فصل ۲

قانونِ کولن

بارهای الکتریکی یک‌دیگر را می‌رانند یا می‌ربایند. این اثر را نیروی الکتریکی می‌نامیم. «قانونِ کولن» اثر بارهای الکتریکی را بر یک‌دیگر به شکل زیر بیان می‌کند:

دو بار نقطه‌ای q و q' که به فاصله‌ی r از هم قرار دارند، به یک‌دیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. این نیرو

- الف) با حاصل‌ضربِ بارهای الکتریکی متناسب است: $F \propto qq'$
- ب) با مجذور فاصله‌ی دو بار نسبت عکس دارد: $F \propto 1/r^2$
- ج) راستای نیرو بر خطی قرار دارد که آن دو بار الکتریکی را به هم وصل می‌کند.
- د) جهت نیرو با توجه به علامت بارها مشخص می‌شود. اگر بارهای الکتریکی هم‌نام باشند نیرو دافعه و اگر ناهم‌نام باشند، نیرو جاذبه است.

قسمت‌های (الف) و (ب) اندازه‌ی نیرو را و قسمت‌های (ج) و (د) جهت نیرو را مشخص می‌کنند. با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) می‌توان نوشت:

$$F \propto \frac{qq'}{r^2} \Rightarrow F = k\frac{qq'}{r^2} \qquad (۲-۱)$$

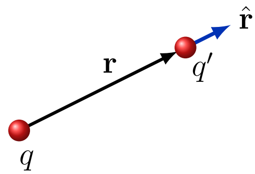
در دستگاهِ SI مقدارِ k برابر است با

$$k = 8.98755 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cong 9.0 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \qquad (۲-۲)$$

معمولاً به جایِ k عبارتِ $1/4\pi\epsilon_0$ را به کار می‌بریم:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \qquad \epsilon_0 = 8.854188 \times 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

ϵ_0 را ضریب گذردهی خلأ می‌نامیم.



شکل ۲-۱: $\mathbf{r}$ بردارِ مکانِ نسبیِ بارِ q' نسبت به بارِ q است. $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در جهتِ $\mathbf{r}$ است.

بدین ترتیب در مورد اندازه‌ی نیروی بینِ دو بارِ نقطه‌ایِ واقع در خلأ می‌توان نوشت:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q||q'|}{r^2} \tag{۲-۳}$$

رابطه‌یِ (۲-۳) تنها اندازه‌یِ نیرو را نشان می‌دهد. قانونِ کولن، در بخش‌هایِ (ج) و (د) جهتِ نیرو را مشخص کرده است. برای این که بخش‌هایِ (ج) و (د) را در رابطه ریاضیِ (۲-۳) منظور کنیم، بردار واحدِ $\hat{\mathbf{r}}$ را بر پاره‌خطِ متصل کننده‌ی دو بار، در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۱). در این صورت می‌توان نوشت:

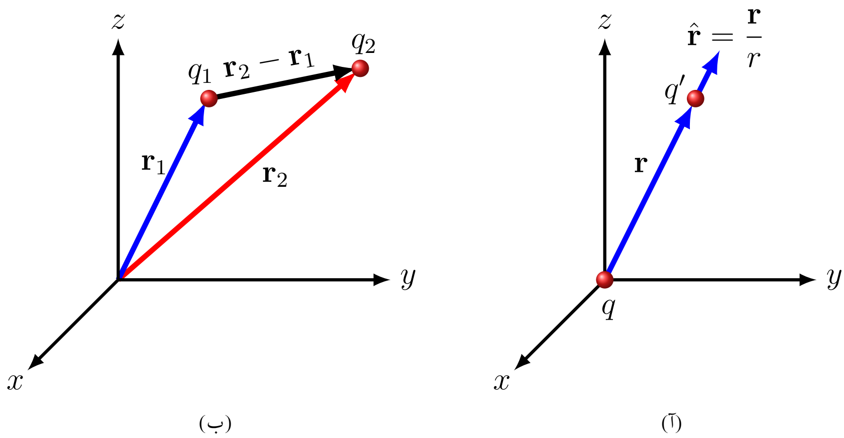
$$\mathbf{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{۲-۴}$$

$\mathbf{F}_{q'}$ نیرویی است که به بارِ q' وارد می‌شود. فرض کنید بارِ q در مبدأ مختصات و بارِ q' در نقطه‌ای با بردارِ مکانِ $\mathbf{r}$ قرار دارند (شکلِ ۲-۲(آ)). نیرویی که از طرفِ q به بارِ q' وارد می‌شود برابر است با:

$$\mathbf{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\mathbf{r} \tag{۲-۵}$$

زیرا $\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

واضح است که نیرویِ وارد بر q (از طرفِ q') به همان اندازه‌ی $F_{q'}$ است اما در جهتِ مخالف: $\mathbf{F}_q = -\mathbf{F}_{q'}$.



شکل ۲-۲: (آ) بار q در مبدأ مختصات و بار q' $\mathbf{r}$، (ب) بار q_1 در مکان $\mathbf{r}_1$ و بار q_2 در مکان $\mathbf{r}_2$

اگر هیچ یک از دو بارِ الکتریکی در مبدأ مختصات نباشند (شکلِ ۲-۲(ب))، قانونِ کولن به شکلِ زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{F}_{q_2}=\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r_1}|^3} \qquad (۲-۶)$$

واضح است که:

$$\mathbf{F}_{q_1}=\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r_2}|^3}=-\mathbf{F}_{q_2} \qquad (۲-۷)$$

اصلِ برهم‌نهی

قانون کولن به شکلی که در صفحات قبل بیان شد تأثیر متقابل بارهای الکتریکیِ «نقطه‌ای» را (و البته تنها «دو» بار الکتریکی را) نشان می‌دهد. پرسشی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که اگر چند بار نقطه‌ای داشته باشیم، نیرویِ وارد بر هر یك از آن‌ها چگونه حساب می‌شود؟ در ضمن، منظور از بار نقطه‌ای چیست و اگر بارها نقطه‌ای نباشند قانون کولن به چه صورت در می‌آید؟

فرض کنید چند بار نقطه‌ای $q_0,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ داشته باشیم و بخواهیم نیروی خالص وارد بر بارِ الکتریکیِ q_0 را حساب کنیم (شکلِ ۲-۳(آ)). واضح است که طبق قانونِ کولن، هر یك از بارهایِ $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ به بارِ q_0 نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. به عنوانِ یک اصل می‌پذیریم که نیرویِ خالصِ وارد بر بارِ q_0 مجموعِ برداری هر یك از این نیروهاست. این اصل را «اصلِ برهم‌نهی» می‌نامیم. طبق رابطه‌یِ (۲-۶) نیرویی که از طرف بارِ iام بر بارِ q_0

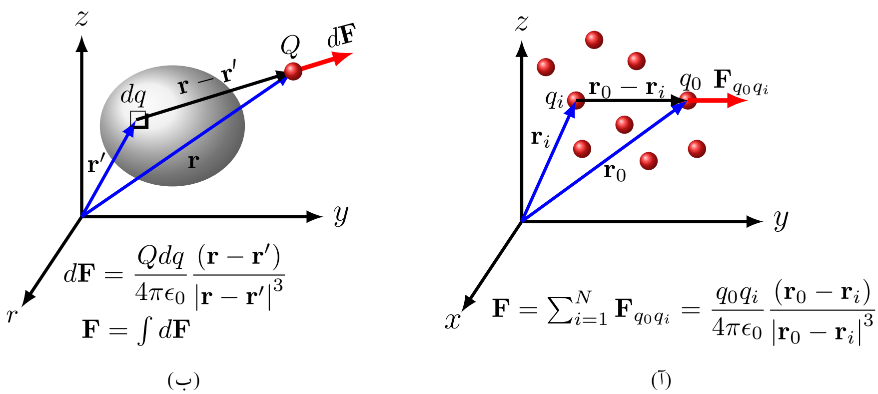
وارد می شود عبارت است از:

$$\mathbf{F}_{q_0 q_i} = \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} \qquad (۸-۲)$$

و بر اساسِ اصل برهم‌نهی نیرویِ کلِ وارد بر q_0 برابر است با

$$\mathbf{F}_{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{q_0 q_i} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} \qquad (۹-۲)$$

منظور از **بارِ نقطه‌ای**، از لحاظ فیزیکی، باری است که ابعادِ آن نسبت به فواصلی که در مسئله مطرح می‌شود، بسیار بسیار کوچك باشد. اما اگر بارِ الکتریکی‌ای داشته باشیم که نتوانیم از ابعادِ آن چشم‌پوشی کنیم، می‌توانیم آن را متشکل از قطعاتِ بسیار کوچکی با بار الکتریکیِ dq در نظر بگیریم، به گونه‌ای که هر کدام از dqها نقشِ یك بار نقطه‌ای را داشته باشند. واضح است که در این حالت، با به کار بردنِ اصلِ برهم‌نهی، در رابطه‌یِ (۲-۹) به جایِ $\sum$ انتگرال خواهیم داشت.



شکل ۲-۳: اصل برهم‌نهی: (آ) نیروی وارد بر بارِ q_0 از طرف مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای (توزیعِ گسسته‌ی بار). (ب) نیروی وارد بر بارِ Q از طرف یک توزیعِ پیوسته‌ی بار.

فرض کنید بار نقطه‌ایِ Q در مجاورتِ یك توزیعِ پیوسته‌یِ بار قرار داشته باشد (شکلِ ۲-۳(ب)). برای محاسبه‌یِ نیروی وارد بر Q به شکل زیر عمل می‌کنیم:

توزیعِ بار را متشکل از قطعاتی بسیار کوچك با بارِ dq در نظر می‌گیریم.

نیرویی که از طرفِ dq بر Q وارد می‌شود برابر است با

$$d\mathbf{F} = \frac{Qdq}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{۲-۱۰}$$

$\mathbf{r}'$ بردارِ مکانِ عنصرِ بارِ dq است. طبقِ اصلِ برهم‌نهی نیرویِ کلِ وارد بر Q برابر است با

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int dq\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{۲-۱۱}$$

اگر توزیعِ بار، حجمی باشد $dq = \rho\left(\mathbf{r}'\right)dv'$، که در آن dv' عنصرِ حجمی است که بارِ dq اشغال کرده است. بدین‌ترتیب نیرویِ وارد بر بارِ Q از طرفِ توزیعِ حجمی بار برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv' \tag{۲-۱۲}$$

اگر توزیعِ بار، سطحی باشد، آن‌گاه $dq = \sigma\left(\mathbf{r}'\right)da'$، که در آن da' مساحتِ سطحی است که بارِ dq اشغال کرده است. بدین‌ترتیب نیرویِ وارد بر بارِ Q از طرفِ توزیعِ سطحیِ بار برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_A \sigma(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}da' \tag{۲-۱۳}$$

اگر توزیعِ بار، خطی باشد، آن‌گاه $dq = \lambda\left(\mathbf{r}'\right)dl'$، که در آن dl' عنصرِ طولی است که بارِ dq اشغال کرده است. بدین‌ترتیب نیرویِ وارد بر بارِ Q از طرفِ توزیعِ خطیِ بار برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_L \lambda(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dl' \tag{۲-۱۴}$$

مسائل فصل ۲

مسئله ۲-۱ مقادیر نیروی جاذبه‌ی گرانشی و نیروی جاذبه‌ی الکتریکی بینِ الکترون و پروتونِ درون اتم هیدروژن را با هم مقایسه کنید. شتابِ الکترون مطابق مکانیکِ نیوتونی چقدر است؟ فاصله‌ی بین پروتون و الکترون را 0.53×10^{-10} m بگیرید.

حل: جرم پروتون و الکترون به ترتیب $m_p = 1.67\times10^{-27}\text{kg}$ و $m_e = 9.1\times10^{-31}\text{kg}$ است. بنابراین نیروی گرانشی برابر است با

$$\begin{aligned}F_\text{g} &= \frac{Gm_pm_e}{r^2}\\ &= \frac{(6.67\times10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2)(1.67\times10^{-27}\text{kg})(9.11\times10^{-31}\text{kg})}{(0.53\times10^{-10}\text{m})^2}\\ &= 3.6\times10^{-47}\text{N}\end{aligned}$$

و نیرویِ الکتریکیِ بینِ الکترون و پروتون برابر است با

$$\begin{aligned}F_\text{e} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r^2}\\ &= \frac{(8.99\times10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2)(1.6\times10^{-19}\text{C})^2}{(0.53\times10^{-10}\text{m})^2}\\ &= 8.2\times10^{-8}\text{N}\end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\frac{F_\text{e}}{F_\text{g}} = \frac{8.2\times10^{-8}\text{N}}{3.6\times10^{-47}\text{N}} = 2.3\times10^{39}$$

این رابطه نشان می‌دهد که نیروی الکتریکی بین الکترون و پروتون (در اتم هیدروژن) به مراتب بزرگ‌تر از نیروی گرانشی بینِ آن‌هاست. بنابراین برای پیدا کردن شتابِ الکترون می‌توان از نیروی گرانشی چشم‌پوشی کرد. بنابر این

$$a = \frac{F_\text{e}}{m_e} = \frac{8.2\times10^{-8}\text{N}}{9.1\times10^{-31}\text{kg}} = 9.0\times10^{22}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مسئله ۲-۲ دو کره‌ی فلزیِ کوچک را در نظر بگیرید که مرکز آن‌ها از یکدیگر $3\ \mathrm{cm}$ فاصله دارند. چند الکترونِ اضافی بر روی هر یك از این دوکره قرار گیرد تا نیروی دافعه‌ی وارد بر هر یك از آن‌ها برابر با $10^{-19}\mathrm{N}$ شود؟

حل: کره‌ها را چون بارهای نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که بارِ هر یک از آن‌ها q است. در این صورت نیرویِ دافعه‌ای که به یک‌دیگر وارد می‌کنند برابر است با

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

با حلِ این معادله برای q، می‌توان نوشت:

$$q = \pm\sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 F}$$

چون بارِ کره‌ها ناشی از تعدادی الکترونِ اضافی بر آن‌هاست، بنابر این بارِ آن‌ها منفی است و در معادله‌ی فوق علامتِ منفی را می‌پذیریم

$$q = -\sqrt{\frac{1}{9\times 10^9\mathrm{Nm^2/C^2}}(3\times 10^{-2}\mathrm{m})^2(10^{-19}\mathrm{N})} = -10^{-16}\mathrm{C}$$

و تعدادِ الکترون‌های اضافی بر رویِ هر یک از کره‌ها برابر است با

$$\text{تعدادِ الکترون‌ها:}\quad N = \frac{|q|}{e} = \frac{10^{-16}\mathrm{C}}{1.6\times 10^{-19}\mathrm{C}} = 625$$

مسئله ۲-۳ دو گلوله‌یِ کرویِ سربی مشابه با شعاعِ $R = 1\ \mathrm{cm}$ در نظر بگیرید. این دو گلوله در خلأ قرار دارند و فاصله‌یِ مراکز آن‌ها از هم $d = 1\mathrm{m}$ است. اگر از هر یک از اتم‌هایِ یکی از این گلوله‌ها یک الکترون برداریم و همه‌یِ آن‌ها را به گلوله‌یِ دوم بدهیم، این دو گلوله چه نیرویِ الکتریکی به هم وارد می‌کنند؟ چگالیِ سرب $\rho_m = 11.3\ \mathrm{g/cm^3}$ و عددِ اتمیِ آن $A = 207$ است.

حل: پیش از هر چیز توجه می‌کنیم که شعاعِ گلوله‌ها نسبت به فاصله‌ی آن‌ها کوچک است. پس گلوله‌ها را چون نقاطی در نظر می‌گیریم و قانونِ کولن را برای دو بارِ نقطه‌ای به کار می‌بریم

اگر تعدادِ اتم‌های هر گلوله N باشد، آن‌گاه بارِ الکتریکیِ گلوله‌ی اول $q_1 = +Ne$ و بارِ الکتریکیِ گلوله‌ی دوم

$q = -Ne$ خواهد بود. بنابر این نیروی بینِ این دو بار برابر است با

$$|F| = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{N^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

بدین‌ترتیب برای محاسبه‌ی نیرو لازم است N را داشته باشیم. با توجه به آن‌چه در مسئله‌ی ۱-۱۳ و ۱-۱۴ دیدیم، می‌توان نوشت:

$$N = \frac{m}{M} N_0 = \frac{\rho_m (4\pi/3) R^3}{M} N_0$$

و بدین ترتیب

$$\begin{aligned}
|F| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\left(\rho_m (4\pi/3) R^3\right)^2 N_0^2 e^2}{M^2} \\
&= \frac{8.99 \times 10^9 \mathrm{Nm^2C^2}}{1\mathrm{m^2}} \frac{(4\pi/3)^2 (10^{-2}\mathrm{m})^6 (11.3 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3})^2}{(207 \times 10^{-3} \mathrm{kg/mol})^2} \\
&\qquad \times (6.02 \times 10^{23} \mathrm{mol^{-1}})^2 (1.6 \times 10^{-19} \mathrm{C})^2 \\
&= 4.36 \times 10^{18} \mathrm{N}
\end{aligned}$$

مسئله ۲-۴ فرض کنید دو قطره‌ی آب هر یک به اندازه‌ی بار یک الکترون دارایِ بارِ الکتریکی باشند. اگر نیروی دافعه‌یِ الکتریکیِ آن‌ها با نیرویِ جاذبه‌ی گرانشی آن‌ها برابر باشد، شعاعِ قطراتِ آب را محاسبه کنید. چگالیِ جرمیِ آب برابر با $\rho_m = 1 \ \mathrm{g/cm^3}$ است.

حل:

فرض کنید فاصله‌یِ مراکزِ قطره‌ها d و جرمِ آن‌ها m باشد. در این صورت شرطِ تعادل به صورتِ زیر است:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{Gm^2}{d^2} \implies m = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}$$

اگر شعاعِ قطره‌ها r باشد، آن‌گاه

$$\rho_m = \frac{m}{\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3} \implies r = \left[\frac{3m}{4\pi\rho_m}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{3e}{4\pi\rho_m \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

بدین ترتیب شعاعِ قطره‌هایِ آب به دست می‌آید:

$$r = \left(\frac{9}{64}\frac{e^2}{\pi^3 G\epsilon_0 {\rho_m}^2}\right)^{\frac{1}{6}} = 7.6\times 10^{-5}\mathrm{m}$$

مسئله ۲-۵ دو گلوله‌ی کوچکِ باردار در خلأ به فاصله‌ی $d = 1\mathrm{m}$ از یکدیگر قرار دارند. این دو گلوله نیرویِ دافعه‌ای به اندازه‌ی $F = 1\mathrm{N}$ به هم وارد می‌کنند. اگر Q حاصلِ جمعِ جبریِ این دو بارِ الکتریکی باشد، با فرضِ این که $|Q| = 5\times 10^{-5}\mathrm{C}$ ، بارِ هر یک از گلوله‌ها را پیدا کنید.

حل: اندازه‌ی نیرویی که این دو گلوله به هم وارد می‌کنند برابر است با $F = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 d^2}$. بنابر این

$$|q_1|\,|q_2| = F4\pi\epsilon_0 d^2 \qquad \text{(الف)}$$

از سویِ دیگر $Q = q_1 + q_2$ و $|Q| = |q_1 + q_2|$. اما با توجه به این که نیرویِ بینِ دو گلوله دافعه است، نتیجه می‌گیریم که گلوله‌ها دارایِ بارهایِ الکتریکی هم‌نام هستند. پس می‌توان نوشت:

$$|Q| = |q_1 + q_2| = |q_1| + |q_2| \qquad \text{(ب)}$$

با استفاده از دستگاهِ معادلات الف و ب می‌توان مجهول‌هایِ q_1 و q_2 را پیدا کرد. با توجه به معادله‌ی ب داریم:

$$|q_2| = |Q| - |q_1|$$

با قرار دادنِ $|q_2|$ در معادله‌ی الف می‌توان نوشت:

$$|q_1|\,(|Q| - |q_1|) = 4\pi\epsilon_0 d^2$$

و در نتیجه

$$|q_1|^2 - |Q|\,|q_1| + 4\pi\epsilon_0 F d^2 = 0$$

بنابر این یک معادله‌ی جبریِ درجه‌ی دو بر حسبِ $|q_1|$ داریم که به سادگی حل می‌شود:

$$|q_1| = \frac{1}{2}\left\{|Q| \pm \sqrt{|Q|^2 - 16\pi\epsilon_0 F d^2}\right\}$$

و در نتیجه $|q_2|$ نیز به دست می‌آید:

$$|q_2| = |Q| - |q_1| = \frac{1}{2}\left\{|Q| \mp \sqrt{|Q|^2 - 16\pi\epsilon_0 F d^2}\right\}$$

بنابر این پاسخ‌ها را می‌توان به شکلِ زیر نوشت:

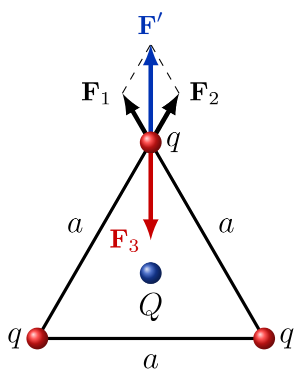
$$|q_{1,2}| = \frac{1}{2}\left\{|Q| \pm \sqrt{|Q|^2 - 16\pi\epsilon_0 F d^2}\right\}$$

$$|q_1| = 3.84 \times 10^{-5}\mathrm{C} \quad , \quad |q_2| = 1.16 \times 10^{-5}\mathrm{C}$$

مسئله ۲-۶ سه ذره‌ی **آزاد** با بارهایِ الکتریکیِ یکسان $q = 10^{-6}\mathrm{C}$ را در رئوسِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع قرار داده‌ایم. مکان و مقدار و علامتِ بارِ چهارمِ Q را به گونه‌ای پیدا کنید که همه‌یِ بارهایِ الکتریکی در تعادل باشند.

حل: نیرویی که هر دو بارِ q به هم وارد می‌کنند، برابر است با $q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$ که فرض کرده‌ایم طولِ هر ضلعِ مثلث برابر با a باشد. تعادلِ یکی از بارهایِ q را بررسی می‌کنیم. (به شکل توجه کنید). به این بار، از سویِ دو بارِدیگرِ q نیروهایِ $\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2$ وارد می‌شود، که برابرند با:

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$



شکل ۲-۴: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۶

اگر برآیندِ این دو نیرو را $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ بنامیم، همان طور که در شکل دیده می‌شود، می‌توان نوشت:

$$F' = 2\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cos\alpha$$

که در آن $\alpha = 30°$. (توجه کنید که مثلث، متساوی‌الاضلاع و زاویه‌ی هر رأس مثلث $60°$ است). از طرفِ بارِ Q نیروی $F_3 = \frac{|Q|\,|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ به q وارد می‌شود. برایِ این که این بارِ q در تعادل باشد، بایستی نیرویِ F' با F_3 خنثی شود: $\mathbf{F}' + \mathbf{F}_3 = 0$. راستایِ نیرویِ $\mathbf{F}'$ در امتدادِ نیمسازِ زاویه‌ای است که q در رأسِ آن قرار دارد. برایِ این که تعادل برقرار باشد، باید $\mathbf{F}_3$ نیز در همان امتداد باشد. یعنی Q باید رویِ نیمساز این زاویه باشد. همین استدلال در موردِ تعادلِ بارهایِ دیگر (واقع بر رئوس مثلث) نیز صادق است بنابر این Q باید بر رویِ محلِ تلاقیِ سه نیمسازِ مثلث باشد و بنابر این فاصله‌یِ آن از هر یک از سه بارِ q برابر است با: $r = \frac{a}{2\cos\alpha}$. و شرطِ $F' = F_3$ ایجاب می‌کند که

$$\frac{|q|\,|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 2\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cos\alpha$$

$$\frac{|q|\,|Q|\,4\cos^2\alpha}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 2\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cos\alpha$$

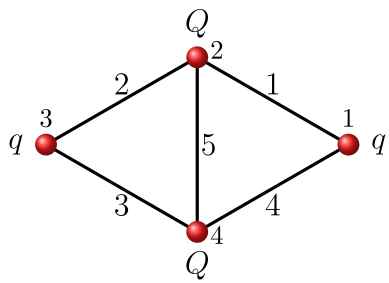
و در نتیجه:

$$|Q|\,4\cos^2\alpha = 2\,|q|\cos\alpha \Longrightarrow |Q| = \frac{q}{2\cos\alpha} = 5.8\times 10^{-7}\mathrm{C}$$

از آن‌جا که نیرویِ بینِ q و Q جاذبه است، این بارها باید ناهم‌نام باشند. و چون q مثبت است پس Q منفی است:

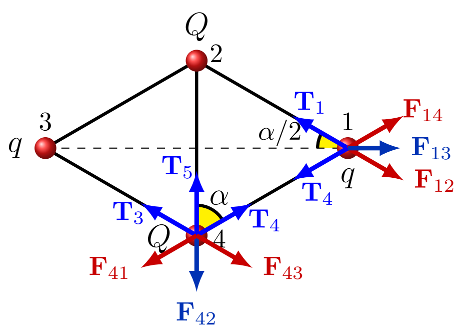
$$Q = -5.8\times 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

مسئله ۲-۷ چهار بار الکتریکی مثبت $q_1 = q,\ q_2 = Q,\ q_3 = q,\ q_4 = Q$ توسطِ پنج نخِ سبک به طول یکسان L مطابق شکل به هم وصل شده‌اند. کششِ هریک از نخ‌ها را پیدا کنید.



شکل ۲-۵: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۷

حل: بارِ q_1 را در نظر می‌گیریم. همان طور که در شکل دیده می‌شود، به بارِ q_1 پنج نیرو وارد می‌شود: $\mathbf{F}_{12},\ \mathbf{F}_{14}$ از طرفِ بارهایِ $q_2,\ q_4$ و نیرویِ $\mathbf{F}_{13}$ از طرفِ q_3 و نیروهایِ کششِ نخ $\mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_4$. این نیروها در تعادل هستند:



شکل ۲-۶: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۷

$$\mathbf{F}_{12} + \ \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_4 = 0$$

به راحتی دیده می‌شود که:

$$F_{12} = F_{14} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L^2}\ , \qquad F_{13} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \left(2L\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

واضح است که در این مسئله $\alpha = 60^\circ$ (طول نخ‌ها یکسان است). برآیند این سه نیرو در راستایِ افقی خواهد بود. اگر برآیند آن‌ها را $\mathbf{F}$ بنامیم:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{13}$$

با توجه به شکل دیده می‌شود که:

$$|\mathbf{F}| = 2F_1 \cos\frac{\alpha}{2} + F_2 = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 L^2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

واضح است که این نیرو با برآیندِ نیروهایِ کششِ نخ $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_4$ خنثی می‌شود. اما با توجه به تقارنِ مسئله $|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_4|$. اگر بنویسیم: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_4$ آن‌گاه به سادگی دیده می‌شود:

$$|\mathbf{T}| = 2T_1 \cos\frac{\alpha}{2}$$

همان‌طور که گفته شد، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{F}$ در یک راستا (در خلاف جهت هم) هستند و $|\mathbf{F}| = |\mathbf{T}|$ بنابر این

$$2T_1 \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 L^2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

و در نتیجه:

$$T_1 = T_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[Q + \frac{q}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[Q + \frac{q}{3\sqrt{3}}\right]$$

به روشِ کاملاً مشابه، تعادلِ بارِ $q_4 = +Q$ را بررسی می‌کنیم. به این بار، شش نیرو وارد می‌شود: F_{41} از طرفِ q_1 و F_{43} از طرفِ q_3 و نیرویِ F_{42} از طرفِ q_2 و نیروهایِ کششِ نخ T_3, T_4, T_5. این نیروها در تعادل هستند. به راحتی دیده می‌شود که:

$$F_{41} = F_{43} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L^2}\,, \qquad F_{42} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$$

اگر برآیندِ این سه نیرو را F' بنامیم، راستایِ آن منطبق بر نخ شماره ۵ خواهد بود و اندازه‌یِ آن برابر است با:

$$F' = 2F_{41}\cos\frac{\alpha}{2} + F_{42} = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 L^2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$$

این نیرو باید با برآیند کششِ نخ‌ها خنثی شود. اما توجه می‌کنیم که با توجه به تقارنِ مسئله $T_3 = T_4$ بنابر این:

$$2T_4 \cos\frac{\alpha}{2} + T_5 = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 L^2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$$

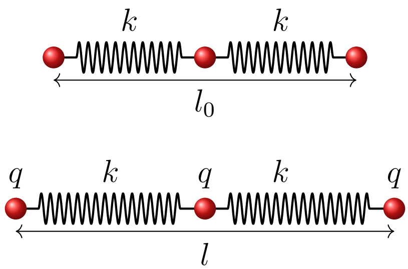
با توجه به این که T_4 را از قسمتِ قبل به دست آوردیم با رابطه‌یِ فوق T_5 به دست می‌آید:

$$T_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[Q^2 - \frac{q}{3\sqrt{3}}\right]$$

بدین ترتیب با توجه به تقارنِ مسئله پاسخِ نهایی را می‌توان چنین نوشت:

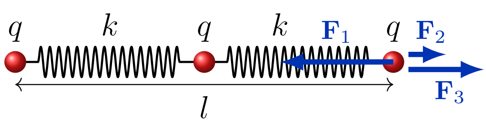
$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[Q + \frac{q}{3\sqrt{3}}\right] \;,\quad T_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[Q^2 - \frac{q}{3\sqrt{3}}\right]$$

مسئله ۲-۸ سه گلوله‌یِ مشابه، مطابقِ شکل به دو فنرِ یکسان وصل شده‌اند. گلوله‌ها و فنر بر روی خطِ راستِ افقی قرار دارند. سختیِ فنرها برابر با k است. ابتدا فاصله‌یِ دورترین گلوله‌ها l_0 است. اگر گلوله‌ها با بارِ الکتریکیِ هم اندازه و هم‌نام باردار شوند، فاصله‌یِ دورترین گلوله‌ها برابر با l می‌شود. اندازه‌یِ بارِ این گلوله‌ها را پیدا کنید.



شکل ۲-۷: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۸

حل: با توجه به این که دو گلوله‌ی کناری نسبت به گلوله‌ی وسطی به طورِ متقارن قرار گرفته‌اند و فنرها نیز مشابه هستند، برای حلِ مسئله کافی است یکی از گلوله‌ها را بررسی کنیم. مطابق شکل گلوله‌ی سمتِ راست را در نظر می‌گیریم. به این گلوله نیروهای $\mathbf{F}_1$ (از طرفِ بارِ وسطی) و $\mathbf{F}_2$ از طرفِ بارِ کناری، وارد می‌شود. (به بارِ سمتِ چپ نیز نیروهای مشابهی وارد می‌شود.)



شکل ۲-۸: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۸

در اثرِ این نیروها فنرها کشیده می‌شوند. افزایشِ طولِ فنر تا آنجا ادامه می‌یابد که نیروی فنر و نیروهای الکتریکی وارد بر هر گلوله به تعادل برسند. اندازه‌ی نیروی فنر برابر است با

$$F_{\text{فنر}} = k\frac{l-l_0}{2}$$

و نیروهای F_1 و F_2 نیز برابرند با

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l/2)^2}\ , \qquad F_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

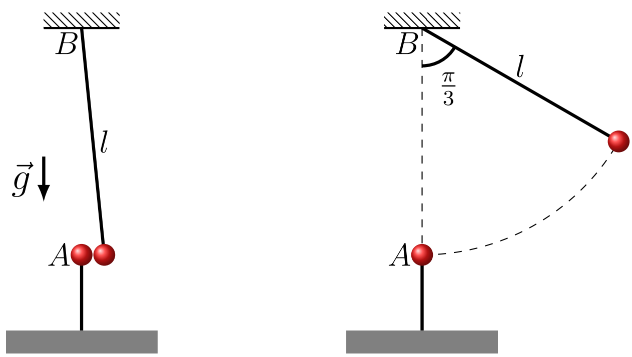
در حالت تعادل داریم:

$$F_1 + F_2 = F_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0}l^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} = k\frac{l-l_0}{2}$$

و در نتیجه بار گلوله به دست می‌آید:

$$q = l\sqrt{\frac{2}{5}\pi\epsilon_0 k(l-l_0)}$$

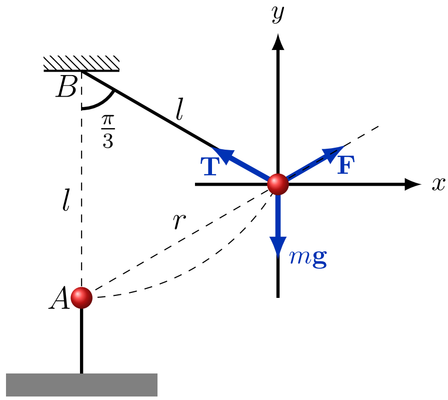
مسئله ۲-۹ دو گلوله‌یِ رسانایِ کوچک داریم که مطابقِ شکل یکی از آن‌ها را در نقطه‌ی A ثابت کرده‌ایم. گلوله‌یِ دوم به نخِ سبکِ نارسانایی به طولِ $l = 20\ \text{cm}$ وصل شده است. انتهایِ دیگرِ نخ به نقطه‌ی B گره زده شده است. نقطه‌یِ B بالایِ نقطه‌یِ A قرار دارد. اگر گلوله‌ها با بارهایِ الکتریکیِ هم‌نام و هم اندازه باردار شوند، نخ از حالتِ قائم به اندازه‌یِ $\alpha = 60^\circ$ منحرف می‌شود. بارِ هر یک از گلوله‌ها را تعیین کنید.



شکل ۲-۹: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۹

حل:

به گلوله‌ی دوم، سه نیرو وارد می‌شود: کششِ نخ T، نیروی گرانشیِ زمین mg و نیروی الکتریکی F. این سه نیرو در تعادل‌اند. مطابقِ شکل، نیروها را در دستگاهِ مختصاتِ نشان داده شده، تجزیه می‌کنیم و شرطِ تعادل را می‌نویسیم. تشخیصِ زوایا را به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.



شکل ۲-۱۰: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۹

با توجه به هندسه‌ی شکل دیده می‌شود که نیروی الکتریکی برابر است با

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

شرطِ تعادل ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{T} = 0$$

این معادله را در راستای محورهای x و y می‌نویسیم:

$$F\cos\frac{\alpha}{2} - T\sin\alpha = 0$$

$$F\sin\frac{\alpha}{2} + T\cos\alpha - mg = 0$$

در این دستگاهِ معادلات، مجهول‌ها T و q هستند (توجه کنید که $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$) که با حلِ این دستگاه،

مجهول‌هایِ T و q به دست می‌آیند.

$$q = 4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\pi\epsilon_0 mg\sin\frac{\alpha}{2}}$$

می‌توانستیم به جایِ بررسیِ تعادلِ نیروها، شرطِ تعادل را برایِ گشتاورهایِ نیروها (حولِ نقطه‌یِ B) بنویسیم. از آن‌جا که امتدادِ نیرویِ T از نقطه‌یِ B می‌گذرد، گشتاورِ آن حولِ این نقطه صفر است و برایِ گشتاورهایِ نیروهایِ F و mg حولِ نقطه‌یِ B می‌توان نوشت:

$$mgl\sin\alpha \ - Fl\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$mg\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}l\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$q = 4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\pi\epsilon_0 mg\sin\frac{\alpha}{2}} \cong 8.1\times10^{-7}\mathrm{C}$$

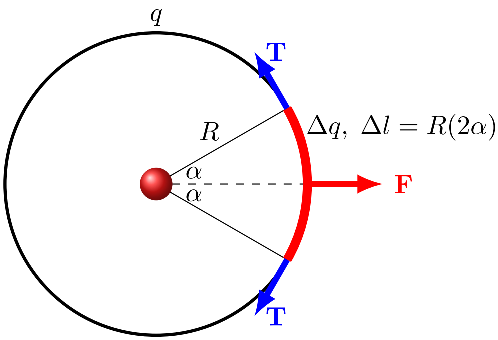
مسئله ۲ - ۱۰ یک حلقه‌یِ رسانایِ نازک به شعاعِ R حاملِ بارِ الکتریکیِ q است. در این حالت کششِ سیم برابر با T است. بارِ نقطه‌ایِ Q را در مرکزِ حلقه قرار می‌دهیم. Q چقدر باشد تا سیم پاره نشود. فرض کنید بیش‌ترین کششی که سیم می‌تواند تحمل کند، برابر با T_0 باشد.

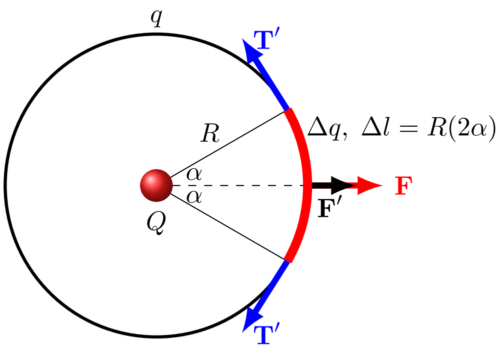
حل: یک عنصرِ خیلی کوچک به طولِ $\Delta l = R\,(2\alpha)$ (به شکل توجه کنید) با بارِ الکتریکیِ Δq در نظر می‌گیریم. با توجه به رسانا بودنِ سیم (و تقارنِ مسئله)، بارِ q به طورِ یکنواخت بر رویِ سیم توزیع شده است. پس چگالیِ خطیِ بارِ حلقه برابر است با $\lambda = q/2\pi R$ و در نتیجه بارِ Δq برابر است با:

$$\Delta q = \frac{q}{2\pi R}\Delta l = \frac{\alpha}{\pi}q$$

از طرفِ بارهایِ الکتریکیِ رویِ بخش‌هایِ دیگرِ حلقه (به غیر از Δq) به این بارِ Δq نیرویِ F وارد می‌شود. این نیرو در راستایِ شعاعی است. نیرویِ F می‌خواهد شعاعِ دایره را بیش‌تر کند. از سویِ دیگر، از طرفِ دیگر بخش‌هایِ حلقه در مجاورتِ Δl نیرویِ کششِ T به آن وارد می‌شود. شرطِ تعادل ایجاب می‌کند که (به شکل توجه کنید):

$$F = 2T\sin\alpha$$





شکل ۲-۱۱: شکل مربوط به مسئله‌ی ۲ - ۱۰

حال اگر در مرکزِ حلقه یک بارِ Q قرار دهیم، علاوه بر نیروهایِ فوق، از طرفِ Q نیرویِ الکتریکیِ $F' = \Delta q Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ نیز به Δq وارد می‌شود. در این حالت کششِ سیم T' خواهد بود و شرطِ آن که سیم پاره نشود این است که $T' \leq T_0$ باشد. اگر سیم در آستانه‌ی پاره شدن باشد $T' = T_0$. در این حالت داریم:

$$2T_0 \sin\alpha = F + F' = 2T\sin\alpha + \frac{\Delta q Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

با توجه به کوچک بودنِ α می‌توان نوشت: $\sin\alpha \cong \alpha$. از سویِ دیگر دیدیم که: $\Delta q = \frac{\alpha}{\pi} q$، بنابر این

$$2T_0\alpha = F + F' = 2T\alpha + \frac{\alpha q Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

$$Q = \frac{8\pi^2\epsilon_0 \left(T_0 - T\right) R^2}{q}$$

این مقدارِ Q بیش‌ترین بارِ الکتریکی است که می‌توان در مرکزِ حلقه قرار داد پیش از آن که حلقه پاره شود. یعنی برایِ

این که حلقه پاره نشود باید:

$$Q < \frac{8\pi^2\epsilon_0 \left(T_0 - T\right) R^2}{q}$$

مسئله ۲-۱۱ سه بار نقطه‌ای هر یك به اندازه‌یِ $q = 2 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ در سه گوشه‌یِ مربعی به ضلعِ $a = 0.20\ \mathrm{m}$ قرار دارند.

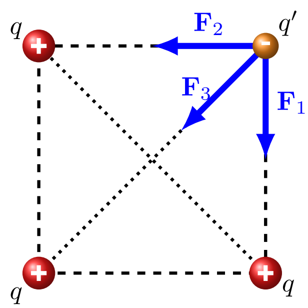
- الف) اگر یك بارنقطه‌ایِ $q' = -1 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ را در گوشه‌یِ خالی مربع قرار دهیم، اندازه و جهتِ نیروی وارد بر آن را تعیین کنید.
- ب) اگر بار نقطه‌ایِ q' در مرکزِ مربع قرار گیرد چه نیرویی به آن وارد می‌شود؟

حل:

الف) در شکلِ زیر نیروهای وارد بر بارِ q' از طرف سه بارِ q رسم شده‌اند. با توجه به شکل به راحتی می‌توان نوشت:

$$F_1 = F_2 = \frac{|q|\ |q'|}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{9}{2} \times 10^{-7}\mathrm{N}$$

$$F_3 = \frac{|q|\ |q'|}{4\pi\epsilon_0 \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{9}{4} \times 10^{-7}\mathrm{N}$$



شکل ۲-۱۲: شکل مربوط به مسئله‌ی ۲-۱۱ (قسمت الف)

اما با توجه به قاعده‌یِ جمع متوازی الاضلاع برای بردارهایِ $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ واضح است که برآیندِ آن‌ها در امتدادِ قطر مربع خواهد بود (توجه کنید که F_1 و F_2 برابرند و قطرِ مربع نیمسازِ زاویه‌یِ بینِ آن‌هاست). پس نیرویِ خالصِ وارد بر بارِ q' برابر است با:

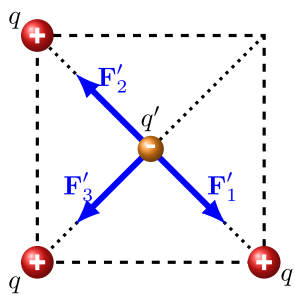
$$F = F_3 + F_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 45^\circ = F_3 + 2F_1 \cos 45^\circ$$

$$F = \left(\frac{9}{4}\times 10^{-7}\text{N}\right) + 2\left(\frac{9}{2}\times 10^{-7}\text{N}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 8.61\times 10^{-7}\text{N}$$

جهت نیروی برآیند، در امتداد قطر و هم جهت با $\mathbf{F}_3$ است.

ب) وضعیتِ مسئله در شکلِ روبرو مشخص شده است. واضح است که بردارهایِ $\mathbf{F}'_1$ و $\mathbf{F}'_2$ در اینجا یکدیگر را خنثی می‌کنند و نیرویِ خالصِ وارد بر q' همان $\mathbf{F}_3$ است.

$$F'_3 = \frac{|q|\ |q'|}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = 9\times 10^{-7}\text{N}$$



شکل ۲-۱۳: شکل مربوط به مسئله‌ی ۲-۱۱ (قسمت ب)

مسئله ۲-۱۲ بار کوچکی برابر با $q_1 = 2\times 10^{-6}\text{C}$ در نقطه‌یِ $(2,3)$ بر حسب متر در صفحه‌یِ xy قرار دارد. بارِ الکتریکیِ دیگری $q_2 = -3\times 10^{-6}C$ در نقطه‌یِ $(4,-2)$ بر حسب متر قرار دارد. بارِ q_1 چه نیروی الکتریکی به q_2 وارد می‌کند؟ بارِ q_2 چه نیروی الکتریکی به q_1 وارد می‌کند؟

حل: بردار مکانِ بار اول $\mathbf{r}_1 = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ بر حسب متر و بردارِ مکانِ بار دوم $\mathbf{r}_2 = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ بر حسب متر است. بنابر این بردارِ مکانِ نسبیِ آن‌ها برابر است با

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}\ , \qquad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{29}$$

بدین ترتیب نیرویِ وارد بر q_2 از طرفِ q_1 برابر است با:

$$\mathbf{F}_{q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{\left(9\times 10^9\right)\left(2\times 10^{-6}\right)\left(-3\times 10^{-6}\right)}{\left(\sqrt{29}\right)^3}\left(2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}\right)$$

$$\mathbf{F}_{q_2} = \left(-6.9\times 10^{-4}\ \mathrm{N}\right)\hat{\imath} + \left(1.7\times 10^{-4}\ \mathrm{N}\right)\hat{\jmath}$$

نیرویِ وارد بر q_1 برابر است با

$$\mathbf{F}_{q_1} = -\mathbf{F}_{q_2} = \left(6.9\times 10^{-4}\ \mathrm{N}\right)\hat{\imath} - \left(1.7\times 10^{-4}\ \mathrm{N}\right)\hat{\jmath}$$

مسئله ۲-۱۳ پروتونی در مبدأ متخصات و الکترونی در نقطه‌ای با مختصاتِ $(4.0,\ 2.0\ ,\ 1.5)$ بر حسب آنگستروم، قرار دارند مؤلفه‌هایِ $x,\ y,\ z$ نیروی الکتریکی وارد بر الکترون را (از طرف پروتون) به دست آورید.

حل: پروتون در مبدأ مختصات است: $\mathbf{r}_p = 0$؛ و بردار مکان الکترون، بر حسب متر، برابر است با:

$$\mathbf{r}_e = (4\times 10^{-10})\hat{\imath} + (2\times 10^{-10})\hat{\jmath} + (1.5\times 10^{-10})\hat{k}$$

$$|\mathbf{r}_e| = 4.7\times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

نیروی وارد بر الکترون از طرفِ پروتون، برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_e &= \frac{(-e)(e)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|^3} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}_e}{|\mathbf{r}_e|^3}\\ &= -(9\times 10^9)(1.6\times 10^{-19})^2\frac{(4\times 10^{-10})\hat{\imath} + (2\times 10^{-10})\hat{\jmath} + (1.5\times 10^{-10})\hat{k}}{(4.7\times 10^{-10})^3}\\ &= (8.8\times 10^{-10})\hat{\imath} + (4.4\times 10^{-10})\hat{\jmath} + (3.3\times 10^{-10})\hat{k} \qquad \text{بر حسب نیوتن}\end{aligned}$$

مسئله ۲-۱۴ بار نقطه‌ایِ $Q_1 = 300\mu\mathrm{C}$ در نقطه‌یِ $(1,\ -1,\ -3)$ بر حسب متر و بار مجهولِ Q_2 در نقطه‌یِ $(3,\ -3,\ -2)$ بر حسب متر قرار دارند اگر از طرفِ Q_2 بر بار Q_1 نیرویِ $\mathbf{F} = 8\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ بر حسب نیوتن

وارد شود، بارِ Q_2 را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{r}_1 = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

نیروی وارد بر بارِ Q_1برابر است با:

$$\mathbf{F}_{Q_1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$
$$(8)\hat{i} + (-8)\hat{j} + (4)\hat{k} = (9\times 10^9)(300\times 10^{-6})Q_2\frac{(-2)\hat{i} + (2)\hat{j} + (-1)\hat{k}}{(3)^3}$$
$$(8)\hat{i} + (-8)\hat{j} + (4)\hat{k} = (10^5)Q_2\Big((-2)\hat{i} + (2)\hat{j} + (-1)\hat{k}\Big)$$

$$Q_2 = -4\times 10^{-5}\ \mathrm{C} = -40\ \mu\mathrm{C}$$

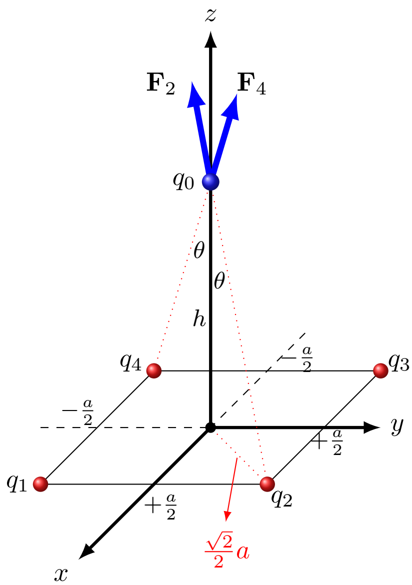
مسئله ۲-۱۵ چهار بار نقطه‌ایِ یکسان، هر یك برابر با $q = 2\times 10^{-7}$ C در چهار گوشه‌یِ یك مربع به ضلعِ $a = 4\ cm$ و بارِ $q_0 = 10^{-6}$C در نقطه‌ای به فاصله‌یِ ۳ سانتی‌متر بالای مرکزِ مربع قرار دارند. نیرویِ وارد بر بارِ q_0 را به دست آورید.

حل: دستگاه مختصات را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم. در این مسئله داریم:

$$a = 4\mathrm{m},\ h = 3\mathrm{m}$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 2\times 10^{-5}\mathrm{C}$$

$$q_0 = 10^{-4}\mathrm{C}$$



روش اول: با توجه به تقارن مسئله مشاهده می‌شود که چهار نیرویی که از طرف بارهای q_1 و q_2 و q_3 و q_4 به بار q_0وارد می‌شود، هم اندازه‌اند (در شکل فقط دو تا از نیروها نشان داده شده است):

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \frac{q_1 q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(h^2 + \dfrac{a^2}{2}\right)} = \frac{(9\times 10^9)(2\times 10^{-5})(10^{-4})}{\left(3^2 + \dfrac{4^2}{2}\right)} = \frac{18}{17}\,\mathrm{N}$$

همچنین از تقارن مسئله پیداست که مؤلفه‌های این چهار بردار در صفحه‌ی افقی اثر یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و در راستای عمود بر سطح مربع (یعنی در جهت محور z) یک‌دیگر را تقویت می‌کنند. بنابر این نیروی برایند در جهت محور z است و می‌توان نوشت:

$$F = F_z = 4F_1\cos\theta = 4F_1\frac{h}{\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}}} = 4\frac{18}{17}\frac{3}{\sqrt{17}} = 3.1\,\mathrm{N}$$

روش دوم: بردارهای مکان هر یک از بارهای q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\mathbf{r}_0 = 3\hat{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{r}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}, \qquad \mathbf{r}_2 = -2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}, \qquad \mathbf{r}_3 = -2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}, \qquad \mathbf{r}_4 = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$$

و

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = 3\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2 = 3\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} \quad \Longrightarrow \quad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_3 = 3\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \quad \Longrightarrow \quad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_3| = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_4 = 3\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \quad \Longrightarrow \quad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_4| = \sqrt{17}$$

نیرویی که از طرف، q_1 به q_0 وارد می‌شود، برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \\
&= (9\times 10^9)(10^{-4})(2\times 10^{-5})\frac{3\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}}{17^{3/2}} \\
&= \frac{18}{17^{3/2}}(3\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب نیروی وارد بر q_0از طرفِ سه بارِ دیگر برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2 &= \frac{18}{17^{3/2}}(3\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}) \\
\mathbf{F}_3 &= \frac{18}{17^{3/2}}(3\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\
\mathbf{F}_4 &= \frac{18}{17^{3/2}}(3\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})
\end{aligned}$$

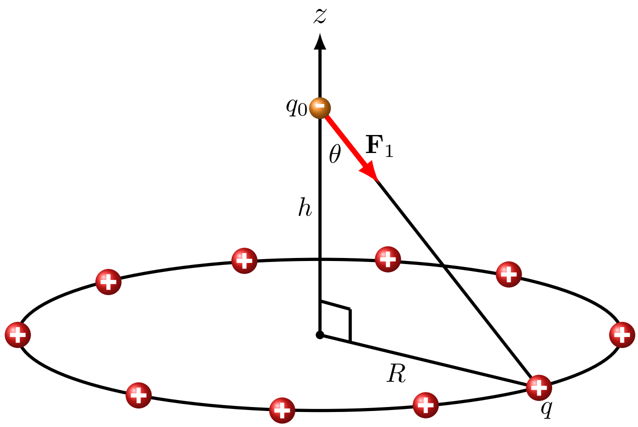
طبق اصل برهم‌نهی، نیروی خاص وارد بر q_0از جمع برداری نیروهای فوق به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \\
&= \frac{18\times 12}{17^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} \\
&= 3.1 \text{ N}
\end{aligned}$$

مسئله ۲-۱۶ ده بارِ نقطه‌ایِ مثبتِ یکسان $q = 500\ \mu\text{C}$، به فواصل مساوی رویِ دایره‌ای به شعاعِ $R = 2\text{ m}$ قرار دارند. بار نقطه‌ایِ $q_0 = -20\ \mu\text{C}$ به فاصله‌یِ $h = 2\text{m}$ از صفحه‌ی دایره، روی محور آن، قرار دارد. نیروی وارد بر q_0 را به دست آورید.

حل: قبل از هر چیز توجه کنید که علامت بارهای q_0 و q مختلف است و بارها هم‌دیگر را جذب می‌کنند. مشابه

با مسئله‌ی ۲-۱۵، با توجه به تقارن مسئله واضح است که مؤلفه‌های افقیِ نیروها، یکدیگر را خنثی می‌کنند. اما در راستای عمود بر صفحه‌ی حلقه، این نیروها همدیگر را تقویت می‌کنند. از سوی دیگر، واضح است که اندازه‌ی همه‌ی نیروها با هم برابر است:



شکل ۲-۱۴: شکل مربوط به مسئله‌ی ۲-۱۶

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{10} = \frac{|q_0||q|}{4\pi\epsilon_0(h^2+R^2)} = \frac{(9\times10^9)(5\times10^{-4})(2\times10^{-5})}{(4+4)}$$

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{10} = 11.25\ \mathrm{N}$$

بنابر این نیروی خالص وارد بر q_0، در راستای عمود بر صفحه‌ی دایره و به سمتِ مرکزِ دایره است و مقدار آن برابر است با:

$$F = 10F_1\cos\theta = 10F_1\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} = 79.5\ \mathrm{N}$$

روش دوم: اگر دستگاه مختصات را طوری انتخاب کنیم که مرکز دایره مبدأ مختصات و محور z عمود بر صفحه‌ی دایره باشد، و یکی از بارها روی محور x (در فاصله‌ی $x = R = 2\mathrm{m}$ تا مبدأ) باشد، بار دوم در نقطه‌ای روی دایره قرار خواهد داشت که بردار مکانِ آن (که اندازه‌اش Rاست) با محور x زاویه‌ی $\pi/5 = 2\pi/10$ می‌سازد. برای بار الکتریکی سوم این زاویه $2\pi/5$ برای بار چهارم، $3\pi/5$ و ... برای بار دهم $9\pi/5$ بار q_0 نیز بر روی محور zبه فاصله‌ی $h = 2\mathrm{m}$ از مبدأ قرار دارد. بنابر این:

$$\mathbf{r}_0 = 2\hat{k};\quad \mathbf{r}_1 = 2\hat{\imath};\quad \mathbf{r}_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\hat{\imath} + \sin\frac{\pi}{5}\hat{\jmath}\right);$$

$$\mathbf{r}_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\hat{\imath} + \sin\frac{2\pi}{5}\hat{\jmath}\right); \quad \cdots; \quad \mathbf{r}_{10} = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5}\hat{\imath} + \sin\frac{9\pi}{5}\hat{\jmath}\right)$$

در واقع بردارهای مکان بارهای روی حلقه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{r}_n = 2\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{5}\hat{\imath} + \sin\frac{(n-1)\pi}{5}\hat{\jmath}\right); \qquad n = 1, 2, \cdots, 10$$

بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = 2\hat{k} - 2\hat{\imath}; \quad \Longrightarrow \quad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| = 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2 = 2\hat{k} - 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\hat{\imath} + \sin\frac{\pi}{5}\hat{\jmath}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2| = 2\sqrt{1 + \cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$$

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n = 2\hat{k} - 2\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{5}\hat{\imath} + \sin(n-1)\frac{\pi}{5}\hat{\jmath}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n| = 2\sqrt{1 + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{5} + \sin^2\frac{(n-1)\pi}{5}} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$$

نیرویی که بار nام به q_0 وارد می‌کند، برابر است با:

$$\mathbf{F}_n = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|^3} = -7.95\left(\hat{k} - \cos\frac{(n-1)\pi}{5}\hat{\imath} - \sin(n-1)\frac{\pi}{5}\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{N}$$

و طبق اصل برهم‌نهی، نیروی برآیند وارد بر q_0 برابر است با:

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{10}\mathbf{F}_n = -7.95\sum_{n=1}^{10}\left(\hat{k} - \cos\frac{(n-1)\pi}{5}\hat{\imath} - \sin(n-1)\frac{\pi}{5}\hat{\jmath}\right)$$

اما در این حاصل‌جمع، مؤلفه‌های x همدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا

$$\cos 0 = -\cos\pi$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{9\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{7\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5} = -\cos\frac{3\pi}{5}$$

همچنین مؤلفه‌های y نیز همدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا

$$\sin 0 = \sin\pi = 0$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = -\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{9\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5}$$

$$\sin\frac{2\pi}{5} = -\sin\frac{7\pi}{5} = -\sin\frac{8\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$$

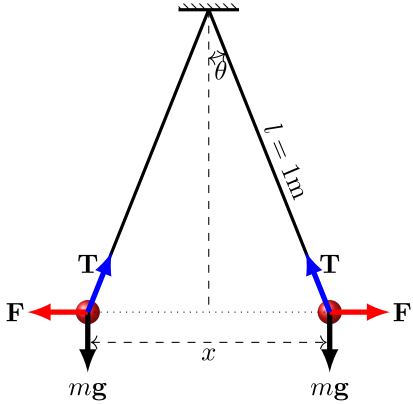
بنابر این

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{10}\mathbf{F}_n = -7.95\sum_{n=1}^{10}\left(\hat{k}\right) = -7.95(10\hat{k}) = -79.5\hat{k}\ \mathrm{N}$$

مسئله ۲-۱۷ دو گلوله‌ی کوچك، هر يك به جرمِ $m = 10$ g با نخ‌هایِ نارسانایِ سبکی به طولِ $l = 1$ m از يك نقطه‌یِ مشترك آویزان شده‌اند هرگاه به این گلوله‌ها بارهایِ منفی و مساوی داده شود، زاویه‌یِ هر نخ با امتداد قائم 20° خواهد شد.

- الف) با رسم نموداری، نیروهای وارد بر هر گلوله را مشخص کنید.
- ب) اندازه‌یِ بارِ هر گلوله را به دست آورید.
- ج) حال اگر طول نخ‌ها را نصف کنیم، زاویه‌یِ جدیدی را که هر نخ با امتداد قائم می‌سازد پیدا کنید.

حل: الف) دیاگرام نیروها در شکل زیر رسم شده است.



ب) چون سیستم در حال تعادل است، برآیند نیروهای وارد بر هر یک از گلوله‌ها صفر است:

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} = 0$$

$$T \sin\theta = F$$
$$T \cos\theta = mg$$

رابطه‌ی اول بر رابطه‌ی دوم تقسیم می‌کنیم:

$$\tan\theta = \frac{F}{mg}$$

نیروی الکتریکی بین دو بار برابر است با

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

در نتیجه:

$$\tan\theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg}$$

از سوی دیگر $x = 2l\sin\theta$، بنابر این:

$$\tan\theta = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2\theta mg} \implies \quad q^2 = 16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2\theta \tan\theta mg$$

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{16\pi\epsilon_0(1\text{m})^2(\sin 20^\circ)^2(\tan 20^\circ)(10^{-2}\text{kg})(9.8\text{N/kg})} \\ &= 1.36\times 10^{-6}\text{C} \\ &= 1.36\mu\text{C} \end{aligned}$$

ج) در این‌حالت $l = 0.5\text{m}$، $q = 1.36\mu\text{C}$ و مجهول مسئله زاویه‌ی θ است. همان‌طور که در قسمت قبل دیدیم، شرط تعادل به شکل زیر است:

$$\tan\theta\sin^2\theta = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg}$$

مقادیر عددی کمیت‌ها را در معادله‌ی فوق قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$\tan\theta\sin^2\theta = 0.17$$

حل این معادله به شکل تحلیلی ساده نیست. برای حل آن روش‌های عددی مختلفی وجود دارد. در این‌جا سعی می‌کنیم یک پاسخ تقریبی برای آن به دست آوریم. فرض می‌کنیم زاویه‌ی θ کوچک باشد. در این‌صورت: $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ بنابر این:

$$\theta^3 = 0.17 \Longrightarrow \theta = 0.554\text{rad}$$

$$\theta \approx 32^\circ$$

دیده می‌شود که مقدار به دست آمده برای θ کوچک نیست. بنابر این فرض اولیه‌مان درست نبوده. این مقدار را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\sin^2(32^\circ)\tan(32^\circ) = 0.18$$

به نظر می‌رسد عدد 32° خیلی هم از مقدار اصلی دور نیست. حال زوایای دیگری را امتحان می‌کنیم. مثلا به ازای $\theta = 31^\circ$ خواهیم دید:

$$\sin^2(31^\circ)\tan(31^\circ) = 0.16$$

بدین ترتیب انتظار داریم مقدار θ بین ۳۱ و ۳۲ درجه باشد. با بررسی بیش‌تر مقدار 31.7° را برای θ به دست می‌آوریم.

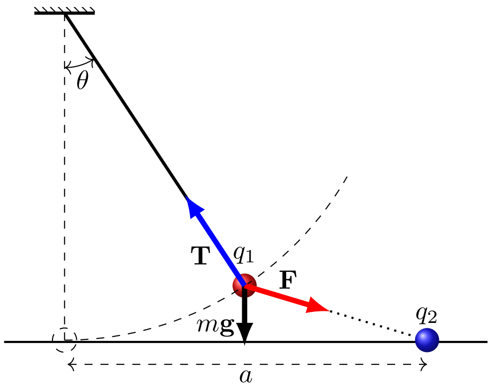
در متون پیش‌رفته‌تر روش‌های عددی حل معادلات را خواهید آموخت.

مسئله ۲-۱۸ گلوله‌ی کوچکی با بارِ مثبتِ $q_1 = +q$ به نخ عایقی آویزان است. گلوله‌ی متشابه دیگری را با بارِ $q_2 = -q$ در فاصله‌ی افقیِ a، در سمت راستِ بارِ اول قرار می‌دهیم.

- الف) با رسمِ نموداری نیروهای وارد بر گلوله‌ی آویزان را مشخص کنید.
- ب) فرض کنید گلوله‌ی سومی با بارِ $q_3 = +2q$ داریم. دو نقطه را چنان مشخص کنید که اگر q_3 را در آن

دو نقطه قرار دهیم، گلولهِیِ آویزان به حالت قائم خواهد ایستاد.

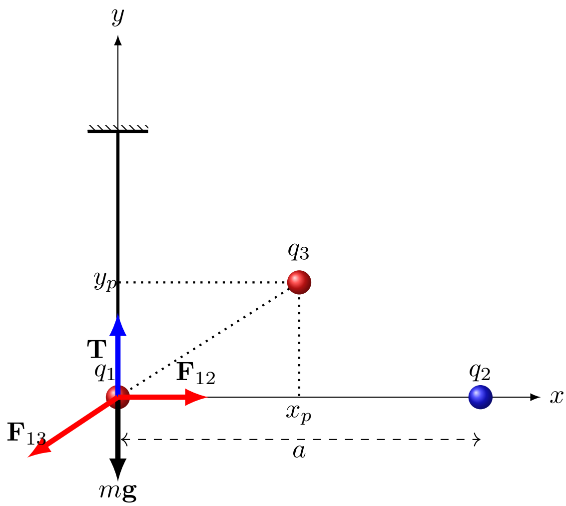
حل: الف) در شکل زیر نیروهای وارد بر گلوله‌ی آویزان رسم شده است.



ب) دستگاه مختصات را مطابق شکل زیر انتخاب می‌کنیم.

فرض می‌کنیم بار q_3 در نقطه‌ی (x_p, y_p) : p قرار دارد و نخ به حالت شاغولی در آمده است. بردار مکان هر یک از بارها به شکل زیر است:

$$\mathbf{r}_1 = 0$$
$$\mathbf{r}_2 = a\hat{\mathbf{i}}$$
$$\mathbf{r}_3 = x_p\hat{\mathbf{i}} + y_p\hat{\mathbf{j}}$$



برآیند نیروهای وارد بر بار q_1 برابر با صفر است:

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = 0$$

که در آن

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{i}}$$
$$\mathbf{F}_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x_p\hat{\mathbf{i}} - y_p\hat{\mathbf{j}}}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}}$$

از شرط تعادل در راستای محور x نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} = 0$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2x_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}}$$

$$4a^4 x_p^2 = (x_p^2 + y_p^2)^3$$

هر نقطه‌ی p که مختصات آن در معادله‌ی فوق صدق کند پاسخ مسئله است. مثلا به ازای $x_p = \frac{a}{2}$ نتیجه می‌شود که $y_p = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$. یعنی نقاط $(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ و $(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ رابطه‌ی فوق را برقرار می‌کنند این نتیجه را به طور مستقیم تحقیق کنید.

توجه کنید که مقادیر منفی برای x_pقابل قبول نیست. چرا؟

مسئله ۲-۱۹ دو گلوله‌ی مشابه هر یك به جرمِ 5g با دو نخِ عایق به طول‌های مساوی $l = 0.5 \text{ m}$ از یك نقطه آویزان‌اند. یکی از آن‌ها بارِ q_1 و دیگری بارِ q_2 دارد. بر اثر دافعه‌ی بینِ بارها، هر یك از دو نخ با امتداد قائم زاویه‌ی $30°$ می‌سازند. گلوله‌ها را با سیمی به هم وصل می‌کنیم تا بار هر دو گلوله برابر شود. سپس سیم را برمی‌داریم. دیده می‌شود که زاویه‌ی هر نخ با امتدادِ قائم $40°$ است. مطلوب است:

- الف) نیرویِ الکتروستاتیکیِ بین گلوله‌ها قبل از اتصال آن‌ها با سیم.
- ب) حاصل ضربِ $q_1 q_2$ قبل از اتصال آن‌ها با سیم.
- ج) نیرویِ الکتروستاتیکیِ بین گلوله‌ها بعد از مساوی شدن بارِ گلوله‌ها
- د) اندازه‌یِ بارهایِ q_1 و q_2.

حل: الف) با توجه به مسئله‌ی (۲) می‌بینیم که شرط تعادل گلوله‌ها به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$\tan\theta = \frac{F}{mg}$$

$$\Longrightarrow F = mg\tan\theta = (5\times 106{-}3kg)(9.8\mathrm{N/kg})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.83\times 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

ب)

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Longrightarrow q_1 q_2 = 4\pi\epsilon_0 R^2 F$$

اما با توجه به شکل $l\sin\theta = \frac{R}{2}$. بنابر این

$$R = 2l\sin 30^\circ = 0.5\ \mathrm{m}$$

(دیده می‌شود که مثلثی که رئوس آن بارهای الکتریکی و نقطه‌ی آویز است، متساوی‌الاضلاع است که البته از هندسه‌ی مسئله نیز می‌توانستیم تشخیص بدهیم). بدین ترتیب با جاگذاری در رابطه‌ی قبل حاصل ضرب دو بار به دست می‌آید:

$$q_1 q_2 = \ 4\pi_0 R^2 F = 7.86\times 10^{-13}\ \mathrm{C}^2$$

ج) وقتی که نخ‌ها با خط قائم زاویه‌یِ 40° می‌سازند، با توجه به شرطِ تعادل (به مسئله‌ی ۲ مراجعه کنید) می‌توان نوشت:

$$F' = mg(\tan 40^\circ) = \left(5\times 10^{-3}\mathrm{kg}\right)\left(9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0.839) = 4.1\times 10^{-2}\mathrm{N}$$

د) بعد از اتصال، بارهای جدیدِ هر یك از گلوله‌ها برابر است با:

$$q_1' = q_2' = \frac{q_1+q_2}{2}$$

بنابراین:

$$F'' = \frac{{q'}_1{q'}_2}{4\pi\epsilon_0 {R'}^2} = \frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 (2l\sin 40^\circ)^2}$$

$$(q_1+q_2)^2 = 16\pi\epsilon_0\,(2l\sin 40^\circ)^2\,F' = 7.55\times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2$$

$$q_1+q_2 = \pm 2.75\times 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

از سویِ دیگر در قسمتِ ب همین مسئله دیدیم که:

$$q_1q_2 = 7.86\times 10^{-6}\ \mathrm{C}^2$$

با استفاده از این دو معادله، q_1 q_2 به دست می‌آیند. می‌دانیم که بارها هم‌نامند. ابتدا فرض می‌کنیم بارها مثبت باشند در این صورت: $q_1+q_2 = +2.75\times 10^{-13}\ \mathrm{C}$. با حذفِ q_1 بینِ این معادله و معادله‌یِ مربوط به حاصل ضرب بارها خواهیم داشت:

$$q_2^2 - \left(2.75\times 10^{-6}\right) q_2 + \left(7.86\times 10^{-13}\right) = 0$$

$$q_2 = \frac{2.75\times 10^{-6} \pm 2.10\times 10^{-6}}{2} = \begin{cases} 2.425\times 10^{-6}\ \ \mathrm{C} \\ \\ 0.325\times 10^{-6}\ \ \mathrm{C}\end{cases}$$

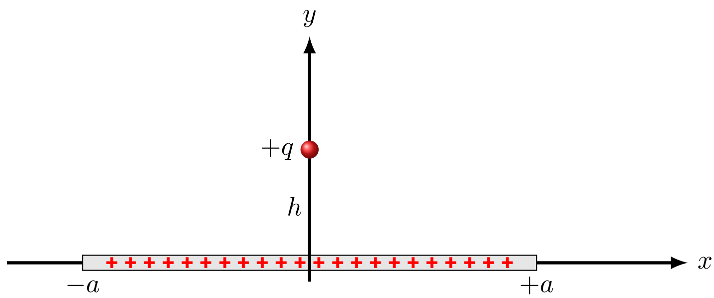
بنا بر این یکی از بارها $2.425\times 10^{-6}\ \mathrm{C}$ و بارِ دیگر $0.325\times 10^{-6}\ \mathrm{C}$ است.

اما اگر بارها را منفی فرض کنیم، آن‌گاه $q_1+q_2 = -2.75\times 10^{-13}\ \mathrm{C}$ در نتیجه با حلِ معادله‌یِ درجه‌یِ دوم، همان مقادیر فوق برای q_1 و q_2 البته با علامتِ منفی به دست می‌آید:

$$q_2\ ,\ q_1 = \begin{cases} -2.425\times 10^{-6}\ \ \mathrm{C} \\ \\ -0.325\times 10^{-6}\ \ \mathrm{C}\end{cases}$$

مسئله ۲-۲۰ بار الکتریکیِ $+Q$ به طور یکنواخت روِ پاره خطِ به طولِ $2a$ واقع بر محورِ x (از $x=-a$ تا $x=+a$) توزیع شده است. بار نقطه‌ایِ $+q$ روی محورِ y و به فاصله‌یِ h از مبدأ مختصات قرار دارد. نیروی وارد

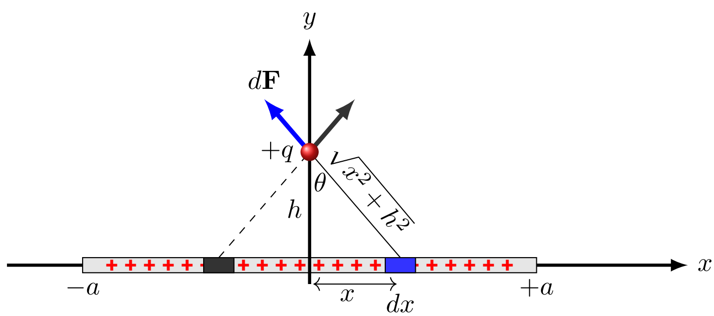
بر q را به دست آورید.



شکل ۲-۱۵: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲ - ۲۰

حل: مطابق شکل، بر روی خط بار، یک عنصر بسیار کوچک به طول dx و بار الکتریکی dQ در نظر می‌گیریم. طبق تعریف چگالیِ بار، می‌توان نوشت: $dQ = \lambda dx$. اما چون توزیع بار یکنواخت است، چگالی بار برابر است با $\lambda = Q/(2a)$. بدین ترتیب نیرویی که از طرف dQ به بار نقطه‌ای q وارد می‌شود، برابر است با

$$dF = |d\mathbf{F}| = \frac{qdQ}{4\pi\epsilon_0(x^2+h^2)} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx}{(x^2+h^2)}$$



شکل ۲-۱۶: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲ - ۲۰

و نیروی کل وارد بر q برابر است با

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$$

و مؤلفه‌های این نیرو به شکل زیر به دست می‌آیند

$$F_x = \int dF_x = \int dF \sin\theta = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2+h^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$
$$F_y = \int dF_y = \int dF \cos\theta = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2+h^2)} \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

توجه کنید که

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$
$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

از تقارن مسئله واضح است که به ازای هر عنصر بار dQ در بخش مثبتِ محور x، یک عنصر dQ در بخش منفی محورِ x، وجود دارد و همان طور که از شکل پیداست، مؤلفه‌های xِ نیروهای ناشی از این عناصر، اثر یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و نهایتاً F_x برابر با صفر می‌شود. این نکته با توجه به انتگرال مربوط به مؤلفه‌ی x به راحتی نتیجه می‌شود. تابع درون انتگرال مربوط به مؤلفه‌ی x، تابعی فرد است و از انجا که انتگرال‌گیری بر روی یک بازه‌ی متقارن گرفته می‌شود، مقدار انتگرال صفر می‌شود. با محاسبه‌ی انتگرال هم همین نتیجه به دست می‌آید. بنابر این، اندازه‌ی نیرو برابر با اندازه‌ی مؤلفه‌ی yِ نیرو است:

$$F = F_y = \frac{qQh}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال، از تغییر متغیر $x = h\tan\theta$ استفاده می‌کنیم. (در این‌جا زاویه‌ی θ، همان زاویه‌ی نشان داده شده در شکل است.)

بنابر این،

$$dx = h(1+\tan^2\theta)d\theta$$

و انتگرال به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \int \frac{h(1+\tan^2\theta)d\theta}{(h^2\tan^2\theta+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{h^2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{(\tan^2\theta+1)}} \\
&= \frac{1}{h^2}\int \cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{h^2}\sin\theta \\
&= \frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}
\end{aligned}$$

بدین ترتیب،

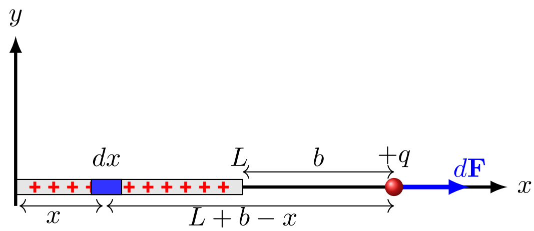
$$\begin{aligned}
F &= \frac{qQh}{8\pi\epsilon_0 a}\frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-a}^{+a} \\
&= \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 a}\frac{1}{h}\frac{2a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
&= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h}\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}
\end{aligned}$$

و بردار نیروی وارد بر q برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h\sqrt{a^2+h^2}}\hat{\mathbf{j}}$$

مسئله ۲-۲۱ بار مثبتِ Q به طور یکنواخت روی پاره خطی واقع بر نیمه‌یِ مثبت محورِ x از $x=0$ تا $x=+L$ گسترده شده است. بارِ نقطه‌ای مثبتِ q روی محورِ x به فاصله‌یِ $x=b+L$، از مبدأ یعنی به فاصله‌یِ b از انتهای سمتِ راستِ خطِ بار قرار دارد. اندازه و جهتِ نیروی وارد بر q را به دست آورید.

حل: مطابق شکل، بر روی خط بار، یک عنصر بسیار کوچک به طول dx و بار الکتریکی dQ در نظر می‌گیریم.



شکل ۲-۱۷: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۲۱

طبق قانون کولن، نیرویی که از طرف dQ به بار نقطه‌ای q وارد می‌شود، برابر است با

$$d\mathbf{F} = \frac{qdQ}{4\pi\epsilon_0(L+b-x)^2}\hat{\mathbf{i}}$$

که در آن $dQ = (Q/L)dx$. نیروی وارد بر q، با انتگرال‌گیری از این رابطه به دست می‌آید:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{(L+b-x)^2}$$

(به ثابت بودنِ بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$ و بیرون کشیدنِ آن از انتگرال توجه کنید.)

محاسبه‌ی این انتگرال بسیار ساده است، کافی است از تغییر متغیرِ $u = L+b-x$ استفاده کنیم. در این صورت $du = -dx$ و می‌توان نوشت:

$$\int \frac{dx}{(L+b-x)^2} = \int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} = \frac{1}{L+b-x}$$

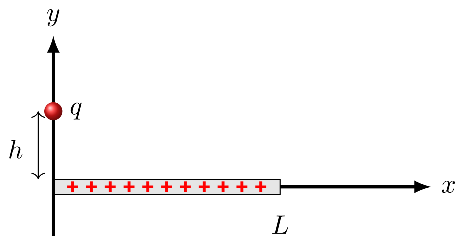
بدین ترتیب، در این مسئله نیروی وارد بر بار q از سوی میله‌ی باردار برابر است با

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{(L+b-x)^2} = \hat{\mathbf{i}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{1}{L+b-x}\Bigg|_0^L$$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{L+b}\right]$$

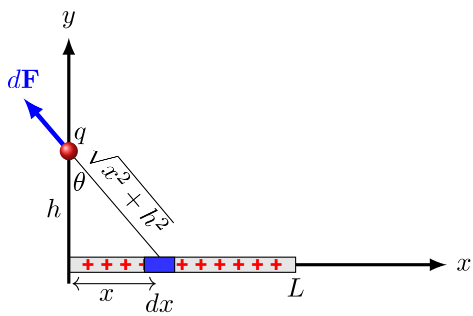
مسئله ۲-۲۲ بار مثبتِ Q به طور یکنواخت روی پاره خطی واقع بر محورِ x از $x = 0$ تا $x = +L$ گسترده شده

است. بارِ نقطه‌ایِ q در نقطه‌ی $(0,h)$ قرار دارد. مولفه‌های نیرویِ وارد بر q را به دست آورید.



شکل ۲-۱۸: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۲۲

حل: مطابق شکل، بر روی خط بار، یک عنصر بسیار کوچک به طول dx و بار الکتریکی $dQ = (Q/L)dx$ در نظر می‌گیریم.



شکل ۲-۱۹: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۲۲

اندازه‌ی نیرویی که از طرف dQ به بار نقطه‌ای q وارد می‌شود، برابر است با

$$dF = |d\mathbf{F}| = \frac{qdQ}{4\pi\epsilon_0(x^2+h^2)} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{dx}{(x^2+h^2)}$$

و با توجه به هندسه‌ی شکل، به راحتی دیده می‌شود که مؤلفه‌های x و yیِ این نیرو برابرند با

$$dF_x = -dF\sin\theta$$
$$dF_y = dF\cos\theta$$

اما

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$
$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

بنابر این

$$dF_x = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{dx}{(x^2+h^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$
$$dF_y = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{dx}{(x^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

با انتگرال‌گیری از این روابط، مؤلفه‌ی نیروی وارد بر بار q به دست می‌آید (طبق اصل برهم‌نهی)

$$F_x = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{xdx}{(x^2+h^2)3/2}$$
$$F_y = \frac{qQh}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

روش محاسبه‌ی انتگرال دوم (مؤلفه‌ی y) را در مسئله‌ی (۲-۲۰) دیدیم:

$$\int \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

بنابر این،

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{qQh}{4\pi\epsilon_0 L}\,\frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\bigg|_0^L \\ &= \frac{qQh}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{h^2}\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h}\frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی x، باید انتگرال زیر را حل کنیم:

$$I = \int \frac{xdx}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال، تغییر متغیرِ $u^2 = x^2 + h^2$ را در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب،

$$2udu = 2xdx \qquad \longrightarrow \qquad udu = xdx$$

بنابر این

$$I = \int \frac{udu}{u^3} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

و در نتیجه مؤلفه‌ی xبه شکل زیر به دست می‌آید

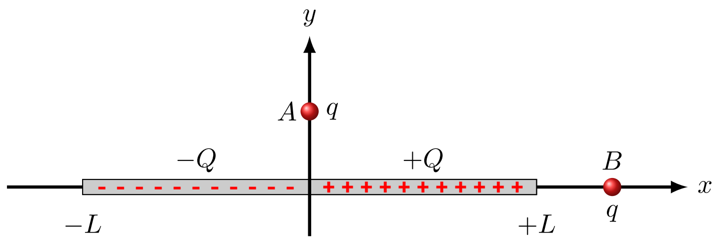
$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)\Bigg|_0^L \\ &= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}}\right) \end{aligned}$$

بنابر این، بردار نیروی وارد بر q را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}}\right) + \hat{\mathbf{j}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h}\frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}}$$

مسئله ۲-۲۳ بارهای الکتریکیِ $+Q$ و $-Q$ هر یك به طورِ یکنواخت بر پاره خط‌هایی به طولِ L توزیع شده‌اند. اگر این بارهای الکتریکی مطابقِ شکل بر محورِ x قرار گرفته باشند:

- الف) نیروی وارد بر بار نقطه‌ایِ q را که بر روی محورِ y در نقطه‌یِ A به فاصله‌یِ y از مبدأ قرار دارد، چقدر است؟ نشان دهید که اگر y نسبت به a بسیار بزرگ باشد $(y \gg L)$ این نیرو با y^{-3} متناسب است.
- ب) اگر بار نقطه‌ایِ q در نقطه‌یِ B روی محورِ x به فاصله‌یِ x از مبدأ باشد $(x > L)$، نیروی وارد بر آن را

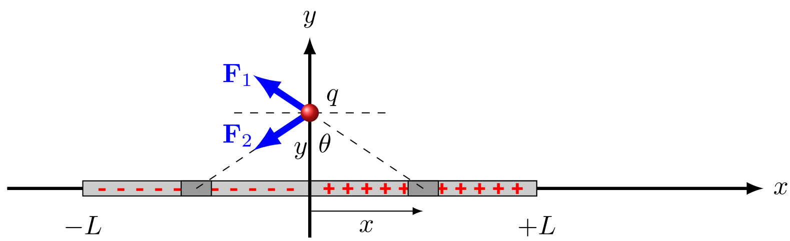


شکل ۲-۲۰: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۲۳

پیدا کنید و نشان دهید که اگر x نسبت به L خیلی بزرگ باشد این نیرو با x^{-3} متناسب است.

حل:

الف) مانند مسائل قبل، این خط بار را متشکل از قطعات بسیار کوچک dx با بار $dQ=(Q/a)dx$ در نظر می‌گیریم. بردار نیروی وارد بر q را از طرف هر یک از این قطعات کوچک محاسبه و سپس با هم جمع می‌کنیم (انتگرال می‌گیریم).



اما، همان‌طور که در شکل پیداست، با توجه به تقارن مسئله، واضح است که مؤلفه‌ی yـِ نیروی برآیند، صفر است.

$$F_y=\int dF_y=0$$

برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی xـِ نیروی برآیند، کافی است مؤلفه‌ی xـِ نیروی ناشی از یکی از بخش‌های مثبت یا منفی را حساب کنیم و نتیجه را دو برابر کنیم.

$$F_x=\int dF_x=\int dF\sin\theta$$

اما

$$dF=\frac{qdQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2)}$$

و

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-a}^{+a}\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 2\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{0}^{+a}\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

این انتگرال را در مسئله‌ی (۲-۲۲) حل کردیم:

$$I = \int\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

بنابر این

$$F_x = -2\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left.\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_0^a$$

$$F_x = 2\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

و با توجه به این که $F_y = 0$، بردار نیروی وارد بر q برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)(-\hat{\mathbf{i}})$$

توجه کنید که نیرو در جهتِ منفیِ محور xاست.

برای حالتی که بار نقطه‌ای q از خط بار بسیار دور باشد، یعنی اگر $y \gg a$، می توان نوشت:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{1}{y}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{y}\left(1-\frac{a^2}{2y^2}+\cdots\right) \approx \frac{1}{y}-\frac{a^2}{2y^3}$$

یادآوری

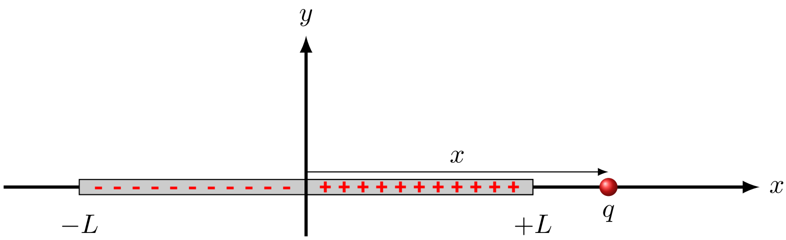
$$(1+x)^m = 1 + \frac{1}{1!}mx + \frac{1}{2!}m(m-1)x^2 + \frac{1}{3!}m(m-1)(m-2)x^3 + \cdots$$

بنابر این، اگر $a \gg y$، نیروی وارد بر q برابر است با

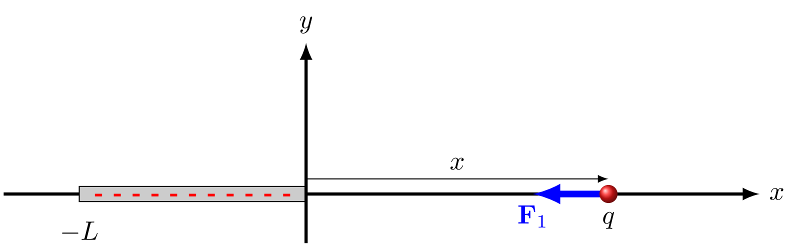
$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{y^3}(-\hat{\mathbf{i}})$$

یعنی $F \propto \frac{1}{y^3}$.

ب) در این حالت بار نقطه‌ای q، در امتداد خط بار قرار دارد. در این‌جا نیز می‌توانیم مستقیماً، با المان‌گیری از خط بار و انتگرال‌گیری، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای را به دست آوریم و یا از نتیجه‌ی مسئله‌ی (۲-۲۱) استفاده کنیم.



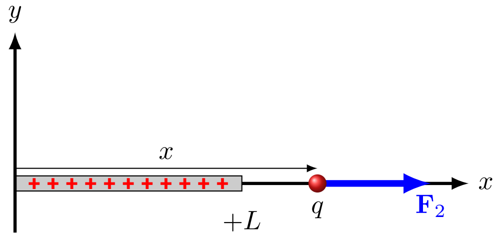
در واقع این خط بار از دو خط بار یکی مثبت و یکی منفی تشکیل شده است. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای ناشی از هر یک از دو بخش مثبت و منفی را با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی (۲-۲۱) می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد.



برای این که از نتیجه‌ی مسئله‌ی (۲-۲۱) استفاده کنیم، کافی است به جای b قرار بدهیم x:

$$\mathbf{F}_1 = (-\hat{\mathbf{i}})\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{L+x}\right]$$

در مورد بخش مثبت نیز، با توجه به شکل، دیده می‌شود که باید در نتیجه‌ی مسئله‌ی (۲-۲۱) به جای b قرار بدهیم $x-L$:



$$\mathbf{F}_2 = \hat{\mathbf{i}}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right]$$

و نیروی کل وارد بر q برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{x-L} - \frac{2}{x} + \frac{1}{L+x}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{2x}{x^2-L^2} - \frac{2}{x}\right]\hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

حال می‌خواهیم ببینیم اگر فاصله‌ی بار q تا خط بار زیاد باشد، یعنی اگر $x \gg L$، رابطه‌ی نیروی وارد بر q با فاصله، چگونه است؟ برای این کار بسط تیلور عبارت $1/(x^2-L^2)$ را بر حسب توان‌های x/L، می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x^2-L^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1-\frac{L^2}{x^2}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right)^{-1} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{L^2}{x^2}+\cdots\right)$$

بنابر این،

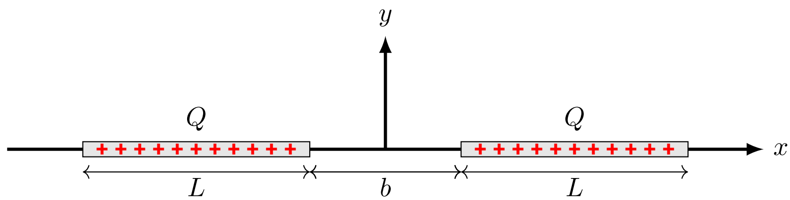
$$\frac{2x}{x^2-L^2} = \frac{2}{x}\left(1+\frac{L^2}{x^2}+\cdots\right) = \left(\frac{2}{x}+\frac{2L^2}{x^3}+\cdots\right)$$

و در نهایت نیروی وارد بر q برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0}\frac{L}{x^3}\hat{\mathbf{i}}$$

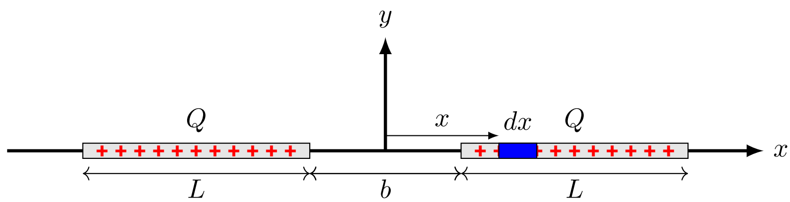
✎

مسئله ۲-۲۴ دو میله‌یِ نازك به طولِ L دارای بارِ مساویِ Q هستند که به طور یکنواخت بر رویِ آن‌ها توزیع شده است. میله‌ها در یك امتداد قرار دارند و فاصله‌یِ دو انتهای نزدیك به همِ آن‌ها b است. نیروی دافعه‌یِ الکتریکیِ بین میله‌ها چقدر است؟



شکل ۲-۲۱: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۲۴

حل: برای حل مسئله، می‌توانیم از نتیجه‌ی مسئله‌ی (۲-۲۱) استفاده کنیم. فرض کنید می‌خواهیم نیروی وارد بر میله‌ی سمت راستی را حساب کنیم. یک عنصر طول dx با بار الکتریکی $dq = (Q/L)dx$ در نظر می‌گیریم.



با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی (۲-۲۱)، نیروی وارد بر این عنصر کوچک بار از طرف میله‌ی سمت چپ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{Qdq}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{x+b/2} - \frac{1}{L+x+b/2}\right]$$

اما $dq = (Q/L)dx$. بنابر این،

$$d\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}dx\left[\frac{1}{x+b/2} - \frac{1}{L+x+b/2}\right]$$

و طبق اصل برهم‌نهی، نیروی کل با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق به دست می‌آید.

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[\int_{b/2}^{L+b/2}\frac{dx}{x+b/2} - \int_{b/2}^{L+b/2}\frac{dx}{L+x+b/2}\right]$$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[\ln(x+b/2)\Big|_{b/2}^{L+b/2} - \ln(L+x+b/2)\Big|_{b/2}^{L+b/2}\right]$$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[\ln\left(\frac{L+b}{b}\right) - \ln\left(\frac{2L+b}{L+b}\right)\right]$$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[\ln\left(\frac{(L+b)^2}{b(2L+b)}\right)\right]$$

بد نیست در این‌جا بررسی کنیم که اگر طول میله‌ها از فاصله‌ی بین‌شان خیلی کوچک‌تر باشد، یعنی $L \ll b$، چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ انتظار داریم که شبیه دو بار الکتریکی نقطه‌ای باشند که در فاصله‌ی b از هم قرار دارند و نیروی بین آن‌ها، طبق قانون کولن، از رابطه‌ی زیر به دست آید:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

ببینیم آیا رابطه‌ای که ما به دست آورده‌ایم، در شرایط $L \ll b$، به رابطه‌ی فوق منجر می‌شود؟ نتیجه‌ای را که به دست آورده‌ایم، به شکل زیر می‌نویسیم

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[\ln\left(\frac{b^2(L/b+1)^2}{b^2(2L/b+1)}\right)\right] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[\ln\left(\frac{(L/b+1)^2}{(2L/b+1)}\right)\right]$$

قسمت داخل کروشه را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$\ln\left(\frac{(L/b+1)^2}{(2L/b+1)}\right) = 2\ln(1+L/b) - \ln(1+2L/b)$$

اما می‌دانیم که بسط تابع $\ln(1+x)$ به شکل زیر است:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

بنابر این

$$2\ln(1+L/b) = 2\left(\frac{L}{b} - \frac{L^2}{2b^2}\right) + \cdots$$

$$\ln(1+2L/b) = \frac{2L}{b} - \frac{4L^2}{2b^2} + \cdots$$

بدین ترتیب،

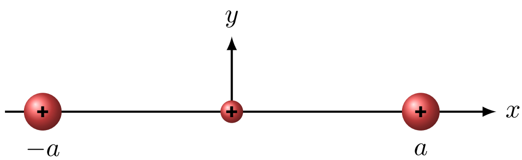
$$2\ln(1+L/b) - \ln(1+2L/b) = \frac{L^2}{b^2} + \text{جملات با درجه‌ی بالاتر}$$

با توجه به شرط $L/b \ll 1$، از جملات با درجه‌ی بالاتر چشم‌پوشی می‌کنیم. بنابر این نیرویی که بارهای الکتریکی به هم وارد می‌کنند، برابر است با

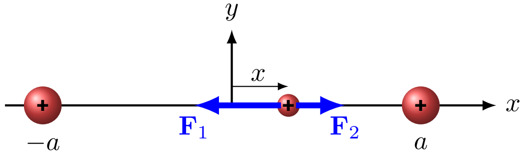
$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\frac{L^2}{b^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

یعنی همان چیزی که انتظار داشتیم.

مسئله ۲-۲۵ دو بارِ نقطه‌ایِ مثبتِ $Q > 0$ در رویِ محورِ x در نقاطِ $x = -a$ و $x = +a$ قرار دارند (ثابت شده‌اند). ذره‌یِ باردارِ دیگری به جرمِ m و بارِ $q > 0$ در مبدأ مختصات قرار می‌دهیم. نشان دهید که تعادلِ بارِ q در راستایِ محورِ x پایدار است. دوره‌یِ تناوبِ نوسانات این ذره را حولِ نقطه‌یِ تعادل پیدا کنید



حل: واضح است که وقتی بار q در مبدأ مختصات قرار دارد، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است و این ذره در حالت تعادل قرار دارد. برای این که ببینیم این تعادل پایدار است یا خیر، این ذره را به اندازه‌ی x کوچک، از وضعیت تعادل خارج می‌کنیم. در این حالت نیروی وارد بر ذره برابر است با



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(a-x)^2}(-\hat{\mathbf{i}}) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(a+x)^2}\hat{\mathbf{i}}$$

با توجه به کوچک بودنِ x، این نیرو را بر حسب x به شکل زیر، با استفاده از بسط تیلور، بر حسب توان‌هایی از x/a

می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(a+x)^2}-\frac{1}{(a-x)^2}\right)\hat{\mathbf{i}}\\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2}-\frac{1}{(1-\frac{x}{a})^2}\right)\hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

اما

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2} = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-2} = 1+2\frac{x}{a}+\cdots$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2} = \left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2} = 1-2\frac{x}{a}+\cdots$$

اگر از توان‌های 2 و بالاترِ x/a، چشم‌پوشی کنیم:

$$\frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2}-\frac{1}{(1-\frac{x}{a})^2} = -4\frac{x}{a}$$

و بدین ترتیب، نیروی وارد بر ذره‌ی qبرابر است با

$$\mathbf{F} = -\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3}x\hat{\mathbf{i}}$$

رابطه‌ی اخیر شبیه به قانون نیرو برای فنر $(F = -kx)$ است. وقتی بار q از حالت تعادل خارج می‌شود، نیروی بازگرداننده‌ی فوق، آن را به سمت نقطه‌ی تعادل برمی‌گرداند. یعنی تعادل پایدار است. در این‌جا عبارت $\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3}$ نقش سختی فنر، k، را دارد. به یاد داریم که بسامد نوسان‌های جسم متصل به فنر برابر است با $\omega = \sqrt{k/m}$. بنابر این، در این مسئله، بسامد نوسان‌های بار q حول نقطه‌ی تعادل، برابر است با

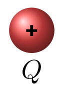
$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3 m}}$$

و دوره‌ی تناوب حرکت این ذره، برابر است با

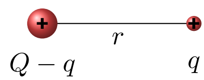
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 a^3 m}{qQ}}$$

مسئله ۲ـ۲۶ گلوله‌یِ کوچکی دارایِ بارِ الکتریکیِ Q است. این گلوله به دو قسمت یکی با بارِ $q_1 = q$ و دیگری با بارِ $q_2 = Q - q$ تقسیم می‌شود. نسبتِ q/Q چقدر باشد، تا نیرویِ بینِ این دو بار بیشینه شود؟

حل: در این‌جا فرض می‌شود که این بار الکتریکی بسیار کوچک است.



بنابر این، تکه‌های آن، مانند بارهای نقطه‌ای هستند و نیرویی که به هم وارد می‌کنند از قانون کولن به دست می‌آید. فرض کنید بارهای تقسیم‌شده‌ی $q_1 = q$ و $q_2 = Q - q$ را در فاصله‌ای r از هم قرار داده‌ایم.



بدین ترتیب، نیرویی که این دو بارِ کوچک به هم وارد می‌کنند، برابر است با

$$F = \frac{q(Q-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

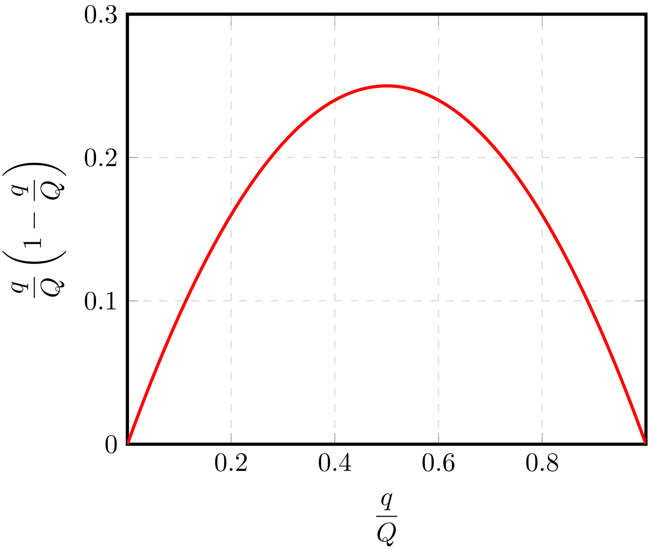
واضح است که این نیرو به مقدار q وابسته است. برای درک این نکته عبارت زیر را برای مقادیر مختلف q بررسی می‌کنیم.

$$f = \frac{4\pi\epsilon_0 r^2 F}{Q^2} = \frac{q}{Q}\left(1 - \frac{q}{Q}\right)$$

اگر $q = 0.01Q$ باشد، آن‌گاه $f = 0.0099$ و اگر $q = 0.1Q$، آن‌گاه $f = 0.09$. در جدول زیر مقدار f به ازای مقادیر مختلف نسبت q/Q درج شده است.

$\frac{q}{Q}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\frac{q}{Q}\left(1 - \frac{q}{Q}\right)$	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09

دیده می‌شود که با افزایش این نسبت، مقدار f (و در نتیجه F) افزایش می‌یابد. اما در مقادیر بیش‌تری از نسبت q/Q، دیده می‌شود که با افزایش این نسبت، مقدار f کاهش می‌یابد. این نشان می‌دهد که به ازای مقدار خاصی از q/Q، برای f، بیشینه‌ای خواهیم داشت. نمودار این تابع، این نکته را به خوبی نشان می‌دهد.



می‌خواهیم این بیشینه را پیدا کنیم. در واقع می‌خواهیم ببینیم q چه کسری از Qباشد تا مقدار نیرو، F، بیشینه باشد. برای پاسخ به این سوال کافی است تغییرات نیرو را نسبت به تغییرات q برابر با صفر قرار دهیم:

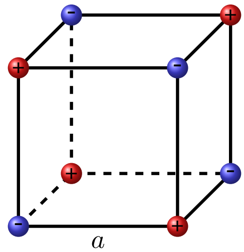
$$\frac{\partial F}{\partial q}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial q}\frac{q(Q-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2}=0$$

$$\Longrightarrow (Q-q)-q=0 \Longrightarrow q=\frac{Q}{2}$$

یعنی اگر بار Q به دو قسمت مساوی تقسیم شود، نیروی بین این دو قسمت، بیشینه خواهد بود و مقدار این نیروی بیشینه برابر است با

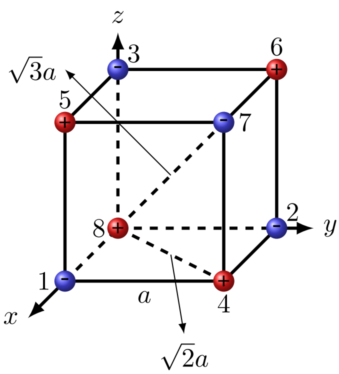
$$F_{\max}=\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2}$$

مسئله ۲-۲۷ بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ مطابق شکل زیر در رئوس مکعبی به ضلع $a=2.8\times10^{-10}\mathrm{m}$ به طور یک در میان قرار گرفته‌اند. اندازه‌ی نیروی الکتریکی وارد بر هر یک از این بارها را (از طرف هفت بارِ دیگر) حساب کنید.



شکل ۲-۲۲: شکل مربوط به مسئله‌ی ۲-۲۷

حل: بارها را مطابق شکل زیر نام‌گذاری کرده‌ایم. واضح است که اندازه‌ی نیروی وارد بر بارها یکسان است. فرض کنید می‌خواهیم نیروی وارد بر بار شماره ۸ را حساب کنیم. دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که بار شماره ۸ در مبدأ مختصات است.



فاصله‌ی بارهای ۱,۲,۳ از مبدأ مختصات (از بار شماره ۸)، برابر با a است. و نیروهایی که این بارها به بار هشتم وارد می‌کنند در جهت محورهای مختصات است:

$$\mathbf{F_1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{i}; \qquad \mathbf{F_2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{j}; \qquad \mathbf{F_3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{k}$$

فاصله بارهای ۴,۵,۶ تا مبدأ مختصات $\sqrt{2}a$ است و جهت نیرو در امتداد قطر هر وجه مکعب است. یعنی با محورهای مختصات (در صفحه مزبور) زاویه 45° می سازد:

$$\begin{aligned}\mathbf{F_4} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}\left(-\cos 45^\circ\hat{i} - \sin 45^\circ\hat{j}\right)\\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{4}\hat{j}\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{F_5} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}\left(-\cos 45°\hat{i} - \sin 45°\hat{k}\right)$$
$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{4}\hat{k}\right)$$

$$\mathbf{F_6} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}a)^2}(-\cos 45°\hat{j} - \sin 45°\hat{k})$$
$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\hat{j} - \frac{\sqrt{2}}{4}\hat{k}\right)$$

فاصله‌ی بار شماره ۷ تا مبدأ مختصات $\sqrt{3}a$ است و زاویه‌ای که بردار مکان آن با محور z می سازد $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ است:

$$\mathbf{F_7} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{3}a\right)^2}\left(\sin\theta\cos 45°\hat{i} + \sin\theta\sin 45°\hat{j} + \cos\theta\hat{k}\right)$$

اما

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{F_7} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{3}a\right)^2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}\right)$$
$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{9}\hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{9}\hat{k}\right)$$

و نیروی کل برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \cdots + \mathbf{F_7} \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left[\left(1 - 2\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\hat{i} + \left(1 - 2\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\hat{j} + \left(1 - 2\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\hat{k}\right] \\
&= \frac{\left(1.6 \times 10^{-19}\right)^2 \left(9 \times 10^9\right)}{\left(3.8 \times 10^{-10}\right)^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \\
&= 7.74 \times 10^{-10}\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
|\mathbf{F}| = 1.34 \times 10^{-9}\mathrm{N}
$$

✎

مسائل اضافی فصل ۲

مسئله ۲-۲۸ بارهای نقطه‌ایِ q_1 و q_2 به ترتیب در نقاطِ $(1,2,0)$ و $(2,0,0)$ واقع‌اند. رابطه‌یِ بینِ q_1 و q_2 را چنان پیدا کنید که نیرویِ کلِ وارد بر بار آزمونِ q_0 واقع در نقطه‌یِ $(-1,1,0)$:

- الف) مولفه‌یِ x نداشته باشد.
- ب) مولفه یِ y نداشته باشد.

جواب: الف) $\frac{q_1}{q_2} = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$ ب) $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

مسئله ۲-۲۹ دو بار نقطه‌ایِ $q_1 = 250\ \mu\text{C}$ و $q_2 = -300\ \mu\text{C}$ به ترتیب در نقاطِ $(5,0,0)$ و $(0,0,-5)$ بر حسب متر، قرار دارند. نیرویِ وارد بر q_2 را از طرفِ q_1 حساب کنید.

جواب: $\mathbf{F} = 9.6\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}\right)$ N

مسئله ۲-۳۰ بار الکتریکیِ $Q = 500\ \mu\text{C}$ بر روی صفحه‌یِ مربع شکل به اضلاعِ چهار متر به طور یکنواخت توزیع شده است. این مربع در صفحه‌یِ xy قرار دارد و مرکزِ آن بر مبدأ مختصات منطبق است. این صفحه چه نیرویی به بارِ $q = 30\ \mu\text{C}$ واقع در نقطه‌یِ $(0,0,5\text{m})$ وارد می کند؟

جواب: $\mathbf{F} = (4.66\ \text{N})\ \hat{\mathbf{k}}$

مسئله ۲-۳۱ بارِ Q به طور یکنواخت درون کره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است. مرکزِ کره بر مبدأ مختصات منطبق است. يك حلقه‌یِ دایره‌ای به شعاعِ R نیز دارای بار یکنواختِ Q است که موازی با صفحه‌یِ xy است و مرکزِ آن در نقطه‌یِ $z = \sqrt{3}R$ روی محورِ z قرار دارد. از طرف کره چه نیرویی به حلقه وارد می‌شود؟ جواب: $\mathbf{F} = \frac{\sqrt{3}Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\mathbf{k}}$

مسئله ۲-۳۲ دو قطره‌یِ روغن هر یک به شکلِ کره‌ای با شعاعِ $r = 8.22 \times 10^{-5}\text{m}$ دارایِ بارِ الکتریکیِ مساوی و هم‌نام هستند. اگر نیرویِ دافعه‌ی کولنی بینِ این دو بار با نیرویِ گرانشیِ بینِ آن‌ها خنثی شود، بارِ الکتریکیِ آن‌ها را پیدا کنید. چگالِ جرمیِ روغن را $\rho_m = 0.9 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ بگیرید.

جواب: $q = \frac{4\pi}{3}\ \rho_m r^3\sqrt{4\pi\epsilon_0 G} \approx 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$

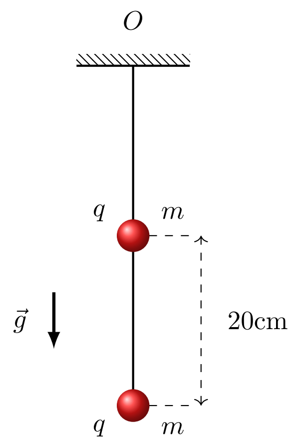
مسئله ۲-۳۳ دو ذره‌ی باردارِ یکسان درونِ روغنی با ضریبِ گذردهیِ $\epsilon = 3\epsilon_0$ در فاصله‌ی r_1 قرار دارند. r_1 چقدر باشد تا نیرویِ بینِ این دو ذره برابر با نیرویی باشد که آن‌ها در خلأ در فاصله‌ی $r_2 = 30$ cm از یکدیگر به هم وارد می‌کنند.

جواب: $r_1 = \dfrac{r_2}{\sqrt{\dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}}} = 17.3$ cm

مسئله ۲-۳۴ دو بارِ نقطه‌ایِ آزادِ $q_1 = -3 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ و $q_2 = -12 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ در فاصله‌یِ $r = 3\mathrm{m}$ از یکدیگر قرار دارند. بارِ q_0 را در نقطه‌ای بینِ این دو بار قرار می‌دهیم. مقدار و مکانِ q_0 را چنان تعیین کنید که این سه بار در تعادل باشند.

جواب: $l = r\frac{\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_1|+|q_2|}} = 1\ \mathrm{m}$ و $q_0 = \frac{|q_2| l^2}{r^2} = 1.33 \times 10^{-5}\mathrm{C}$

مسئله ۲-۳۵ دو گلوله‌یِ یکسان به جرمِ $m = 50\mathrm{g}$ با بارهایِ الکتریکیِ هم اندازه و همنام، با نخِ سبکِ غیرِ قابلِ انعطافی به طولِ $l = 20\mathrm{cm}$ به هم وصل شده‌اند. مطابقِ شکل این دستگاه توسطِ نخِ سبکِ دیگری از نقطه‌یِ O آویزان است. بارِ الکتریکیِ گلوله‌ها چقدر باشد تا کششِ هر دو نخ یکسان باشد؟



شکل ۲-۲۳: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۳۵

جواب: $q = \pm l\sqrt{4\pi\epsilon_0 mg} \cong \pm 1.5 \times 10^{-6}\mathrm{C}$

مسئله ۲-۳۶ در چهار گوشه‌یِ یک مربع چهار بارِ یکسانِ q قرار دارند. در مرکزِ این مربع بارِ منفیِ Q قرار گرفته است. اندازه‌یِ Q چقدر باشد، تا این دستگاهِ بار در تعادل بماند.

جواب: $|Q| = 0.96\, q$

مسئله ۲-۳۷ سه گلوله با بارهایِ الکتریکیِ q_1, q_2, q_3 با دو نخِ سبکِ هم طول به هم وصل شده‌اند و در یک راستا قرار دارند. طولِ هر یک از نخ‌ها l است.کششِ نخ‌ها را پیدا کنید.

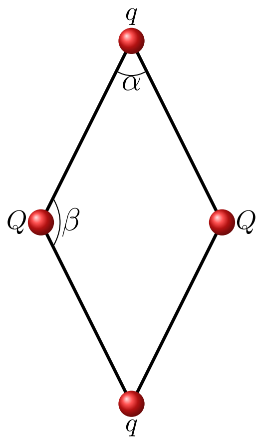
جواب: $T_1 = \frac{q_1(4q_2+q_3)}{16\pi\epsilon_0 l^2}$ و $T_2 = \frac{q_3(q_1+4q_2)}{16\pi\epsilon_0 l^2}$

مسئله ۲-۳۸ در پایینِ سطحِ شیب‌داری با زاویه‌ی شیبِ $\alpha = \pi/6$، گلوله‌ی بارداری قرار دارد (ثابت شده است).

گلوله‌ی دیگری مشابه با گلوله‌ی نخست، روی سطحِ شیب‌دار در تعادل قرار دارد. اگر زاویه‌ی شیب را دو برابر کنیم، فاصله‌ی گلوله‌ی دوم را روی سطحِ شیب‌دار نسبت به گلوله‌ی پایین، چقدر تغییر دهیم تا تعادل دوباره برقرار شود؟

جواب: $\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}$

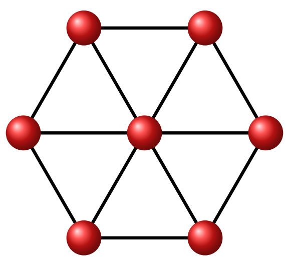
مسئله ۲-۳۹ مطابقِ شکل بارهایِ q, Q, q, Q توسطِ چهار نخِ یکسان به طولِ l به هم وصل شده‌اند. زاویه‌یِ بینِ نخ‌ها را پیدا کنید.



شکل ۲-۲۴: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۳۹

جواب: $\alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{q}{Q}\right)^{2/3}, \quad \beta = \pi - \alpha$

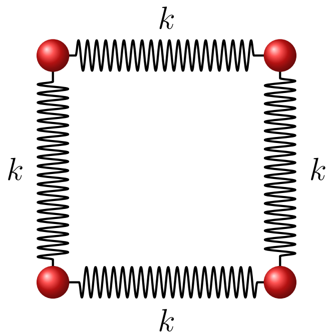
مسئله ۲-۴۰ هفت بارِ الکتریکیِ یکسانِ q مطابقِ شکل توسطِ نخ‌هایِ سبکی به طولِ یکسانِ l به هم وصل شده‌اند. کششِ هر یک از نخ‌ها را پیدا کنید.



شکل ۲-۲۵: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۴۰

جواب: $T = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l^2}\left(\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مسئله ۲-۴۱ چهار فنرِ یکسانِ سبک با طولِ آزاد a، مطابق شکل، یک مربع ساخته‌اند. در چهارگوشه‌ی این مربع، چهار بارِ الکتریکی هم‌نام و هم‌اندازه قرار می‌دهیم. دیده می‌شود که مساحت مربع دو برابر می‌شود. بارِ هر یک از گلوله‌ها چقدر است؟



شکل ۲-۲۶: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۲-۴۱

جواب: $Q = \sqrt{\dfrac{16\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi k\epsilon_0 a^3}{2\sqrt{2}+1}} \simeq 1.56\sqrt{\pi k\epsilon_0 a^3}$

مسئله ۲-۴۲ در دو انتهای فنر سبکی با سختیِ k دو گلوله‌ی یکسان وصل شده‌اند. این سیستم بر روی یک میز افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. وقتی گلوله‌ها با بارهای الکتریکی $q_1 = +q$ و $q_2 = -q$ باردار می‌شوند، فنر به اندازه‌ی Δx فشرده می‌شود. با این اطلاعات طول آزاد فنر را حساب کنید.

جواب: $l_0 = \dfrac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 k\Delta x}} + \Delta x$

مسئله ۲-۴۳ سه گلوله‌ی کوچک به جرم $m = 10\text{g}$ همگی به نخ‌هایی با جرم ناچیز و طول یکسان $l = 1\ \text{m}$ از یک نقطه آویزان شده‌اند. این گلوله‌ها دارای بارهای الکتریکی یکسانی هستند. در اثر نیروی دافعه‌ی الکتروستاتیکی بین گلوله‌ها، آن‌ها در یک سطح افقی در رئوس مثلثی متساوی‌الاضلاعی به ضلع $a = 0.1\ \text{m}$ قرار گرفته‌اند. بارِ گلوله‌ها را پیدا کنید.

جواب: $q = \dfrac{4\pi\epsilon_0 mga^3}{3(3l^2 - a^2)}$

مسئله ۲-۴۴ دو گلوله‌ی کوچک مشابه با بارهای الکتریکی یکسان که توسط دو نخ سبکِ هم طول از دو نقطه در ارتفاع‌های یکسان آویزان شده‌اند، درونِ مایعی با ضریب گذردهی $\epsilon = 2\epsilon_0$ قرار دارند. چگالی جرمی ρ_m گلوله‌ها چقدر باشد تا زاویه‌ی بین نخ‌ها برابر با وضعیتی باشد که گلوله‌ها در خلأ آویزان شده باشند. چگالی جرمی مایع را $\rho'_m = 800\text{kg/m}^3$ بگیرید.

جواب: $\rho_m = \rho'_m\left(\dfrac{2\epsilon_0}{\epsilon - \epsilon_0}\right) = 1.6\times 10^3\ \text{kg/m}^3$

مسئله ۲-۴۵ دو گلوله‌ی کوچک با بارهای مثبت q_1 و q_2 به فاصله‌ی l از یک‌دیگر قرار دارند و در مکان خود ثابت

شده‌اند. گلوله‌ی کوچک دیگری با بارِ مثبت q را بین q_1 و q_2 روی خطِ واصلِ آن‌ها قرار می‌دهیم. مکان تعادل بار q را پیدا کنید.

جواب: به فاصله‌ی $l\dfrac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$ از بار q_1.

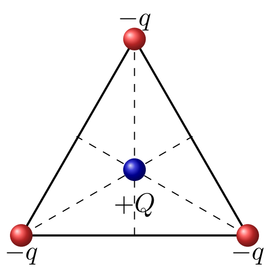
مسئله ۲-۴۶ بر روی بدنه‌ی یک پوسته‌ی استوانه‌ای به طول L و شعاع R بار $+Q$ به طور یکنواخت توزیع شده است. درونِ این پوسته، (در مرکزِ آن) یک بار نقطه‌ای $-q$ به جرم m قرار دارد. نشان دهید این بارِ نقطه‌ای در تعادل پایدار است. دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک آن را به دست آورید.

جواب: به فاصله‌ی $T = 2\pi\sqrt{m\dfrac{4\pi\epsilon_0}{qQ}(L^2+R^2)^{3/2}}$.

مسئله ۲-۴۷ در چهار گوشه‌یِ یک مربع به ضلعِ a، بارهایِ الکتریکیِ هم‌نامِ q_1, q_2, q_3, q_4 (به ترتیب) قرار دارند. اگر در مرکزِ این مربع بارِ q (هم‌نام با چهار بارِ دیگر) قرار داشته باشد، چه نیرویی به آن وارد می‌شود؟

جواب: $F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{(q_1-q_3)^2+(q_2-q_4)^2}$

مسئله ۲-۴۸ در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلعِ a، بارهایِ الکتریکیِ بارهای الکتریکی یکسان منفی $(-q)$ قرار دارند. بار الکتریکی مثبت $+Q$ را در مرکزِ این مثلث (محل تلاقی نیم‌سازهای هر یک از رئوس مثلث)، قرار می‌دهیم. بار Q چقدر باشد، تا نیروی وارد بر هر یک از بارهای $-q$ صفر باشد؟



جواب: $Q = \dfrac{q}{\sqrt{3}}$

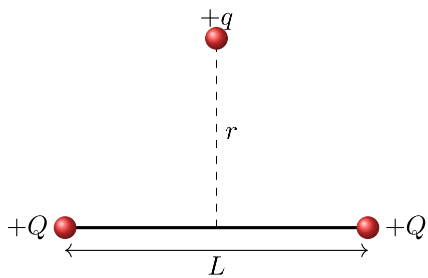
مسئله ۲-۴۹ دو بار الکتریکی آزاد $+Q$ و $+4Q$ به فاصله‌ی L از هم قرار دارند. اندازه، علامت و مکان بار سومی را به گونه‌ای تعیین کنید که سیستم در تعادل باشد.

جواب:

$q = -\dfrac{4Q}{9}$ بر روی خط وصل کننده‌ی دو بار $+Q$ و $+4Q$، به فاصله‌ی $L/3$ از بار $+Q$.

مسئله ۲-۵۰ دو بار الکتریکی مثبت $+Q$ به فاصله‌ی L از هم قرار دارند. بار آزمون $+q$ بر روی صفحه‌ی عمود

منصفِ خطِ وصل کننده‌ی آن دو بار الکتریکی قرار دارد. شعاع دایره‌ای واقع بر این صفحه‌ی عمود منصف را پیدا کنید که نیروی وارد بر بار آزمون $+q$ واقع بر این دایره بیشینه باشد. (مرکز این دایره منطبق بر نقطه‌ی وسط دو بار $+Q$ است)



جواب: $r = \dfrac{L}{2\sqrt{2}}$