2}{a^2})$ توزیع شده است.

حل:

الف) روش اول: چون λ_0 ثابت است طبق رابطه‌ی ۱-۴ می‌توان نوشت:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{2\pi a} \quad \Rightarrow \quad Q = \lambda_0 2\pi a$$

زیرا طول کل حلقه (L) برابربا محیط دایره یعنی $2\pi a$ است.
روش دوم: می‌توان با انتخاب یك عنصرِ طول و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد. مطابق شکل (۱-۲) عنصر



شکل ۱-۲: شکل مربوط به مسئله‌ی ۵-۱ الف

طول dl را بر این حلقه در نظر می‌گیریم. طبق تعریف می‌توان نوشت: $dq = \lambda_0 dl$ که در آن dq مقدار بارِ الکتریکی بر روی عنصرِ طولِ dl است. مجموعِ همه‌ی dqها برابر با Q بارِ کلِ حلقه است:

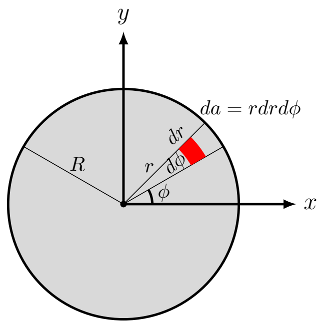
$$Q = \int dq = \int \lambda_0 dl = \int_0^{2\pi} \lambda_0 a d\phi = \lambda_0 a \int_0^{2\pi} d\phi = \lambda_0 a 2\pi$$

توجه کنید که λ_0 و a ثابت‌اند پس می‌توان آن‌ها را از انتگرال خارج کرد.

ب) روش اول: چون σ_0 ثابت است طبق رابطه‌ی (۱-۵) می‌توان نوشت:

$$\sigma_0 = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma_0 \pi R^2$$

زیرا مساحت کل قرص برابر با πR^2 است.



شکل ۱-۳: شکل مربوط به مسئله‌ی ۵-۱ ب

روش دوم: مطابق شکل (۱-۳) یك عنصر سطح (در دستگاه قطبی) در نظر می‌گیریم. مساحتِ این عنصرِ سطح برابر است با $da = rdrd\phi$. اگر بارِ این عنصرِ سطح dq باشد، آن‌گاه طبق رابطه‌ی (۱-۲) می‌توان نوشت: $dq = \sigma_0 da = \sigma_0 rdrd\phi$.
قرص را می‌توان مجموعه‌ای از این عناصرِ سطح در نظر گرفت؛ مجموعِ بار همه‌ی آن‌ها برابر است با بار کل Q یعنی:

$$Q = \int \sigma_0 rdrd\phi$$

در این جا یک انتگرالِ دوگانه داریم. هم r و هم ϕ متغیر انتگرال‌گیری هستند؛ پس

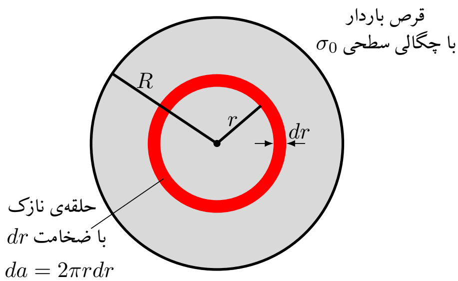
$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \sigma_0 rdrd\phi = \sigma_0 \int_{\phi=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{R} rdr\right\}d\phi$$

$$= \sigma_0 \int_{\phi=0}^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\,r^2\,\Big|_0^R\right\}d\phi = \sigma_0 \frac{1}{2}\,R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \sigma_0 \pi R^2$$

نکته: گاهی با توجه به تقارنِ مسئله می‌توان عنصرِ سطح را به گونه‌ای انتخاب کرد که از انتگرال‌گیریِ دوگانه اجتناب شود. مثلاً در این مسئله چون چگالی بارِ الکتریکی به ϕ بستگی ندارد. می‌توان عنصرِ سطح را به شکل حلقه‌ایی به شعاعِ r و ضخامتِ dr در نظر گرفت. در این صورت مساحت این عنصرِ سطح برابر است با

$da = 2\pi r dr$. و طبقِ رابطه‌ی (۱-۲) می‌توان نوشت:

$$Q = \int_{r=0}^{R} \sigma_0 2\pi r dr = \sigma_0 2\pi \left(\frac{1}{2}R^2\right) = \sigma_0 \pi R^2$$



شکل ۱-۴: بر رویِ یک قرص، عنصرِ سطحی به شکلِ حلقه‌ی نازکی در نظر گرفته شده است.

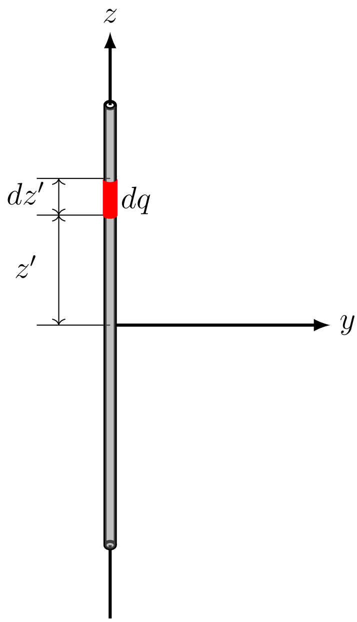
ج) روش اول: چون چگالی بار الکتریکی ثابت است از رابطه‌یِ (۱-۶) می‌توان نوشت:

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad Q = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

روش دوم: عنصر حجم در دستگاه کروی برابر است با $dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta d\phi$. و از رابطه‌ی (۱-۳) مشابه با آن چه در قسمت‌های الف و ب انجام دادیم، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho_0 dv \\ &= \rho_0 \int\int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta d\phi \\ &= \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \rho_0 4\pi \int_0^R r^2 dr \\ &= \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

د) در این‌جا چگالی بار الکتریکی یکنواخت نیست، بنابراین نمی‌توان رابطه‌ی (۱-۴) را به کار برد و باید از تعریف (۱-۱) استفاده کنیم.



شکل ۱-۵: شکل مربوط به مسئله‌ی (۱) قسمت د

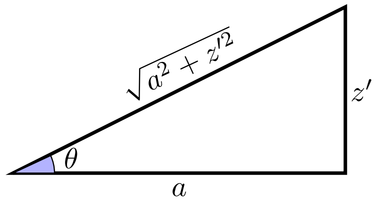
بر روی محورِ z، به فاصله‌ی z' از مبدأ، یك عنصرِ طول انتخاب می‌کنیم. اگر بارِ آن dq باشد طبق تعریف (۱-۱) می‌توان نوشت:

$$dq = \lambda dz' = \frac{\lambda_0}{1+\frac{z'^2}{a^2}} dz'$$

و در نتیجه بار کل برابر است با

$$Q = \int dq = \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{z'^2}{a^2}} dz'$$

برای محاسبه‌ی چنین انتگرال‌هایی تغییرِ متغیرِ $z'/a = \tan\theta$ را به کار می‌بریم. یعنی در واقع مثلثی قائم‌الزاویه در نظر می‌گیریم که دو ضلع قائمِ آن a و z' باشند به گونه‌ای که ضلعِ z' روبروی زاویه‌ی θ باشد. در این مسئله دامنه‌ی تغییراتِ z' از $-\infty$ تا $+\infty$ است. در نتیجه دامنه‌ی تغییراتِ θ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ است



شکل ۱-۶: شکل مربوط به مسئله‌ی (۱) قسمت د

زیرا:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{z'}{a} \Rightarrow \begin{cases} z' = +\infty \Rightarrow \theta = +\frac{\pi}{2} \\ \\ z' = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} z' &= a\tan\theta \\ dz' &= a\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{z'^2}{a^2}} dz' \\ &= \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{1+\tan^2\theta} \\ &= \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a d\theta \\ &= \lambda_0 a\left[+\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \lambda_0 a\pi \end{aligned}$$

مسئله ۱-۶ بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 r/R$ درون کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. (r فاصله‌ی هر نقطه تا مرکز کره است.)

الف) بار کل موجود در این کره را حساب کنید.

ب) مقدار بار موجود تا شعاعِ $r_0 = R/2$ چقدر است؟

حل:

الف) روش اول: عنصرِ حجم در دستگاه کروی به شکلِ زیر است:

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

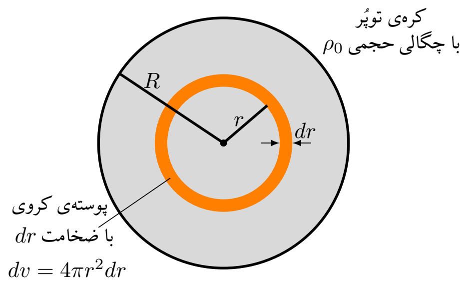
و در نتیجه از رابطه‌ی (۱-۳) داریم:

$$Q = \int \rho dv = \int\int\int \rho_0 \frac{r}{R} r^2 \sin\theta dr \, d\theta d\phi$$

$$Q = \frac{\rho_0}{R} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$Q = \frac{\rho_0}{R} \left(\frac{1}{4} R^4\right) (4\pi) = \rho_0 \pi R^3$$

روش دوم: چون چگالی به θ و ϕ بستگی ندارد می‌توان عنصرِ حجم را به شکلِ پوسته‌ای کروی به شعاعِ r و ضخامتِ dr در نظر گرفت. حجم این عنصرِحجم برابر است با: $dv = 4\pi r^2 dr$ و بارِ داخل این عنصرِ



شکل ۱-۷: شکل مربوط به مسئله‌ی (۱-۶) روش دوم

حجم برابر است با:

$$dq = \rho dv = 4\pi \frac{\rho_0}{R} r^3 dr$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه، بار کل به دست می‌آید:

$$Q = 4\pi \frac{\rho_0}{R} \int_0^R r^3 dr = \rho_0 \pi R^3$$

ب) برای حل این قسمت کافی است انتگرال‌گیری به روی متغیرِ r از 0 تا $r_0 = R/2$ صورت گیرد. اگر از روش دوم (در قسمت الف) استفاده کنیم می‌توان نوشت:

$$Q' = 4\pi \frac{\rho_0}{R} \int_0^{\frac{R}{2}} r^3 dr = 4\pi \frac{\rho_0}{R} \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Bigg|_0^{\frac{R}{2}} = \frac{\rho_0 \pi R^3}{16}$$

مسئله ۱-۷ اتم هیدروژن را متشکل از یک هسته با بارِ الکتریکيِ $+e$ و یک ابرِ الکترونی به دورِ هسته، در نظر بگیرید. فرض کنید ابرِ الکترونی تا بی‌نهایت گسترده است و به دورِ هسته تقارن کروی دارد. اگر چگاليِ حجميِ آن به شکل زیر باشد،

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right)$$

نشان دهید که بار کل این ابر الکترونی برابر با $-e$ است. (a_0 شعاع بوهر است)

حل: طبق رابطه‌ی (۱-۳) داریم: $Q = \int \rho dv$. در این جا چون چگاليِ بار فقط به r بستگی دارد و مستقل از θ و ϕ است می‌توان عنصرِ حجم را پوسته‌ی کروی به شعاعِ r و ضخامتِ dr در نظر گرفت (م ۱.۶ قسمت الف، روش دوم را ببینید) در نتیجه

$$Q = \int_0^{\infty} -\frac{e}{\pi {a_0}^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right) \ 4\pi r^2 dr = -\frac{4e}{{a_0}^3} \int_0^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right) \ dr$$

برای حل این انتگرال از روش جز به جز استفاده می‌کنیم: (یادآوری: $\int u \, dw = uw - \int w du$)

$$r^2 = u \Rightarrow du = 2r dr$$

$$\exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right) dr = dw \Rightarrow w = -\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right)$$

$$Q = -\frac{4e}{a_0^3} \left\{ \left[-\frac{a_0}{2} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right) \ 2r dr \right\}$$

$$Q = 0 - \frac{4e}{a_0^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r}{a_0} \right) \ r dr$$

برای حل این انتگرال نیز یک بارِ دیگر روش جز به جز را به کار می‌بریم. در این حالت می‌نویسیم:

$$r = u \Rightarrow \quad du = dr$$

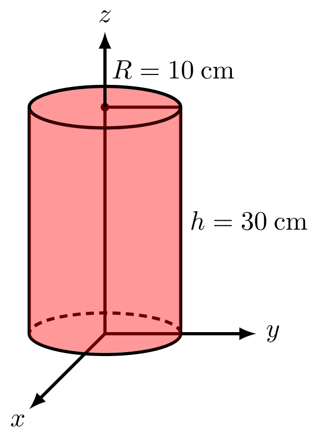
$$\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\ dr = dw \Rightarrow w = -\frac{a_0}{2}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

$$Q = -\frac{4e}{a_0^2}\left\{\left[-\frac{a_0}{2}r\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{a_0}{2}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\ dr\right\}$$

$$Q = -\frac{4e}{a_0^2}\left\{0 + \frac{a_0}{2}\left[-\frac{a_0}{2}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right]_0^\infty\right\} = -\frac{4e}{a_0^2}\left\{0 + \frac{a_0}{2}\left(0 + \frac{a_0}{2}\right)\right\} = -e$$

مسئله ۱-۸ کل بار موجود در استوانه‌ی نشان داده شده در شکل را، در صورتی که چگالی بار به شکل زیر باشد، پیدا کنید.

$$\rho = 100e^{-z}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{4}} \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$$



شکل ۱-۸: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۱-۸

حل: بهتر است مسئله را در دستگاهِ مختصاتِ استوانه‌ای حل کنیم. در این دستگاه داریم: $r^2 = x^2 + y^2$. توجه کنید که در دستگاه مختصات استوانه‌ای، r فاصله‌ی هر نقطه تا محور z است. بدین

ترتیب، چگالیِ حجمیِ بارِ الکتریکی را می‌توان به شکلِ زیر نوشت:

$$\rho = 100\frac{\exp(-z)}{\sqrt{r}} \quad \mathrm{C/m^3}$$

بارِ کل از رابطه‌ی $Q = \int \rho dv$ به دست می‌آید. می‌دانیم که عنصرِ حجم در دستگاهِ استوانه‌ای به صورتِ زیر است:

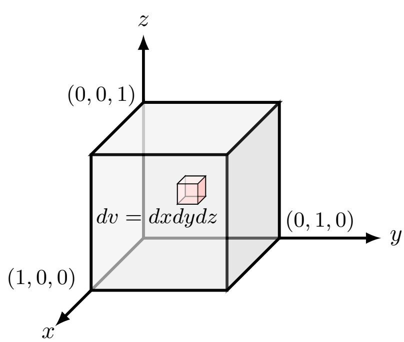
$$dv = rdrd\phi dz$$

بنابر این می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{0.3}\int_0^{2\pi}\int_0^{0.1} 100\frac{\exp(-z)}{\sqrt{r}} rdrd\phi dz \\ &= \int_0^{0.3}\int_0^{2\pi}\int_0^{0.1} 100\exp(-z)\left[\frac{2}{3}r^{3/2}\right]_0^{0.1} d\phi dz \\ &= 4.22\pi\int_0^{0.3}\exp(-z)dz \\ &= 4.22\pi\left[-\exp(-0.3)+1\right] \\ &= 3.43\mathrm{C} \end{aligned}$$

مسئله ۱-۹ درون مکعبی با مشخصاتِ $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$، بار الکتریکی با چگالیِ حجمیِ $\rho = 30x^2y \quad \left(\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m^3}}\right)$ توزیع شده است. کلِ بار موجود در این مکعب چقدر است؟

حل: عنصرِ حجم در دستگاهِ مختصاتِ دکارتی به شکلِ $dv = dxdydz$ است. بنابر این:



$$\begin{aligned} Q &= \int \rho dv \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 30x^2ydxdydz \\ &= 5 \quad \mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

مسئله ۱ - ۱۰ دو کره‌ی هم مرکز به شعاع‌های $r_1 = 1\ \mathrm{m}$ و $r_2 = 2\mathrm{m}$ در نظر بگیرید. در فضای بین این دو کره، یعنی در بازه‌ی $1 \leq r \leq 2$، بار الکتریکی با چگالیِ $\rho = 5\cos^2\phi/r^4$ (بر حسب $\mu\mathrm{C/m^3}$) توزیع شده است. کل بار را در فضای بین این دو کره پیدا کنید.

حل: عنصرِ حجم در دستگاهِ مختصاتِ کروی به شکلِ $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$است. بنابر این:

$$
\begin{aligned}
Q =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 \frac{5\cos^2\phi}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
=& 5\int_0^{2\pi} \cos^2\phi \ d\phi \int_1^2 \frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\
=& 5\pi \quad \mu\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

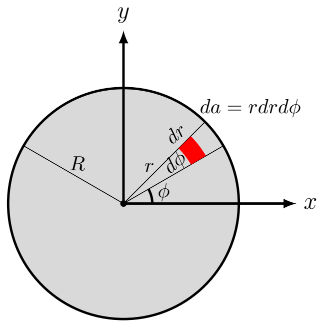
مسئله ۱ - ۱۱ صفحه‌ای به شکل دایره به شعاعِ $R = 4\mathrm{m}$ دارای چگالی سطحی بار الکتریکی

$$\sigma = \frac{\sin^2\phi}{2r} \quad \frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

است. بار کل آن چقدر است؟

حل: در این مسئله چون چگالیِ بار به زاویه‌ی ϕ بستگی دارد، نمی‌توانیم عنصرِ سطح را یک حلقه انتخاب کنیم. در این‌جا عنصرِ سطح به صورتِ $da = r dr d\phi$ است و طبقِ رابطه‌ی (۱ - ۲) می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
Q =& \int \sigma da \\
=& \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\sin^2\phi}{2r} r dr d\phi \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \ d\phi \int_0^4 dr \\
=& 2\pi \mu\mathrm{C}
\end{aligned}
$$



شکل ۱-۹: شکل مربوط به مسئله‌ی ۱-۱۱

مسئله ۱-۱۲ صفحه‌ی دایره‌ای به شعاعِ R دارای چگالی سطحی بار $\sigma = \sigma_0 \sin\phi$ است، که در آن σ_0 مقداری ثابت است. بار کل آن چه قدر است؟

حل: مانند مسئله‌ی (۱-۱۱) می‌توان نوشت:

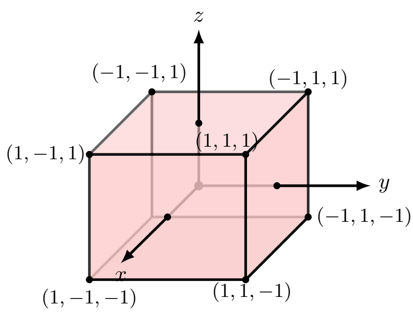
$$
\begin{aligned}
Q =& \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_0 \sin\phi r dr d\phi \\
=& \sigma_0 \int_0^{2\pi} \sin\phi \; d\phi \int_0^R \\
=& 0
\end{aligned}
$$

انتگرال‌گیری رویِ زاویه‌ی ϕ نتیجه‌ی صفر داده است. یعنی بارِ کل برابر با صفر است. این نتیجه قابلِ پیش بینی بود. زیرا $\sin\phi$ به ازایِ $0 < \phi < 2\pi$ از -1 تا 1 تغییر می‌کند و در نتیجه بارِ روی این صفحه بخشی مثبت و بخشی منفی (به طورِ برابر) خواهد بود و مجموعِ آن‌ها صفر است.

مسئله ۱-۱۳ درون مکعبی به ضلعِ $2\mathrm{m}$ که مرکز آن در مبدأ مختصات است و اضلاع آن موازی محورهای مختصات‌اند، بار الکتریکی با چگالیِ $\rho = 50x^2\cos(\pi y/2)$ $\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$ توزیع شده است. بارِ کلِ درون مکعب را به دست آورید.

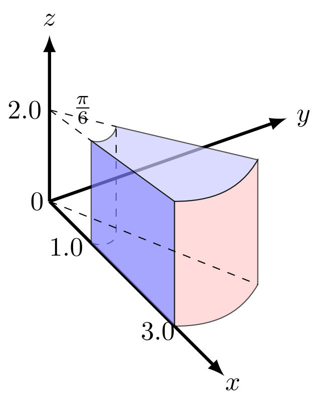
حل: این مسئله بسیار شبیه به مسئله‌ی (۱-۹) است. تفاوتِ آن در حدودِ انتگرال است. توجه کنید که در این

مسئله مبدأ مختصات در مرکزِ مکعب قرار دارد.



$$\begin{aligned}
Q &= \int \rho dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 50x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) dxdydz \\
&= 50\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}\left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]_{-1}^{1}[z]_{-1}^{1} \\
&= 50\frac{2}{3}\frac{4}{\pi}(2) \\
&= \frac{800}{3\pi}\quad \mu\text{C}
\end{aligned}$$

مسئله ۱-۱۴ در ناحیه‌ای از فضا، با مشخصاتِ $1.0 \le r \le 3.0$ و $0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$ و $0 \le z \le 2.0$ (در مختصات استوانه‌ای. r فاصله از محور z است.)، بارِ الکتریکی با چگالیِ $\rho = z\sin^2\phi \quad \frac{\mu\text{C}}{\text{cm}^3}$ توزیع شده است. بارِ الکتریکیِ موجود در این ناحیه را حساب کنید (فواصل بر حسبِ سانتی‌متر هستند).



حل: توجه کنید که در این‌جا با دستگاه مختصات استوانه‌ای سر و کار داریم. عنصر حجم در این دستگاه برابر

است با $dv = rdrd\phi dz$.

$$
\begin{aligned}
Q = \int \rho dv &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^3 z\sin^2\phi \quad rdrd\phi dz \\
&= \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 \frac{r^2}{2}\Big|_1^3 \right) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\phi \, d\phi \\
&= \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{8}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\phi \;\; d\phi \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2\phi}{2} \; d\phi \\
&= 8 \left(\frac{\phi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sin 2\phi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right) \\
&= 0.36 \ \mu\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

مسئله ۱-۱۵ در ناحیه‌ای از فضا، چگالی بار الکتریکی، در مختصات کروی به صورتِ زیر است

$$
\rho = \rho_0 \frac{e^{-\frac{r}{R}} \cos^2\phi}{\left(\frac{r}{R}\right)^2}
$$

- الف) بار الکتریکی درون کره‌ای به شعاعِ R چقدر است؟
- ب) بار الکتریکی در کل فضا (تا $r = \infty$) چقدر است؟

حل:

الف)

$$
\begin{aligned}
Q &= \int \rho dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho_0 \frac{e^{-\frac{r}{R}} \cos^2\phi}{\left(\frac{r}{R}\right)^2} r^2 \sin\theta \, drd\theta d\phi \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \;\; d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \;\; d\theta \int_0^{R} \frac{e^{-\frac{r}{R}}}{\left(\frac{r}{R}\right)^2} r^2 dr \\
&= \rho_0 \left(\frac{\phi}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2\phi}{4}\Big|_0^{2\pi} \right) \left(-\cos\theta \,|_0^{\pi}\right) \int_0^{R} \frac{e^{-\frac{r}{R}}}{\left(\frac{r}{R}\right)^2} r^2 dr
\end{aligned}
$$

در انتگرال‌گیری بر رویِ r تغییر متغیرِ $u = r/R$ را انجام می‌دهیم $(dr = Rdu)$

$$\begin{aligned} Q &= \rho_0(2)\pi R^3 \int_0^1 e^{-u}\, du \\ &= \rho_0(2)\pi R^3 \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^1 \\ &= \rho_0 2\pi R^3 \left(1 - e^{-1}\right) \\ &= 3.97\, \rho_0 R^3 \end{aligned}$$

ب) در این قسمت دُرُست مانند قسمت الف عمل می‌کنیم با این تفاوت که حدود انتگرال‌گیری برای r از 0 تا ∞ است.

$$\begin{aligned} Q_{\text{کل}} &= \rho_0 2\pi R^3 \int_0^\infty e^{-u}\, du \\ &= \rho_0 2\pi R^3 \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \rho_0 2\pi R^3 \end{aligned}$$

✎

مسائل اضافی فصل ۱

مسئله ۱-۱۶ چه مقدار بارِ منفی در $20\mathrm{g}$ آلومینیوم وجود دارد؟ عددِ اتمیِ آلومینیوم 13 و جرم اتمیِ آن $M = 27\ \mathrm{g/mol}$ است.

جواب: $9.30 \times 10^5\mathrm{C}$

مسئله ۱-۱۷ اگر بتوانیم تمامِ الکترون‌های آزادِ یک گلوله‌ی مسی (کره‌ای به شعاعِ $R = 1\ \mathrm{cm}$) را از آن جدا کنیم، چه مقدار بارِ الکتریکی به دست می‌آوریم؟ جرم اتمیِ مس، $M = 63.54\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ و چگالیِ آن $\rho_m = 8.92\mathrm{g/cm^3}$ است. فرض کنید هر اتمِ مس یک الکترونِ آزاد دارد.

جواب: $q = (4\pi/3)R^3\rho_m N_0 e\ /M \cong 5.66 \times 10^4\mathrm{C}$ (M جرمِ یک مول اتمهایِ مس و N_0 عددِ آووگادرو است)

مسئله ۱-۱۸ اگر یک سکه‌ی مسیِ پنج گرمی دارایِ بارِ الکتریکیِ مثبتِ $q = +0.8\ \mu\mathrm{C}$ باشد، این سکه چه کسری از همه‌یِ الکترون‌هایش را از دست داده است؟

جواب: $Mq/mZN_0 \cong 3.66 \times 10^{-12}$ (M جرمِ یک مول اتمهایِ مس و N_0 عددِ آووگادرو است. Z تعداد پروتون‌هایِ هر اتمِ مس و m جرمِ سکه است.)

مسئله ۱-۱۹ در فضایِ بینِ دو کره‌ی هم مرکز به شعاع‌هایِ $a = 1\mathrm{cm}$ و $b = 2\mathrm{cm}$ بارِ الکتریکی با چگالیِ حجمیِ $\rho = 5\cos^2\phi/r^4 \quad \mu\mathrm{C/cm^3}$ توزیع شده است. در این ناحیه چه مقدار بارِ الکتریکی وجود دارد؟ (r و ϕ در مختصاتِ کروی تعریف می‌شوند.)

جواب: $5\pi\ \mu\mathrm{C}$

مسئله ۱ - ۲۰ درونِ کره‌ای به شعاعِ 2cm بارِ الکتریکی با چگالیِ زیر توزیع شده است

$$\rho = \begin{cases} 3\dfrac{\mu}{\mathrm{cm}^3} & 0 < r < 1\ \mathrm{cm} \\ \\ 6\dfrac{\mu}{\mathrm{cm}^3} & 1\ \mathrm{cm} < r < 2\ \mathrm{cm} \end{cases}$$

کلِ بارِ این کره چقدر است؟

جواب: $60\pi\ \mu\mathrm{C}$

مسئله ۱ - ۲۱ بار الکتریکی با تقارن کروی، مطابق رابطه‌ی زیر در فضا توزیع شده است:

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R}{r}\sin(\pi r/R) & r \le R \\ \\ 0 & r \ge R \end{cases}$$

بار کل را محاسبه کنید.

جواب: $4\rho_0 R^3$