فصل ۳

میدان الکتریکی

هر کمیّتی که تابعی از نقاطِ فضا (x, y, z) و زمان t باشد، یك میدان $(Field)$ نامیده می‌شود. اگر کمیّت مزبور کمیّتی نرده‌ای (اسکالر) باشد، آن را میدان نرده‌ای (اسکالر) می‌نامیم. مانند دمای یك اتاق که کمیّتی نرده‌ای و تابعی از نقاطِ فضای اتاق است. اگر کمیّت مزبور برداری باشد، آن را میدان برداری می‌نامیم. مانند میدان گرانشی در اطراف زمین.

در واقع یك میدان نرده‌ای به هر نقطه از فضای یك عدد نسبت می‌دهد و یك میدان برداری به هر نقطه از فضا یك بردار نسبت می‌دهد.

اگر یك میدان تابع زمان نباشد، آن را میدان ایستا (استاتیك) می‌نامیم.

اگر یك میدان تابع مکان نباشد، یعنی در همه‌ی نقاط فضا یك مقدار داشته باشد، (و اگر میدان برداری است جهت آن نیز در همه نقاط یکی باشد) آن را میدان یکنواخت گوییم.

در این فصل به معرفی یك میدان برداری به نام میدان الکتریکی می‌پردازیم. البته بحث خود را به میدان‌های الکتریکی ایستا (الکتروستاتیك) محدود می‌کنیم. فرض کنید بار الکتریکی Q در مبدأ مختصات قرار داشته باشد. اگر بار q را در نقطه‌ای با بردار مکانِ $\mathbf{r}$ قرار دهیم، از طرفِ Q به q نیروی الکتریکی وارد می‌شود (قانونِ کولن).

$$\mathbf{F}_q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad (۱-۳)$$

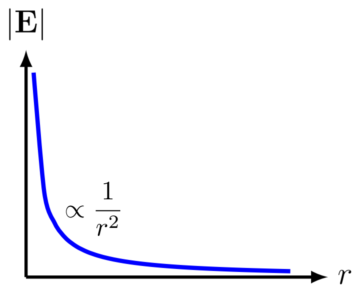
این نیرو به $\mathbf{r}$ بستگی دارد، بنابر این اگر q را در نقطه‌ای دیگر قرار دهیم، هم اندازه و هم جهتِ نیروی وارد بر آن تغییر می‌کند. از طرف دیگر اگر به جای q بارِ q' و یا هر بار دیگری را در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ قرار دهیم، به این بار نیز نیرو وارد

خواهد شد. این مطلب را می‌توان به این شکل مطرح کرد که در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ (و هر نقطه‌ی دیگری در اطرافِ Q) خاصیتی وجود دارد. این خاصیت به گونه‌ای است که هر گاه ذره‌ای باردار در آن نقطه قرار گیرد، به آن نیروی الکتریکی (با اندازه و جهت مشخص) وارد می‌شود . این خاصیت را «میدان الکتریکی» می‌نامیم. واضح است که چون نیرو بردار است، این خاصیت نیز خاصیتی برداری است و در نتیجه میدان الکتریکی یك میدان برداری است.

برای تعریفِ دقیق میدانِ الکتریکی در هر نقطه از فضا (با بردارِ مکانِ $\mathbf{r}$)، یك بارِ الکتریکیِ نقطه‌ایِ آزمون q در آن نقطه قرار می‌دهیم و میدان الکتریکی را با توجه به نیروی وارد بر q تعریف می‌کنیم:

تعریف میدانِ الکتریکی در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ (۳-۲)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$



شکل ۳-۱: نمودار تغییراتِ اندازه‌ی میدانِ الکتریکی در اطرافِ بارِ نقطه‌ای بر حسبِ فاصله از بارِ الکتریکی

البته بار q باید به اندازه کافی کوچك باشد تا از اثر احتمالی آن بر میدان مورد سوال اجتناب شود. بدین ترتیب میدان الکتریکی در فضایِ اطرافِ بارِ نقطه‌ای Q به شکل زیر است:

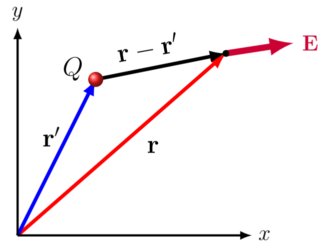
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{۳-۳}$$

نمودارِ $|\mathbf{E}|$ بر حسبِ r در شکل ۳-۱ رسم شده است.

اگر بارِ Q در مبدأ مختصات نباشد، بلکه در نقطه‌ی $\mathbf{r}'$ قرار گرفته باشد (شکل ۳-۲)، در این صورت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{۳-۴}$$

نقطه‌ی $\mathbf{r}'$ (که بارِ Q در آن قرار دارد)، نقطه‌ی چشمه و نقطه‌ی $\mathbf{r}$ نقطه‌ی میدان نامیده می‌شود. اگر N بار



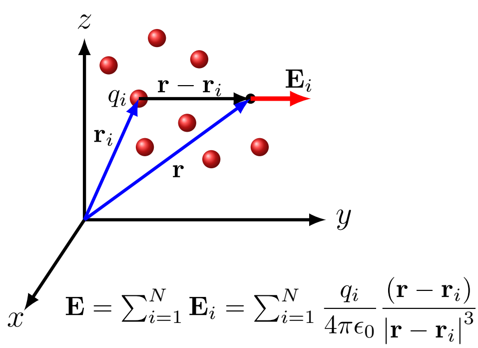
شکل ۳-۲: بار Q در مکان $\mathbf{r}'$ قرار دارد. بردار مکانِ نقطه‌ی میدان، $\mathbf{r}$ است. جهتِ میدان، با فرضِ مثبت بودنِ Q رسم شده است.

نقطه‌ایِ $q_1, q_2 \cdots, q_N$ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N$ داشته باشیم، میدان الکتریکیِ ناشی از هر یك از بارها، مثلاً بارِ iام در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ به شکل زیر است:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \qquad (۳\text{-}۵)$$

و میدانِ الکتریکیِ کل در نقطه‌ی $\mathbf{r}$، «طبقِ اصلِ برهم‌نهی» برابر با جمعِ برداریِ هر یك از این میدان‌هاست:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \qquad (۳\text{-}۶)$$



شکل ۳-۳: میدان الکتریکی ناشی از چند بار نقطه‌ای

۳-۱ میدان الکتریکی ناشی از یك توزیع پیوسته‌ی بار

هر گاه یك توزیع پیوسته‌ی بارِ الکتریکی داشته باشیم و بخواهیم میدان الکتریکیِ ناشی از آن را محاسبه کنیم، مانند آن چه که در فصلِ قبل در مورد قانون کولن برای توزیع‌های پیوسته گفتیم، می‌توان آن را به شکلِ مجموعه‌ای از dqهای بسیار کوچك (که هر یك نقش بارِ نقطه‌ای را ایفا می کنند)، در نظر گرفت. اگر $\mathbf{r}'$ بردارِ مکانِ عنصرِ بارِ dq باشد، میدان ناشی از آن در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ برابر است با:

$$d\mathbf{E} = \frac{dq(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (۳-۷)$$

و طبق اصل بر هم نهی، میدان کل برابر با مجموع برداریِ میدان‌های ناشی از همه‌ی dqهاست. در این جا چون بار پیوسته است، این مجموع به انتگرال تبدیل می شود:

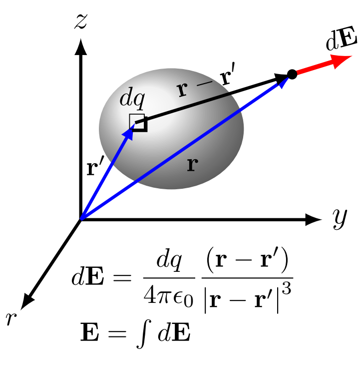
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dq\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (۳-۸)$$

در انتگرال فوق $\mathbf{r}$ ثابت است و $\mathbf{r}'$ متغیرِ انتگرال‌گیری است.

اگر توزیع بار حجمی باشد آن‌گاه: $dq = \rho(\mathbf{r}')dv'$

اگر توزیعِ بار سطحی باشد آن‌گاه: $dq = \sigma(\mathbf{r}')da'$

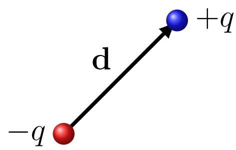
اگر توزیعِ بار خطی باشد آن‌گاه: $dq = \lambda(\mathbf{r}')dl'$



شکل ۳-۴: میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار پیوسته

۳-۲ دو قطبی الکتریکی

هر بار نقطه‌ای (مثبت یا منفی) یك تك‌قطبیِ الکتریکی نامیده می‌شود. اگر دو بارِ الکتریکیِ هم اندازه، ولی با علامتِ مخالف، در مجاورتِ هم قرار داشته باشند، مجموعه را یك «دوقطبی» الکتریکی می‌نامیم. اگر فاصله‌ی بارها بسیار کوچك باشد، یعنی بارها بسیار به هم نزدیك باشند، آن را دوقطبیِ نقطه‌ای می‌نامیم.



شکل ۳-۵: دوقطبی الکتریکی

اهمیتِ دوقطبی‌ها در این است که اگر چه بار خالص آن‌ها صفر است اما در اطرافِ خود میدان الکتریکی دارند. برخی از مولکول‌ها مانند آب متقارن نیستند. به عبارتِ دیگر مرکزِ اثرِ بارهای منفی و مثبت آن‌ها بر هم منطبق نیست. بنابر این یك دوقطبیِ نقطه‌ای تشکیل می‌دهند. بدین ترتیب مطالعه‌ی دوقطبی‌ها و اثرات آن‌ها در مطالعه‌ی مولکول‌ها و برهم‌کنشِ آن‌ها مفید خواهد بود.

میدانِ الکتریکیِ ناشی از دوقطبی را در مسائل بررسی می‌کنیم.

اگر در یك دوقطبیِ الکتریکی، بردارِ مکانِ نسبیِ دو بار $+q$ و $-q$ را با $\mathbf{d}$ نمایش دهیم، که جهتِ $\mathbf{d}$ از بارِ منفی به بارِ مثبت باشد، کمیتی به نامِ گشتاورِ دوقطبیِ الکتریکی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \qquad \mathrm{C.m} \qquad \text{کولن-متر} \tag{۳-۹}$$

البته در حالتِ کلی گشتاورِ دوقطبیِ الکتریکی برای مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{p} = q_1\mathbf{r}_1 + q_2\mathbf{r}_2 + q_3\mathbf{r}_3 + \cdots = \sum_i q_i\mathbf{r}_i \tag{۳-۱۰}$$

که در آن $\mathbf{r}_i$ها بردارهای مکانِ هر یك از بارها هستند. هم‌چنین گشتاور دوقطبی الکتریکی یك توزیعِ بارِ پیوسته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\,dq \tag{۳-۱۱}$$

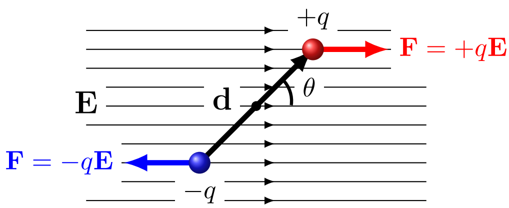
تحقیق کنید که رابطه‌ی (۳-۱۰) برای یک دوقطبی الکتریکی (شکل ۳-۵) به رابطه‌ی (۳-۹) تبدیل می‌شود.

۳-۳ دو قطبی در میدان الکتریکی یکنواخت

فرض کنید یک دوقطبیِ الکتریکی را در میدانِ الکتریکیِ یکنواخت قرار داده‌ایم. همان‌طور که در شکلِ ۳-۶ پیداست، به دوقطبی نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ وارد می شود که $\mathbf{F}_1$ در جهت میدان، بر بار مثبت و $\mathbf{F}_2$ در خلاف جهتِ میدان، بر بار منفی وارد می‌شود. چون میدان یکنواخت است و اندازه‌ی بارها برابراند، اندازه‌ی این دو نیرو یکی است و در نتیجه برآیندِ آن‌ها صفر می‌شود. یعنی هیچ نیروی خالصی به دوقطبی وارد نمی‌شود.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = q\mathbf{E} - q\mathbf{E} = 0$$

(توجه کنید که اگر میدان الکتریکی یکنواخت نباشد نیروی خالص وارد بر دوقطبی الکتریکی صفر نیست.)



شکل ۳-۶: دوقطبیِ الکتریکی در میدانِ الکتریکیِ یکنواخت

اما این دو نیرو یك زوج نیرو تشکیل می‌دهند و گشتاورِ نیرو ایجاد می‌کنند. گشتاورِ نیرویِ حاصل از این زوج نیرو از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (۱۲-۳)$$

و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$\tau = pE\sin\theta \qquad (۱۳-۳)$$

θ زاویه‌ی بین بردار $\mathbf{p}$ و میدان الکتریکی است.

بدین ترتیب اگر بخواهیم دوقطبی را به اندازه‌ی زاویه‌ی $\Delta\theta$ در میدان الکتریکی بچرخانیم، بایستی کار انجام دهیم. این کار برابر با تغییرِ انرژی پتانسیلِ سیستم است. اگر دو قطبی را از زاویه‌ی θ_0 تا θ بچرخانیم، تغییرِ انرژی پتانسیلِ

سیستم عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
U(\theta) - U(\theta_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta' \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin\theta' d\theta' \\
&= -pE\cos\theta + pE\cos\theta_0
\end{aligned}
\tag{۳-۱۴}
$$

اگر θ_0 را به عنوان مرجعِ انرژی پتانسیل در نظر بگیریم و آن را برابر با $\theta_0 = \pi/2$ اختیار کنیم، (پتانسیل این نقطه را صفر انتخاب می‌کنیم یعنی $U(\pi/2) = 0$) آن‌گاه

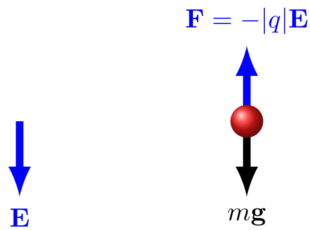
$$
U(\theta) = -pE\cos\theta = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \tag{۳-۱۵}
$$

مسائل فصل ۳

مسئله ۳-۱ اندازه و علامتِ بارِ الکتریکی به جرمِ $m = 2\,\mathrm{g}$ را طوری مشخص کنید که این جسم در فضای آزمایشگاه، در میدان الکتریکیِ رو به پایین $E = 5000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ معلق بماند.

حل:

نیروی الکتریکی وارد بر ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ برابر است با $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. برای آن‌که ذره در فضا معلق بماند این نیرو بایستی از لحاظ اندازه با وزن ذره برابر باشد و جهت آن رو به بالا اما چون نیروی الکتریکی به سمت پایین است پس باید بار q منفی باشد ($q = -|q|$) تا نیروی الکتریکی بر خلاف جهت نیروی وزن باشد.

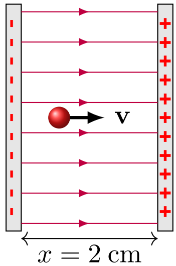


$$
\begin{aligned}
&mg = |q|E \\
&|q| = \frac{mg}{E} = \frac{(2\times 10^{-3}\mathrm{kg})\times 9.8\mathrm{m/s^2}}{5000} = 3.92\times 10^{-6}\mathrm{C} \\
&q = -|q| = -3.92\mu\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

مسئله ۳-۲ در فضای بین دو ورقه‌ی باردار با بارهای مخالف، میدانِ الکتریکیِ یکنواختی وجود دارد. الکترونی که در ابتدا ساکن است از ورقه منفی جدا شده و به ورقه مثبت، که در فاصله‌ی $2\mathrm{cm}$ واقع است، برخورد می‌کند. زمان طیِ مسیر برابر با $1.5\times 10^{-8}\mathrm{s}$ است.

الف) شدت میدان الکتریکیِ بینِ صفحات را محاسبه کنید.

ب) سرعت الکترون را در لحظه‌ی برخورد به ورقه‌ی دوم پیدا کنید.



حل:

الف) با توجه به یکنواخت بودنِ میدانِ الکتریکی، نیروی وارد بر الکترون $F = eE$ و در نتیجه شتاب آن، ثابت است. بنابراین با داشتن زمان فاصله طی شده و استفاده از روابط مربوط به حرکت با شتاب ثابت، می‌توان شتاب را پیدا کرد:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{(2)(2 \times 10^{-2}\text{m})}{(1.5 \times 10^{-8}\text{s})^2}$$
$$a = 1.8 \times 10^{14}\text{m/s}^2$$
$$F = ma = (9.11 \times 10^{-31}\text{kg})(1.5 \times 10^{-8}\text{m/s}^2) = 1.62 \times 10^{-16}\text{N}$$

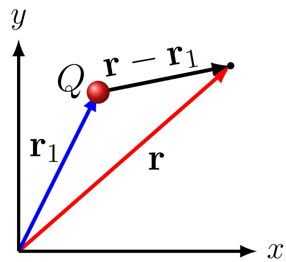
از سوی دیگر $F = eE$ بنابراین :

$$E = \frac{F}{e} = \frac{1.62 \times 10^{-16}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.01 \times 10^3\text{N/C}$$

ب)

$$v = at$$
$$= (1.8 \times 10^{14})(1.5 \times 10^{-8}) = 2.7 \times 10^6\text{m/s}$$

مسئله ۳-۳ بارِ Q در نقطه‌ی (x_1, y_1, z_1) قرار دارد. رابطه‌ای برای میدان الکتریکی ناشی از این بار را در نقطه‌ی (x, y, z) بر حسب مختصات دکارتی بنویسید. اگر Q در مبدا مختصات باشد، میدانِ الکتریکی را در نقطه‌ی (x, y, z) بنویسید.



حل:

بردار مکان بار Q به صورت زیر است:

$$\mathbf{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

و بردار مکان نقطه‌ی مشاهده به صورت زیر است:

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

بنابراین طبق رابطه‌ی (۳-۴)

میدان الکتریکی در نقطه (x, y, z) برابر است با:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

اگر بار Q در مبدا مختصات باشد آن گاه $\mathbf{r_1} = 0$ در نتیجه:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x)\hat{i}+(y)\hat{j}+(z)\hat{k}}{\left[(x)^2+(y)^2+(z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

مسئله ۳-۴ بار نقطه‌ای $q_1 = 25 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ در مبدأ مختصات و بار نقطه‌ای $q_2 = -25 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ در نقطه‌ای با مختصات $x = 6\mathrm{m}$ و $y = z = 0$ قرار دارند. اندازه و جهت میدان الکتریکی حاصل از این دو بار الکتریکی را در نقاطِ الف) $(3\mathrm{m}, 0, 0)$ و ب) $(3\mathrm{m}, 4\mathrm{m}, 0)$ پیدا کنید.

حل:

الف) بردار مکان نقطه‌ی میدان $\mathbf{r} = 3\hat{\imath}$ بر حسب متر و بردار مکان نقاط چشمه $\mathbf{r_1} = 0$ و $\mathbf{r_2} = 6\hat{\imath}$ است. میدان ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ به ترتیب برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathbf{E_1} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r_1}-\mathbf{r}}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r}|^3}\\ &= (9\times 10^9)(25\times 10^{-9})\frac{3\hat{\imath}}{27}\\ &= 25\hat{\imath}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E_2} &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r_2}-\mathbf{r}}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}|^3}\\ &= (9\times 10^9)(-25\times 10^{-9})\frac{-3\hat{\imath}}{27}\\ &= 25\hat{\imath}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

و طبق اصل بر هم نهی، میدان کل برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}\\ &= 50\hat{\imath}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

ب) در این حالت بردار مکان نقطه‌ی میدان $\mathbf{r} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ (بر حسب متر) است. میدان ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ به ترتیب برابر است با:

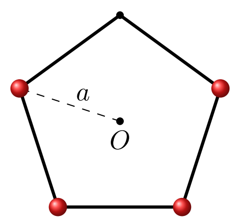
$$\begin{aligned}\mathbf{E_1} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r_1}-\mathbf{r}}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r}|^3}\\ &= (9\times 10^9)(25\times 10^{-9})\frac{3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}}{125}\\ &= \frac{27\hat{\imath}+36\hat{\jmath}}{5}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{E_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r_2}-\mathbf{r}}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}|^3}$$
$$= (9\times 10^9)(-25\times 10^{-9})\frac{-3\hat{i}+4\hat{j}}{125}$$
$$= \frac{27\hat{i}-36\hat{j}}{5}\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

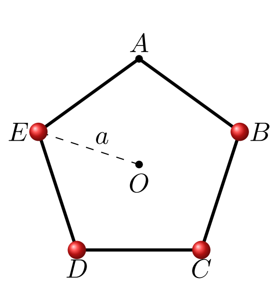
و طبق اصل بر هم نهی، میدان کل برابر است با:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1}+\mathbf{E_2}$$
$$= \frac{54}{5}\hat{i}\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

مسئله ۳-۵ در چهار رأس یک پنج‌ضلعی منظم، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای یکسان مثبت q قرار دارد. فاصله‌ی هر یک از بارها تا مرکز پنج‌ضلعی برابر با a است. میدان الکتریکی را در مرکز پنج‌ضلعی محاسبه کنید.



حل: رئوس پنج‌ضلعی را مطابق شکل زیر از A تا E نام‌گذاری کرده‌ایم. در رأس A باری قرار ندارد.



اگر در رأس A هم یک بار الکتریکی مشابه قرار داشت، با توجه به تقارن مسئله واضح است که میدان الکتریکی ناشی از این پنج بار الکتریکی در مرکز پنج‌ضلعی، مساوی صفر می‌بود. بنابر این می‌توان گفت که پاسخ مسئله، یعنی میدان

الکتریکی ناشی از چهار بار الکتریکی واقع در نقاطِ B, C, D, E در مرکز پنج‌ضلعی از لحاظ اندازه برابر با میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی واقع در نقطه‌ی A است و البته در جهتِ مختلف آن. به راحتی می توان دید که میدان ناشی از بار الکتریکی واقع در نقطه‌ی A برابر است با $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ و جهت آن هم جهت با بردارِ $\overrightarrow{AO}$ است. بنابر این میدانِ الکتریکی ناشی از چهار بار الکتریکی واقه در نقاطِ B, C, D, E در مرکز پنج‌ضلعی برابر با $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ و در جهت بردارِ $\overrightarrow{OA}$ است.

مسئله ۳-۶ سه بار نقطه ای q_1, q_2, q_3 به ترتیب در نقاط $(0,0,0), (3,0,0), (6,0,0)$ قرار دارند.(فواصل بر حسب متر هستند) بار q_1 برابر با $16 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ ، بار q_3 برابر با $16 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ و بار q_2 مجهول است. اگر شدت میدان الکتریکی در نقطه $(8,0,0)$ برابر با $20.25\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ و جهت آن به سمت مثبت محور x باشد، اندازه و علامت بار q_2 را پیدا کنید.

حل:

میدان الکتریکی ناشی از بار های q_1 ، q_2 و q_3 در هر نقطه $\mathbf{r}$ عبارت است از:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_1}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_2}|^3} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_3}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_3}|^3}$$

اما در این مسئله داریم:
$\mathbf{r_1} = 0$ ، $\mathbf{r_2} = 3\hat{i}$ ، $\mathbf{r_3} = 6\hat{i}$ ، $\mathbf{r} = 8\hat{i}$ و $\mathbf{E} = 20.25\hat{i}$ بنابر این:

$$\begin{aligned} 20.25\hat{i} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{8\hat{i}}{8^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{5\hat{i}}{5^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\hat{i}}{2^{\frac{3}{2}}} \\ &= \hat{i}(9\times 10^9)\left[\frac{16\times 10^{-9}}{\sqrt{8}} + \frac{q_2}{\sqrt{5}} + \frac{12\times 10^{-9}}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\frac{q_2}{\sqrt{5}} = \left(\frac{20.25}{9\times 10^9}\right) - \left(\frac{16\times 10^{-9}}{\sqrt{8}}\right) - \left(\frac{12\times 10^{-9}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$q_2 = -27\times 10^{-9}\ \mathrm{C}$$

مسئله ۳-۷ میدان الکتریکی ناشی از بارهای $q_1 = 3\mu\mathrm{C}$ و $q_2 = -5\mu\mathrm{C}$ را در نقطه $(0,0,3)$ بیابید. بار q_1 در نقطه $(4,0,0)$ و بار q_2 در نقطه $(0,4,0)$ قرار دارند.

حل:

با توجه به نتیجه مسئله ۳-۳ میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mathbf{E_1} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-x_1)\hat{\imath}+(y-y_1)\hat{\jmath}+(z-z_1)\hat{k}}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\\ &= (9\times 10^9)(3\times 10^{-6})\frac{-4\hat{\imath}+3\hat{k}}{[4^2+3^2]^{\frac{3}{2}}}\\ &= -864\hat{\imath}+648\hat{k}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

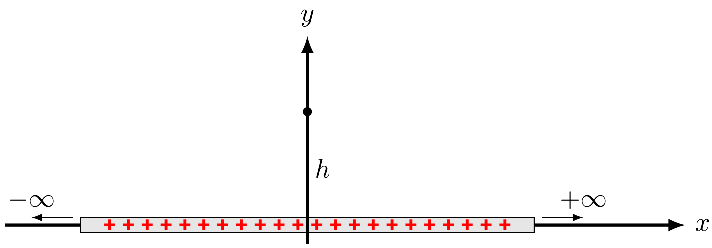
و میدان ناشی از بار q_2 عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mathbf{E_2} &= (9\times 10^9)(-5\times 10^{-6})\frac{-4\hat{\jmath}+3\hat{k}}{125}\\ &= 1440\hat{\jmath}-108\hat{k}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

و میدان الکتریکی کل طبق اصل بر هم نهی برابر است با:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1}+\mathbf{E_2} = -864\hat{\imath}+2088\hat{\jmath}-1080\hat{k}$$

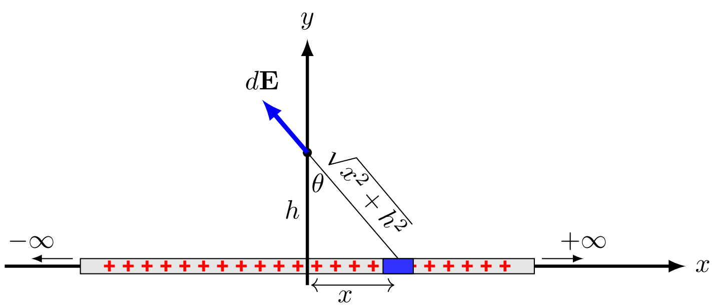
مسئله ۳-۸ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت λ بر روی محور x گسترده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی محور y به فاصله h از مبدأ پیدا کنید.



شکل ۳-۷: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۳-۸

حل:

مطابق شکل عنصر کوچک dx را با بار الکتریکی $dq = \lambda dx$ بر روی محور x در نظر می‌گیریم.



شکل ۳-۸: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۳-۸

بردار مکان این عنصر بار (چشمه) عبارت است از: $\mathbf{r}' = x\hat{\mathbf{i}}$ و بردار مکان نقطه میدان عبارت است از: $\mathbf{r} = h\hat{\mathbf{j}}$ بدین ترتیب میدان الکتریکی ناشی از dq در نقطه مزبور برابر است از:

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x\hat{\mathbf{i}} + h\hat{\mathbf{j}}}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

و میدان الکتریکی کل برابر است با:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[-\hat{\mathbf{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} + \hat{\mathbf{j}} h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right]$$

(توجه کنید که λ ثابت است.) در انتگرال اول، تابع درون انتگرال فرد است و انتگرال‌گیری بر روی بازه‌ی متقارن گرفته می‌شود. بنابر این حاصل انتگرال اول صفر است (از تقارن هندسی مسئله نیز این نتیجه حاصل می‌شود) برای حل

انتگرال دوم از تغییر متغیر $x = h\tan\theta$ استفاده کنید (θ در شکل مشخص شده است). در نتیجه:

$$\int \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{(x^2+h^2)}}$$

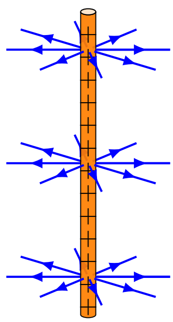
(این انتگرال در مسئله‌ی ۲ - ۲۰ محاسبه شده است) و نهایتا:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{j}}\frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{h^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \hat{\mathbf{j}}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، میدانِ الکتریکی هم جهت با محور y به دست آمد. این به خاطر انتخاب دستگاه مختصات است. در واقع میدان الکتریکی ناشی از یک خطِ بارِ نامتناهی، شعاعی و عمود بر خطِ بار است. یعنی به طور کلی میدان الکتریکی در فاصله‌ی r از خط بار نامتناهی برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردارِ یکه‌ی شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای است.



روش دوم: اگر نخواهید از شکل برداری استفاده کنید، می‌توانید به شکل زیر عمل کنید:
اندازه میدانی که عنصر dq ایجاد می‌کند برابر است با $dE = \dfrac{dq}{4\pi\epsilon_0(x^2+h^2)}$ و مولفه‌های x و yیِ بردار $d\mathbf{E}$

برابرند با:

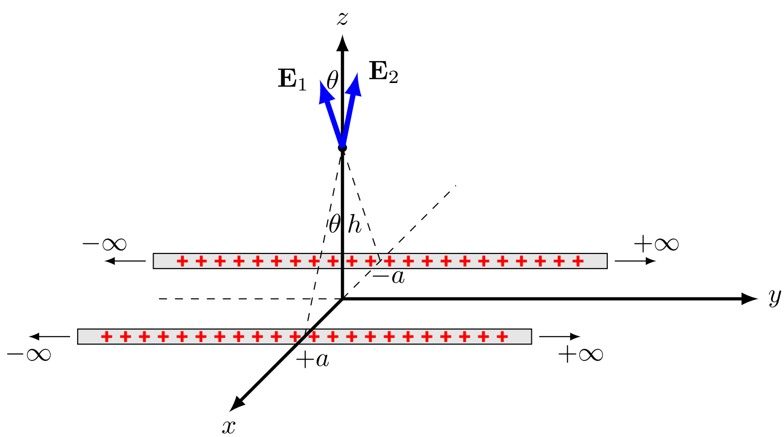
$$
\begin{aligned}
dE_x &= dE\sin\theta \\
dE_y &= dE\cos\theta \\
E_x &= \int dE_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2+h^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \\
E_y &= \int dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}
\end{aligned}
$$

انتگرال اول صفر می‌شود و بنابراین میدان الکتریکی فقط مولفه y دارد با محاسبه انتگرال دوم داریم:

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

مسئله ۳-۹ دو خط بار نامتناهی با چگالی یکنواخت مثبت λ در صفحه xy موازی محور yاند به گونه‌ای که یکی از آن‌ها در $x=a$ و دیگری در $x=-a$ قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی را در روی محور z به فاصله h از مبدأ پیدا کنید

حل: برای حل این مسئله از نتیجه‌ی مسئله‌ی ۳-۸ استفاده می‌کنیم. در شکل، وضعیت هندسی مسئله نشان داده



شکل ۳-۹: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۳-۹

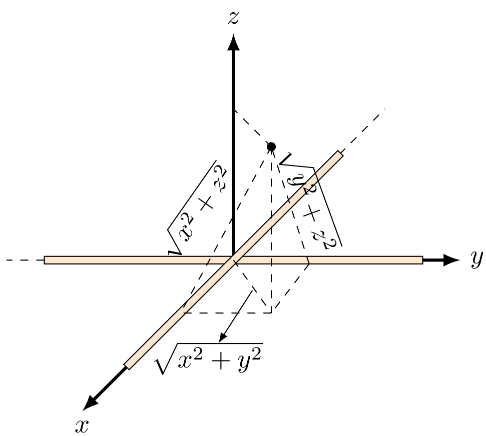
شده است. فاصله هر یک از میله‌ها تا نقطه‌ی میدان بر روی محور z برابر است با $\sqrt{a^2+h^2}$ بنابراین با توجه به مسئله‌ی قبل می‌توان نوشت:

$$E_1 = E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+h^2}}$$

اما هر یک از دو میدان الکتریکی با محور z زاویه‌ی θ می‌سازند. بنابراین مولفه‌های افقی آن‌ها (موازی محور x) هم‌دیگر را خنثی می‌کنند و مولفه‌های z با هم جمع می‌شوند. پس:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} &= 2E_1 \cos\theta \hat{\mathbf{k}} \\
&= 2\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+h^2}} \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0(a^2+h^2)}\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

مسئله ۳-۱۰ دو خط بار بی نهایت با چگالی یکنواخت مثبت λ یکی در روی محور x و دیگری بر روی محور y قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات (x, y, z) پیدا کنید.



شکل ۳-۱۰: شکلِ مربوط به مسئله‌ی ۳-۱۰

حل:

با توجه به نتیجه مسئله‌ی ۳-۸ می‌دانیم راستای میدان الکتریکی ناشی از یك خط بار بی نهایت بر راستای خط بار عمود است و اندازه‌ی آن به فاصله‌ی عمودی آن نقطه تا خطِ بار بستگی دارد. فاصله هر نقطه (x,y,z) تا محور z برابر با $\sqrt{x^2+y^2}$ است. فاصله‌ی هر نقطه (x,y,z) تا محور x برابر با $\sqrt{z^2+y^2}$ است. و فاصله‌ی هر نقطه (x,y,z) تا محور y برابر با $\sqrt{z^2+x^2}$ است. در نقطه‌ی (x,y,z) بردارِ یکه‌ی عمود بر محور x به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{u}_1 = \frac{y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

و بردار یکه‌ی عمود بر محور y، در نقطه‌ی (x,y,z) برابر است با

$$\hat{u}_2 = \frac{x\hat{i}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

بدین ترتیب میدان الکتریکی ناشی از خط بار روی محور x عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_1} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1}\hat{u}_1 \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{y^2+z^2}}\frac{y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{y^2+z^2}} \\
&= \frac{\lambda y\hat{j}+z\hat{k}}{2\pi\epsilon_0(y^2+z^2)}
\end{aligned}$$

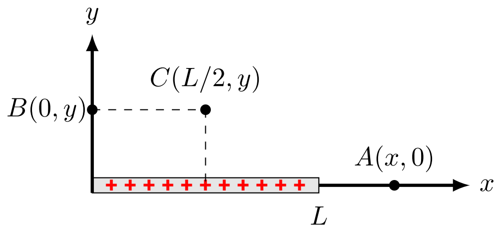
و میدان ناشی از خط بار روی محور y عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_2} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2}\hat{u}_2 \\
&= \frac{\lambda x\hat{i}+z\hat{k}}{2\pi\epsilon_0(x^2+z^2)}
\end{aligned}$$

و میدان کل از بر هم نهی این دو میدان به دست می‌آید:

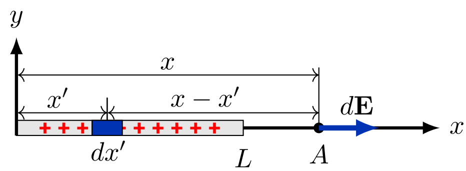
$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E_1}+\mathbf{E_2} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{x}{x^2+z^2}\hat{i}+\frac{y}{y^2+z^2}\hat{j}+(\frac{z}{y^2+z^2}+\frac{z}{x^2+z^2})\hat{k}\right]
\end{aligned}$$

مسئله ۳-۱۱ در شکل زیر بار الکتریکی $+Q$ به طور یکنواخت بر روی میله نازك شیشه‌ای به طول L توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقاط A, B, C پیدا کنید.



حل:

الف) میدان در نقطه‌ی A:



عنصرِ کوچكِ dx' را با بار الکتریکیِ $dq = \lambda dx'$ در نظر می‌گیریم. چون توزیع بار، یکنواخت است: $\lambda = \dfrac{Q}{L}$ پس $dq = \dfrac{Q}{L}dx'$. میدان الکتریکی ناشی از این بار کوچك، در نقطه‌ی A، برابر است با:

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x-x')^2}\hat{i}$$

بنابر این

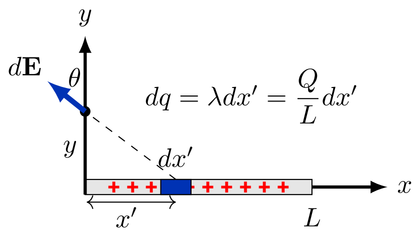
$$\mathbf{E} = \int d\vec{E} = \hat{i}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} = \hat{i}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{x-x'}\Big|_0^L$$

$$\mathbf{E}_A = \hat{i}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)$$

ب) میدان در نقطه‌ی B:

میدان ناشی از بار $dq = \dfrac{Q}{L}dx'$ برابر است با :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{y^2+x'^2}}$$



میدان الکتریکی $\mathbf{E}$، طبق اصل برهم‌نهی، با انتگرال‌گیری از $d\mathbf{E}$ به دست می‌آید:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$$

و مؤلفه‌های میدان برابرند با

$$E_x = \int dE_x = -\int dE \sin\theta$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE \cos\theta$$

اما

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x'^2}} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{x'}{\sqrt{y^2 + x'^2}}$$

بنابراین:

$$E_x = -\int_0^L \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{x' dx'}{(y^2 + x'2)^{3/2}}$$
$$E_y = -\int_0^L \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{y dx'}{(y^2 + x'^2)^{3/2}}$$

برای محاسبه انتگرال اول تغییر متغیر $u^2 = y^2 + x'^2$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $2udu = 2x'dx'$ و یا $udu = x'dx'$ بنابراین:

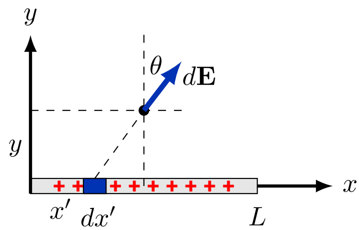
$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \int \frac{udu}{u^3} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(-\frac{1}{u}\right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2 + x'^2}}\right]_0^L = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2 + L^2}} - \frac{1}{y}\right]$$

برای محاسبه انتگرال دوم تغییر متغیر $x' = y\tan\theta$ را انجام می دهیم:
(θ در شکل نشان داده شده است) $dx' = y(1+\tan^2\theta)d\theta$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0 L}\int \frac{yd\theta}{y^3(1+\tan^2\theta)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 Ly}\int \cos\theta \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 Ly}\frac{x'}{\sqrt{y^2+x'^2}}\Bigg|_0^L \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y\sqrt{y^2+x'^2}} \end{aligned}$$

$$E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+L^2}} - \frac{1}{y}\right]\hat{i} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y\sqrt{y^2+x'^2}}\hat{j}$$

ج) میدان در نقطه‌ی C:



درست مانند قسمت (ب) عمل می‌کنیم با این تفاوت که فاصله‌ی dq تا نقطه‌ی C برابر با $\sqrt{y^2+(x'-L/2)^2}$ است.

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^L \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{x'dx'}{\left[y^2+(x'-L/2)^2\right]^{3/2}} = 0 \\ E_y &= \int_0^L \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{ydx'}{\left[y^2+(x'-L/2)^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

انتگرال اول صفر می‌شود. اگر محورِ y را عمود منصف میله انتخاب می‌کردیم، تقارن مسئله به طور واضح‌تر، صفر بودنِ مولفه‌ی x میدان الکتریکی را نشان می‌داد.

برای محاسبه‌ی انتگرال دوم نیز، با تغییر متغیرِ $x' = y\tan\theta + \frac{L}{2}$ مانند مسئله‌ی قبل عمل می‌کنیم

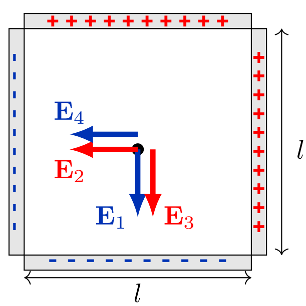
$$|\mathbf{E}| = E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L y}\left[\frac{x'}{\sqrt{y^2 + (x' - L/2)^2}}\right]_0^L$$
$$|\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y\sqrt{y^2 + L^2/4}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 y\sqrt{4y^2 + L^2}}$$

در این حالت، میدان الکتریکی در جهتِ عمود بر میله است.
این رابطه بیان‌گر میدان الکتریکی ناشی از یك میله‌ی باردار یکنواخت به طول L بر روی عمود منصف میله، در فاصله‌ی y از میله است.

مسئله ۳-۱۲ چهار میله‌ی شیشه‌ای بسیار نازك به طول‌های برابر l، هر یك دارای چگالی بار یکنواخت λ هستند. دو تا از شیشه ها بار مثبت و دو تای دیگر بار منفی دارند. اگر این چهار میله مطابق شکل یك مربع تشکیل دهند، میدان الکتریکی را در مرکز مربع پیدا کنید.

حل: در این جا چهار میله‌ی باردار به طول l داریم. مرکز مربع، بر روی عمود منصف هر یک از میله‌ها و به فاصله‌ی $\frac{l}{2}$ از آن‌هاست. طبق مسئله‌ی قبل اندازه‌ی هر یك از میدان‌ها برابر است با :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \frac{l}{2}\sqrt{2l^2}} = \frac{Q\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 l^2}$$



جهتِ این میدان‌ها مطابق شکل است.

برآیند میدان‌ها در راستای افقی برابر است با

$$E_x = -E_2 - E_4 = -\frac{Q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 l^2}$$

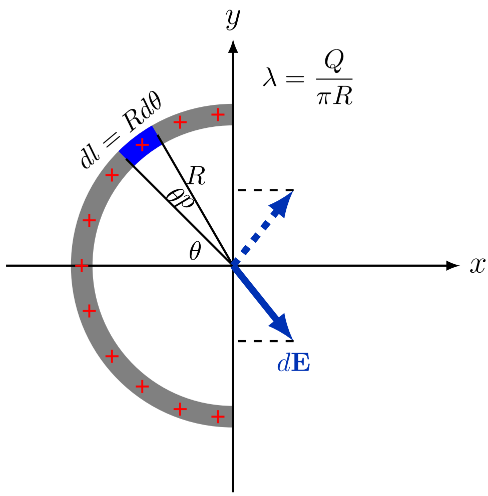
و در راستای عمودی

$$E_y = E_1 + E_3 = \frac{Q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 l^2}$$

بنابراین اندازه‌ی میدانِ برآیند برابر است با:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{2Q}{\pi\epsilon_0 l^2}$$

مسئله ۳-۱۳ بار $+Q$ به طور یکنواخت بر یك میله‌ی شیشه‌ای به شکلِ نیم دایره، به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی در مرکز نیم دایره چقدر است؟



حل:

عنصر $dl = Rd\theta$ را با بارِ الکتریکیِ $dq = \lambda R d\theta$ بر روی میله در نظر می‌گیریم. میدانِ الکتریکیِ ناشی از این

عنصر، در مرکز نیم دایره، برابر است با

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

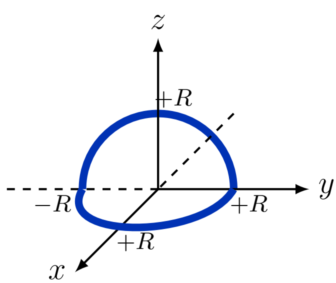
با توجه به تقارن مسئله، واضح است که $E_y = \int dE_y = 0$ یعنی میدان الکتریکی تنها مؤلفه‌ی x دارد:

$$\begin{aligned} E = E_x &= \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

اما چون توزیع بار یکنواخت است، می‌توان نوشت $\lambda = \dfrac{Q}{\pi R}$ بنابراین

$$E = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

مسئله ۳-۱۴ بارهای $+Q_1$ و $+Q_2$ بر روی دو نیم حلقه به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. این نیم حلقه‌ها مطابق شکل در دو صفحه‌ی عمود بر هم قرار دارند. میدان الکتریکی را در مبدا مختصات پیدا کنید.



حل:

این مسئله را با استفاده از نتیجه مسئله‌ی (۳-۱۳) حل می‌کنیم. میدان الکتریکی ناشی از نیم دایره‌ی واقع بر

صفحه‌ی yz برابر است با

$$\mathbf{E_1} = \frac{Q_1}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}(-\hat{k})$$

و میدان ناشی از نیم دایره‌ی واقع بر صفحه‌ی xy برابر است با

$$\mathbf{E_2} = \frac{Q_2}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}(-\hat{i})$$

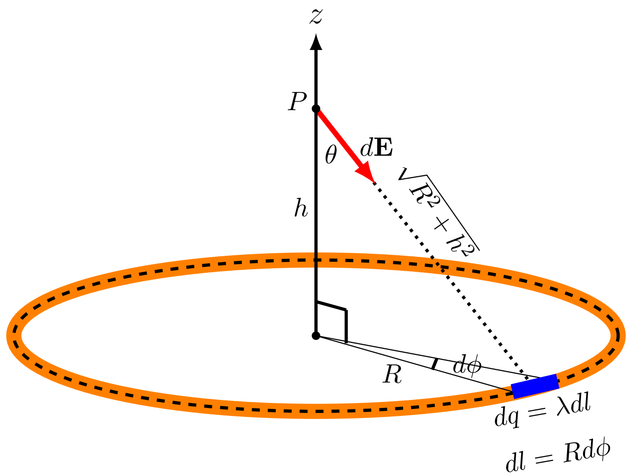
و میدانِ الکتریکیِ برآیند برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}\\ &= \frac{-1}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}(Q_2\hat{i} + Q_1\hat{k})\end{aligned}$$

اگر هر کدام از بارها منفی باشند تنها تغییری که ایجاد می‌شود این است که جهت میدان الکتریکی ناشی از آن، عکس خواهد شد. مسئله را برای وقتی که یکی از بارها یا هر دوی آن ها منفی باشند، حل کنید.

مسئله ۳-۱۵ یک میله‌ی شیشه‌ای نازک به شکل دایره، به شعاع R دارای بار یکنواخت $-Q$ است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی محور آن به فاصله‌ی z از مرکز دایره، به دست آورید.

حل:



شکل ۳-۱۱: شکل مربوط به مسئله‌ی ۳-۱۵

مطابق شکل عنصر کوچک $dl = Rd\phi$ را با بار الکتریکی $dq = \lambda dl$ در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی ناشی از آن در نقطه‌ی P عبارت است از :

$$dE = \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+h^2}}$$

از تقارن مسئله واضح است که میدان الکتریکیِ کل، تنها در راستای محورِ z مؤلفه دارد. اما آموزنده است که این مطلب را بررسی کنیم. مؤلفه‌های x, y, z میدان الکتریکی برابرند با :

$$E_x = \int dE \sin\theta \cos\phi$$
$$E_y = \int dE \sin\theta \sin\phi$$
$$E_z = \int dE \cos\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi = 0$$
$$E_y = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\phi d\phi = 0$$
$$E_z = \frac{\lambda Rz}{4\pi\epsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda 2\pi Rz}{4\pi\epsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}$$

اما $\lambda = -\frac{Q}{2\pi R}$ و یا $2\pi R\lambda = -Q$ پس:

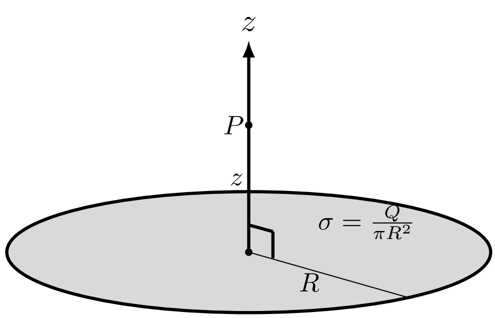
$$E = E_z = -\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}$$

بنابراین بردار میدان الکتریکی عبارت است از :

$$\mathbf{E} = -\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{k}$$

واضح است که اگر با روی مثبت بود این میدان در جهت مثبت محور z می‌بود. دقت کنید که صفر شدن E_x و E_y به سبب ثابت بودن λ است اگر λ متغیر باشد (تابعی از زاویه‌ی ϕ باشد)، لزوماً E_x و E_y صفر نخواهند شد.

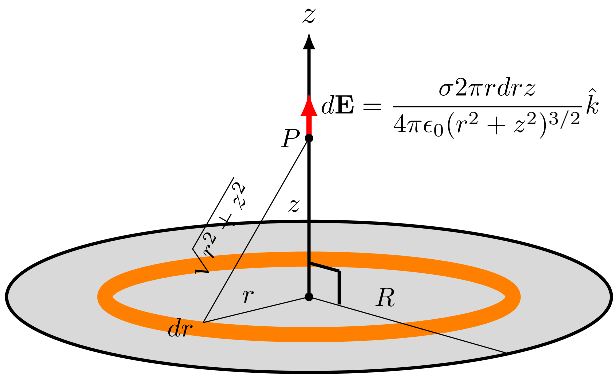
مسئله ۳-۱۶ بر روی سطح یك قرص دایره‌ایِ کاغذی به شعاع R بارِ الکتریکی Q به طور یکنواخت پخش شده است. میدان الکتریکی را بر روی محور این قرص در نقطه‌ای به فاصله‌ی z از مرکز آن، به دست آورید.



شکل ۳-۱۲: شکل مربوط به مسئله‌ی ۳-۱۶

حل:

با توجه به این که توزیعِ بار یکنواخت است (یا به بیان دیگر چگالیِ سطحیِ بار ثابت است $(\sigma = Q/(\pi R^2)$ می‌توانیم برای پرهیز از انتگرال‌گیریِ دوگانه، عنصر سطح را حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr است در نظر می‌گیرم. مساحت این عنصرِ سطح برابر است با $da = 2\pi r dr$ و در نتیجه بارِ این حلقه برابر است با $dq = \sigma(2\pi r dr)$.



شکل ۳-۱۳: شکل مربوط به مسئله‌ی ۳-۱۶

طبق نتیجه‌ی مسئله قبل می‌توان نوشت:

$$d\mathbf{E} = \frac{\sigma 2\pi r dr z}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

بدین ترتیب:

$$\mathbf{E} = \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال، تغییر متغیرِ زیر را به کار می‌بریم $u^2 = r^2 + z^2$ در این‌صورت $udu = rdr$. بنابر این انتگرال فوق به شکل زیر محاسبه می‌شود

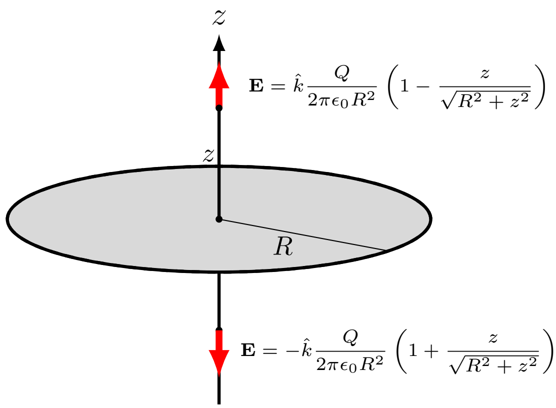
$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int \frac{udu}{u^3} = \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{u}\right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R \\
&= \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right] \\
\mathbf{E} &= \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{z}{|z|}\right]
\end{aligned}$$

اما چون $\sigma = Q/(\pi R^2)$ و نیز

$$|z| = \begin{cases} z & z > 0 \\ -z & z < 0 \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \hat{k}\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right), & z > 0 \\ -\hat{k}\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 + \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right), & z < 0 \end{cases}$$



شکل ۳-۱۴: میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار با بار الکتریکی یکنواخت مثبت

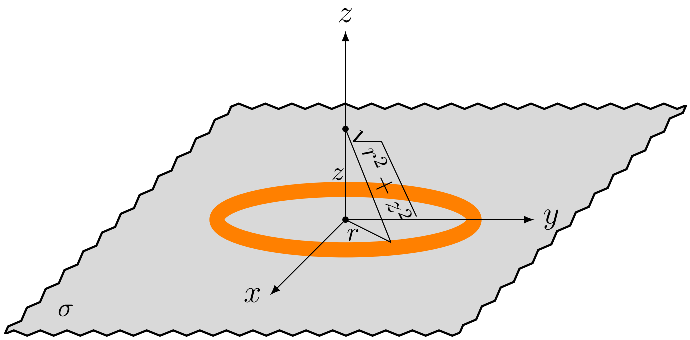
مسئله ۳-۱۷ یك ورقه‌ی باردار با ابعاد نامتناهی، دارای بار الکتریکی مثبت با چگالی یکنواخت σ است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله‌ی z از آن به دست آورید.

حل:

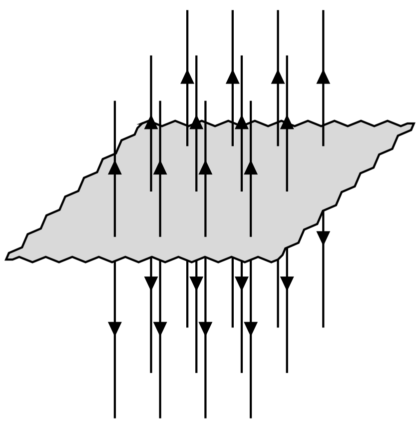
مانند مسئله‌ی قبل عنصر بار را به شکل حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr در نظر می‌گیریم. تمام مراحل، شبیه

مسئله‌ی قبل است فقط حدود انتگرال به جای از 0 تا R از 0 تا ∞ است

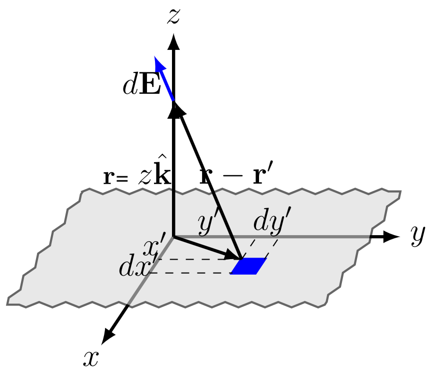
$$\mathbf{E} = \hat{k}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^\infty = \hat{\mathbf{k}}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{|z|}\right]$$
$$= \begin{cases} +\hat{\mathbf{k}}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z>0 \\ -\hat{\mathbf{k}}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z<0 \end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود، میدان الکتریکی در نقاطِ اطراف یک ورقه‌ی باردارِ نامتناهی با چگالی یکنواخت، به فاصله‌ی آن نقاط تا صفحه بستگی ندارد. جهت میدان هم در همه‌ی نقاط، یکسان و عمود بر صفحه است. یعنی در این‌جا یک میدانِ الکتریکی یکنواخت داریم.



روش دوم: می‌توانستیم عنصر سطح را یک عنصر نقطه‌ای در نظر بگیریم. که البته منجر به محاسبه‌ی انتگرال دوگانه می‌شود. مسئله را در دستگاه مختصات کارتزین حل می‌کنیم. عنصر سطح به شکل $da = dx'dy'$ است.



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{k}}, \qquad \text{بردار مکان نقطه‌ی مشاهده}$$

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}, \qquad \text{بردار مکان عنصر سطح}$$

$$da = dx'dy'$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{\mathbf{k}} - x'\hat{\mathbf{i}} - y'\hat{\mathbf{j}} \qquad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int da\sigma \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'dy' \frac{z\hat{\mathbf{k}} - x'\hat{\mathbf{i}} - y'\hat{\mathbf{j}}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

مؤلفه‌های xو y صفر می‌شود زیرا انتگرال‌ده‌ی آن‌ها توابعی فرد هستند و انتگرال بر رویِ بازه‌ی متقارن از $-\infty$ تا $+\infty$ گرفته می‌شود:

$$E_x = E_y = 0$$

بنابر این به محاسبه‌ی مؤلفه‌ی z می‌پردازیم:

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال، تغییرِ متغیرِ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y' = \sqrt{x'^2 + z^2}\tan\theta \qquad dy' = \sqrt{x'^2 + z^2}(1+\tan\theta)d\theta$$

بنابر این

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sqrt{x'^2+z^2}}{(x'^2+z^2)^{3/2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\tan\theta}} \\ &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2+z^2}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta\cos\theta \\ &= \frac{2\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2+z^2}} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی انتگرالِ اخیر نیز تغییرِ متغیرِ $x' = z\tan\alpha$ را به کار می‌بریم:

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{z(1+\tan\alpha^2)}{z^2(1+\tan\alpha^2)}d\alpha$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

یعنی میدانِ الکتریکی یکنواخت است و جهتِ آن عمود بر صفحه است. واضح است که برای نقاطِ بالایِ صفحه ($z > 0$) میدان در جهتِ $\hat{\mathbf{k}}$ و در نقاطِ پایینِ صفحه ($z < 0$) میدان در جهتِ $-\hat{\mathbf{k}}$ است:

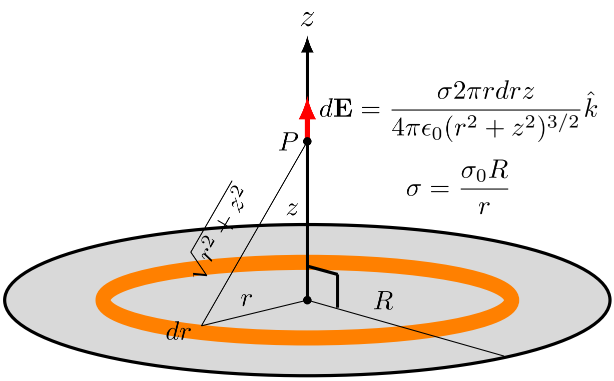
$$\mathbf{E} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{k}} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{k}} & z < 0 \end{cases}$$

مسئله ۳-۱۸ بار الکتریکی با چگالی $\sigma = \dfrac{\sigma_0 R}{r}$ بر روی سطح یك قرص دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. (r فاصله هر نقطه از مرکز قرص است) میدان الکتریکی را بر روی محور قرص به فاصله‌ی z از مرکز پیدا کنید.

حل:

برای حل این مسئله مانند مسئله ۳-۱۶ عمل می‌کنیم تنها باید توجه کنیم که در این جا چگالی بار ثابت نیست و

از انتگرال خارج نمی‌شود. نکته‌ی قابل توجه این است که چون توزیع بار تنها به r بستگی دارد و مستقل از زاویه‌ی ϕ است، می‌توان از المان حلقه‌ای استفاده کرد.



میدان مربوط به عنصر حلقه‌ای عبارت است از (با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی ۳-۱۵)

$$d\mathbf{E} = \hat{k}\frac{dqz}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}$$

اما $dq = \sigma 2\pi r dr$ و یا $dq = \sigma_0 R 2\pi dr$ بدین ترتیب:

$$d\mathbf{E} = \hat{k}\frac{\sigma_0 R z}{2\epsilon_0}\frac{dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

و در نتیجه:

$$\mathbf{E} = \hat{k}\frac{\sigma_0 R z}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

پاسخ این انتگرال را مانند مسئله ۳-۸ با تغییر متغیر $r = z\tan\theta$ می توان به دست آورد.

$$\mathbf{E} = \hat{k}\frac{\sigma_0 R z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{z^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R$$

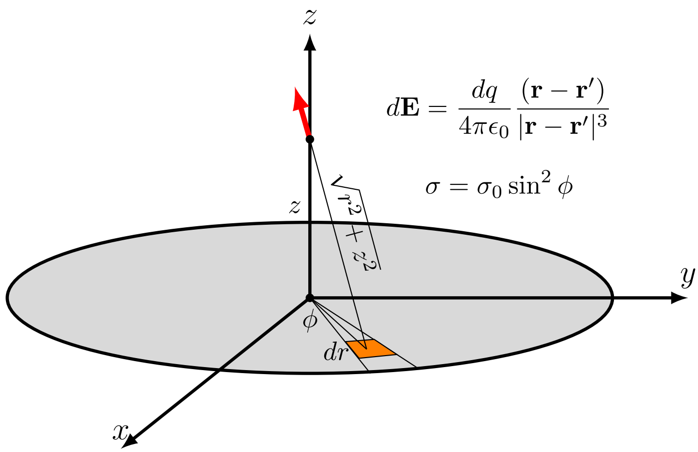
$$\mathbf{E} = \hat{k}\frac{\sigma_0 R^2}{2\epsilon_0 z\sqrt{R^2+z^2}}$$

✎

مسئله ۳-۱۹ بر روی یك قرص دایره‌ای به شعاع R بارالکتریکی با چگالی $\sigma = \sigma_0 \sin^2\phi$ توزیع شده است. (ϕ زاویه سمتی در دستگاه قطبی است) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور قرص و به فاصله‌ی z از مرکز آن به دست آورید.

حل:

در این مسئله، برخلاف دو مسئله‌ی قبل، نمی‌توانیم از عنصر حلقه‌ای استفاده کنیم زیرا توزیع بار به زاویه سمتی ϕ بستگی دارد. عنصر سطحی da را مانند شکل انتخاب می‌کنیم.



مساحت این عنصر برابر است با :

$$da = r dr d\phi$$

و بنابراین، بار آن برابر است با:

$$dq = \sigma da = \sigma_0 \sin^2\phi\, r dr d\phi$$

بردار مکان این عنصر بار، عبارت است از:

$$\mathbf{r}' = (r\cos\phi)\hat{\mathbf{i}} + (r\sin\phi)\hat{\mathbf{j}}$$

و بردار مکان نقطه‌ی میدان، عبارت است از:

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{k}}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{\mathbf{k}} - (r\cos\phi)\hat{\mathbf{i}} - (r\sin\phi)\hat{\mathbf{j}} \quad \text{و} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

بدین ترتیب، میدان الکتریکی به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dq \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \sigma_0 \sin^2\phi r dr d\phi \frac{z\hat{\mathbf{k}} - (r\cos\phi)\hat{\mathbf{i}} - (r\sin\phi)\hat{\mathbf{j}}}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

و در نتیجه مؤلفه‌های میدان الکتریکی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r^2\cos\phi\sin^2\phi}{(r^2+z^2)^{3/2}} d\phi dr \\ &= -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R dr \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi\sin^2\phi d\phi \end{aligned}$$

انتگرال‌گیری بر روی ϕ با قرار دادن $u = \sin\phi$ و در نتیجه $du = \cos\phi d\phi$ نتیجه می‌دهد:

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\sin^2\phi d\phi = \frac{1}{3}\sin^3\phi\Big|_0^{2\phi} = 0$$

و بدین ترتیب :

$$E_x = 0$$

به طریقی مشابه نشان دهید که مولفه‌ی y نیز صفر است.

$$E_y = 0$$

برای مولفه‌ی z داریم :

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma_0 z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\phi r dr d\phi}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma_0 z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R dr\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi\sin^2\phi \end{aligned}$$

اما :

$$\int_0^{2\pi} d\phi\sin^2\phi = \int_0^{2\pi} d\phi\frac{1-\cos 2\phi}{2} = \pi$$

در مورد انتگرال دیگر می‌توان نوشت (به مسئله‌ی ۳-۱۶ و ۳-۱۱ مراجعه کنید)

$$\int_0^R dr\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\Big|_0^R = \frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{|z|}$$

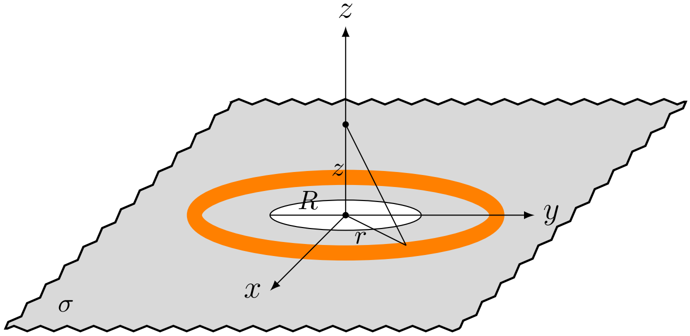
بنابر این

$$E_z = \frac{\sigma_0 z}{4\pi\epsilon_0}(\pi)\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

و نهایتاً

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{4\epsilon_0}\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}, & z>0 \\ \dfrac{-\sigma_0}{4\epsilon_0}\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}, & z<0 \end{cases}$$

مسئله ۳-۲۰ در يك ورقه بار دار بی نهايت با چگالی يكنواخت σ سوراخی دايره ای به شعاع R ايجاد شده است.ميدان الكتريكی را بر روی محور سوراخ و به فاصله z از آن پيدا كنيد



حل:

وضعيت مسئله در شكل نشان داده شده است. برای حل اين مسئله، شبيه به مسئله‌ی ۳-۱۷ يعنی ورقه بار دار بی نهايت عمل می كنيم با اين تفاوت كه حدود انتگرال از R تا ∞ است.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \int d\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \hat{\mathbf{k}}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_R^\infty \\
&= \hat{\mathbf{k}}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]
\end{aligned}$$

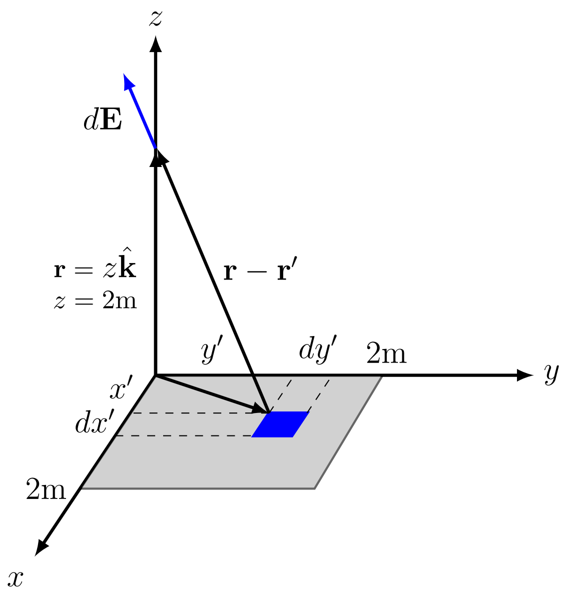
روش دوم: می‌توانيد برای حل اين مسئله از اصل بر هم نهی نيز استفاده كنيد. بدين شكل كه ميدانِ الكتريكی ناشی از يك ورقه‌ی بی‌نهايت كامل را (يعنی $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$) در نظر بگيريد و ميدانِ الكتريكی ناشی از يك قرصِ دايره‌ای به شعاع R را از آن كم كنيد (از نتايج مسئله‌های ۳-۱۶ و ۳-۱۷ استفاده كنيد)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1-\frac{z}{R^2+z^2})\hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

✎

مسئله ۳-۲۱ بر روی بخشی از صفحه‌ی xy كه با معادلات $0 \leq x < 2m$ و $0 \leq y < 2m$ مشخص می‌شود، بار الكتريكی با چگالی سطحیِ $\sigma = 2x(x^2+y^2+4)\frac{3}{2}$ بر حسب $\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ توزيع شده است. ميدان الكتريكیِ ناشی

از این توزیع بار را در نقطه‌ی $(0,0,2\mathrm{m})$ بر حسبِ $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ پیدا کنید.



حل:

مطابق شکل، عنصر سطحی $da=dxdy$ را در نقطه‌ای به مختصات (x',y') با بار $dq=\sigma da$ در نظر می‌گیریم. بردار مکان این عنصر بار برابر است با

$$\mathbf{r}'=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}$$

و بردار مکان نقطه‌ی میدان عبارت است از:

$$\mathbf{r}=z\hat{\mathbf{k}}=2\hat{\mathbf{k}}$$

و در نتیجه:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=2\hat{\mathbf{k}}-x\hat{\mathbf{i}}-y\hat{\mathbf{j}} \quad \text{و} \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\sqrt{x^2+y^2+4}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2}\frac{\sigma dxdy(2\hat{\mathbf{k}}-x\hat{\mathbf{i}}-y\hat{\mathbf{j}})}{(x^2+y^2+4)^{3/2}}$$

در واقع سه انتگرال داریم. هر یک از مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2}\frac{x\sigma dxdy}{(x^2+y^2+4)^{3/2}}$$

توجه کنید که

$$\sigma = 2x(x^2+y^2+4)^{3/2}\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^3} = (2\times10^{-9})\left[x(x^2+y^2+4)^{3/2}\right]\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{2\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^2\int_0^2\frac{x^2(x^2+y^2+4)^{3/2}}{(x^2+y^2+4)^{3/2}}dxdy \\
&= -\frac{2\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^2\int_0^2 x^2dxdy \\
&= -\ \frac{2\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}y\Big|_0^2\ \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -96\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

و برای مؤلفه‌ی y داریم:

$$\begin{aligned}
E_y &= -\frac{2\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^2\int_0^2 xydxdy \\
&= -(2\times10^{-9})(9\times10^{9})\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = -72\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

و نهایتاً مؤلفه‌ی z میدان الکتریکی برابر است با :

$$E_z = -\frac{2\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^2\int_0^2 2dxdy = -2(2\times10^{-9})(9\times10^{9}) = -144\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

بدین ترتیب میدان الکتریکی در نقطه $(0,0,2)$ برابر است با :

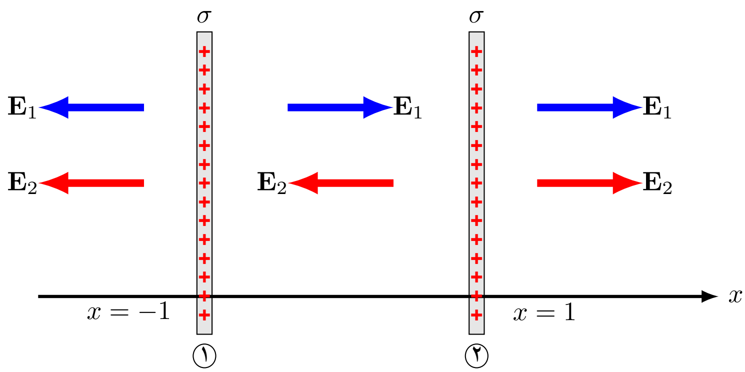
$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(0,0,2)} &= -[96\hat{i} + 72\hat{j} + 144\hat{k}] \\ &= -24(4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})\frac{\text{N}}{\text{C}}\end{aligned}$$

$$\left|\mathbf{E}_{(0,0,2)}\right| = 24\sqrt{6}\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

مسئله ۳-۲۲ دو ورقه باردار بی نهایت با چگالی یکنواخت σ و σ' هر دو موازی با صفحه‌ی yz به ترتیب در مکان‌های $x = 1$ و $x = -1$ قرار دارند. میدان الکتریکی را در همه‌ی نقاط، به شرطی که **الف)** $\sigma' = \sigma$ و **ب)** $\sigma' = -\sigma$ پیدا کنید. [σ مثبت است.]

حل:

الف) با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی (۳-۱۷)، می‌دانیم که میدان الکتریکی در اطراف یك ورقه‌ی باردار بی نهایت، با چگالی بار یکنواخت، برابر است با $\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$ و جهت آن عمود بر صفحه است.



اگر میدان الکتریکی ناشی از ورقه‌ی واقع در $x = -1$ را $\mathbf{E}_1$ بنامیم آن‌گاه (با توجه به شکل):

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x < -1 \\[2ex] +\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x > -1 \end{cases}$$

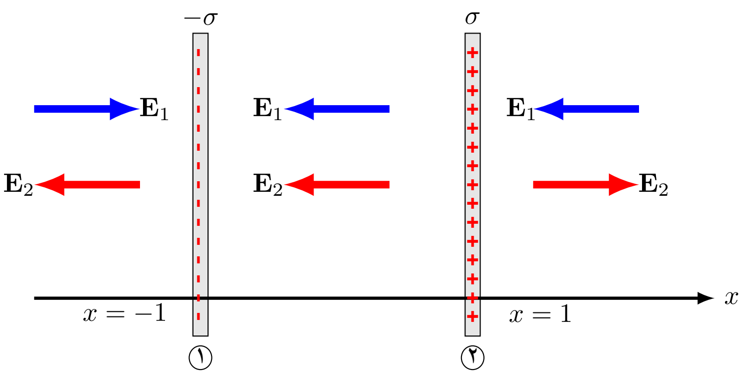
واگر میدان الکتریکی ناشی از ورقه‌ی واقع در $x = 1$ را $\mathbf{E}_2$ بنامیم آن‌گاه

$$\mathbf{E}_2 = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x < 1 \\ \\ +\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x > 1 \end{cases}$$

میدان کل با توجه به اصل بر هم نهی برابر است با:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x < -1 \\ \\ 0 & -1 < x < 1 \\ \\ +\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x > 1 \end{cases}$$

ب) تفاوت این قسمت با قسمت قبل این است که در این حالت ورقه واقع در $x = -1$ دارای بار منفی است و در نتیجه جهت میدان الکتریکی آن نسبت به حالتی که بار مثبت باشد معکوس است.



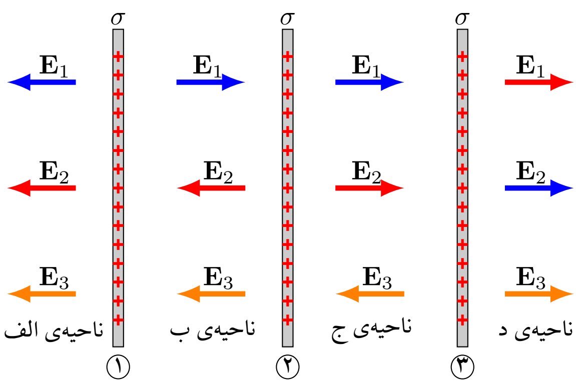
$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x < -1 \\ \\ -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & x > -1 \end{cases}$$

بنابراین میدان کل برابر است با :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{i}} & -1 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

مسئله ۳-۲۳ سه ورقه‌ی باردار بی نهایت با چگالی یکنواخت مثبت σ به طور موازی قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی را در همه‌ی نقاط فضا به دست آورید.

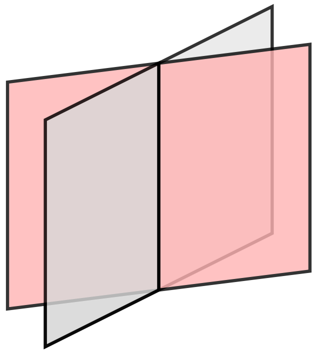
حل:



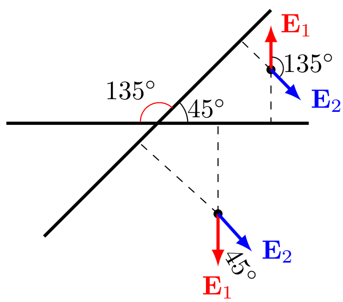
وضعیت مسئله در شکل مشخص شده است.
با توجه به شکل، میدان برآیند در هر ناحیه معلوم است:
(توجه کنید که $|\mathbf{E_1}| = |\mathbf{E_2}| = |\mathbf{E_3}| = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$ برای توضیح بیشتر به مسئله ۳-۲۲ مراجعه کنید)

در ناحیه الف $\rightarrow$	$E = 3\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	به سمت چپ
در ناحیه ب $\rightarrow$	$E = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	به سمت چپ
در ناحیه ج $\rightarrow$	$E = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	به سمت راست
در ناحیه د $\rightarrow$	$E = 3\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	به سمت راست

مسئله ۳-۲۴ دو ورقه‌ی باردار بی‌نهایت با چگالی یکسان به طور متقاطع قرار گرفته‌اند و با یکدیگر زاویه‌ی 45° می‌سازند.



حل:



می‌دانیم که میدان ناشی از هر یك از صفحات برابر با $\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (مسئله ۳-۱۷) و جهت آن عمود بر صفحات است. از سوی دیگر، دو صفحه‌ی متقاطع، فضا را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. در دو ناحیه از این چهار ناحیه، زاویه بین بردارهای میدان‌های الکتریکی 135° و در دو ناحیه‌ی دیگر زاویه‌ی 45° است. پس میدان الکتریکی در نواحی بازِ بین دو صفحه (که زاویه‌ی بین صفحات 135° و زاویه‌ی بین بردارهای میدان 45° است) عبارت است از :

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 45^\circ}$$

اما $E_1 = E_2 = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$ پس:

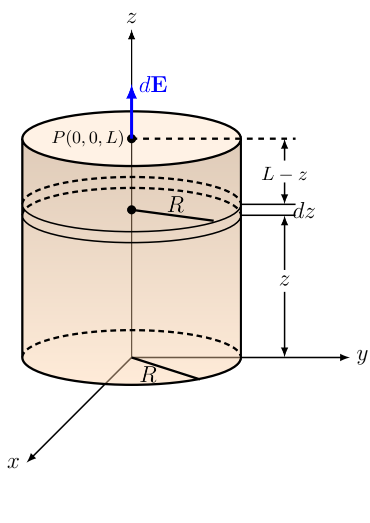
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

و در ناحیه‌ی بسته‌تر بین صفحات (که زاویه‌ی بین صفحات $45°$ و زاویه‌ی بین بردارهای میدان $135°$ است):

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 135°} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

مسئله ۳-۲۵ بر روی سطحِ یك لوله‌ی پلاستیکی به طولِ L و سطحِ مقطعِ دایره‌ای به شعاعِ R، بارِ الکتریکیِ Q به‌طورِ یکنواخت پخش شده است. میدانِ الکتریکی را بر رویِ محورِ لوله، در یکی از دو انتهایش پیدا کنید.

حل:



دستگاه مختصات را مطابق شکل انتخاب کرده‌ایم. می‌خواهیم میدانِ الکتریکی را در نقطه‌ی P با مختصات $(0,0,L)$ پیدا کنیم. بر روی استوانه، حلقه‌ای به ضخامتِ dz در مکانِ z در نظر می‌گیریم. بارِ الکتریکیِ روی این حلقه برابر است با $dq = \sigma da$ که در آن $da = 2\pi R dz$ و چون توزیعِ بار یکنواخت است، می‌توان نوشت $\sigma = \dfrac{Q}{2\pi RL}$. فاصله‌ی مرکز این حلقه تا نقطه‌ی P برابر است با $(L-z)$. با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی ۳-۱۵ میدانِ الکتریکیِ مربوط

به این حلقه، در نقطه‌ی P برابر است با :

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{dq(L-z)}{4\pi\epsilon_0\left[R^2+(L-z)^2\right]^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{Qdz(L-z)}{4\pi\epsilon_0\left[R^2+(L-z)^2\right]^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

ود ر نتیجه :

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{(L-z)}{\left[R^2+(L-z)^2\right]^{3/2}}dz$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$R^2+(L-z)^2 = u$$

بدین ترتیب :

$$du = -2(L-z)dz$$

و یا

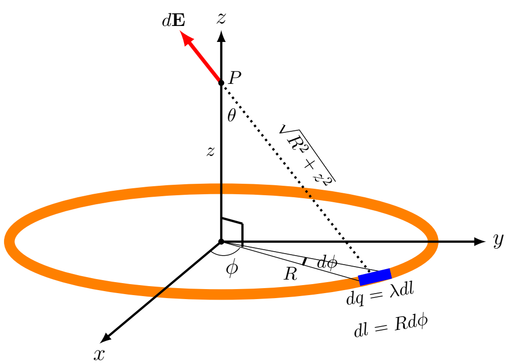
$$(L-z)dz = -\frac{1}{2}du$$

بنابراین :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \hat{\mathbf{k}}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\int \frac{-\frac{1}{2}du}{u^{3/2}} \\
&= \hat{\mathbf{k}}(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0})\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)u^{1/2} \\
&= \hat{\mathbf{k}}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left.\frac{1}{\sqrt{R^2+(L-z)^2}}\right|_0^L \\
&= \hat{\mathbf{k}}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2}}\right]
\end{aligned}
$$

مسئله ۳-۲۶ حلقه‌ای دایره‌ای به شعاعِ R در صفحه‌ی xy قرار دارد. مرکز حلقه بر مبدأ مختصات منطبق است. این حلقه دارای چگالی خطی بار $\lambda = \lambda_0 \sin\phi$ است. میدان الکتریکی را روی محور z به دست آورید (ϕ زاویه سمتی در دستگاه قطبی است.)

حل: قبل از هر چیز توجه کنید که توزیع بار بر روی حلقه یکنواخت نیست. تابعیت چگالی بار به زاویه‌ی ϕ نشان می‌دهد که بارِ الکتریکی در برخی نقاط از حلقه، مثبت و در برخی نقاط دیگر منفی است.



عنصر بسیار کوچك طول $dl = Rd\phi$ را با بار $dq = \lambda dl$ در نظر می‌گیریم. (در شکل فوق بردار $d\mathbf{E}$ برای حالتی رسم شده که dq مثبت باشد). بردار مکان عنصرِ بارِ dq برابر است با:

$$\mathbf{r}' = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = R\cos\phi\hat{\mathbf{i}} + R\sin\phi\hat{\mathbf{j}}$$

و بردار مکان نقطه میدان $\mathbf{r} = z\hat{k}$ است. بنابراین میدان ناشی از dq در نقطه $(0,0,z)$ عبارت است از :

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{\lambda R\sin\phi d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\hat{\mathbf{k}} - R\cos\phi\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi\hat{\mathbf{j}}}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

بدین ترتیب :

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\Big[\hat{\mathbf{k}}z\int_0^{2\pi}\sin\phi d\phi - \hat{\mathbf{i}}R\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi d\phi - \hat{\mathbf{j}}R\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi\Big]$$

انتگرال اول و دوم صفر می‌شود و انتگرال سوم را می‌توانید با جایگزینی $\sin^2\phi = \dfrac{1-\cos 2\phi}{2}$ محاسبه کنید:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = -\hat{\mathbf{j}}\frac{\lambda_0 R^2}{4\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$$

روش دوم: اگر نخواهید به روش برداری مسئله را حل کنید، می‌توانید به شکل زیر عمل کنید: اندازه‌ی میدانِ الکتریکی ناشی از عنصر کوچك dq برابر است با :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} = \frac{\lambda_0\sin\phi R d\phi}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)}$$

و مولفه‌های x, y, z عبارت است از :

$$dE_x = -dE\sin\theta\cos\phi, \qquad dE_y = -dE\sin\theta\sin\phi, \qquad dE_z = dE\cos\theta$$

توجه کنید که $\sin\theta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$ و $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$ در نتیجه

$$E_x = \int dE_x = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi d\phi$$

$$E_y = \int dE_y = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{\lambda_0 R z}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi$$

با محاسبه انتگرال‌ها مؤلفه‌های میدانِ الکتریکی به دست می‌آید:

$$E_x = E_z = 0 \quad , \quad E_y = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$$

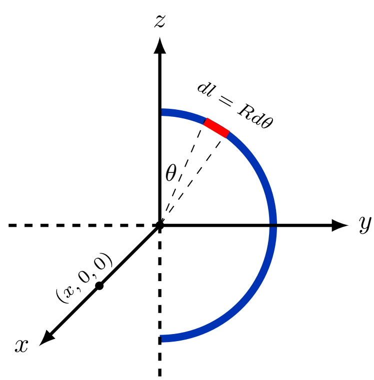
توجه کنید که در این حالت راستای میدانِ الکتریکی موازی صفحه‌ی حلقه است (بر خلاف حلقه‌ی باردارِ یکنواخت که راستای میدان، عمود بر صفحه‌ی حلقه است.)

مسئله ۳-۲۷ نیم دایره‌ای به شعاع R دارای چگالی خطی بار به صورت $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ این نیم دایره در صفحه‌ی yz قرار دارد (در ناحیه‌ی $y > 0$). مرکز نیم‌حلقه بر مبدأ مختصات منطبق است. θ زاویه‌ی قطبی است که نسبت به محور z سنجیده می‌شود.

الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ی $(x,0,0)$ پیدا کنید.

ب) نشان دهید که در فواصل دور $R \gg x$ میدان حاصل شبیه به میدان دو قطبی است. یعنی با توان سوم x نسبت عکس دارد.

حل:



الف) مطابق مسئله‌ی قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که حدود انتگرال در این مسئله از 0 تا π است. عنصر بار $dq = \lambda R d\theta$ را بر روی حلقه در نظر می‌گیریم. بردار مکان آن عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= z\hat{\mathbf{k}} + y\hat{\mathbf{j}} \\ &= R\cos\theta\hat{\mathbf{k}} + R\sin\theta\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

و بردار مکان نقطه‌ی میدان عبارت است از: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}}$. در نتیجه:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = x\hat{\mathbf{i}} - R\sin\theta\hat{\mathbf{j}} - R\cos\theta\hat{\mathbf{k}}, \qquad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + x^2}$$

بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(x,0,0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \lambda R d\theta \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}\left\{\hat{\mathbf{i}}x\int_0^\pi \cos\theta d\theta - \hat{\mathbf{j}}R\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta - \hat{\mathbf{k}}R\int_0^\pi \cos^2\theta d\theta\right\}\end{aligned}$$

اما:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos\theta d\theta = 0 \\ &\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta = 0 \\ &\int_0^\pi \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

بدین ترتیب :

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = -\hat{\mathbf{k}}\frac{\lambda_0 R}{8\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

ب) اگر $x \gg R$ آن گاه:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2 + R^2)^{3/2}} &= \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-3/2} \\ &= \frac{1}{x^3}\left(1 - \frac{3R^2}{2x^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{x^3} - \frac{3R^2}{2x^5} + \cdots \\ &\simeq \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

توجه کنید که:

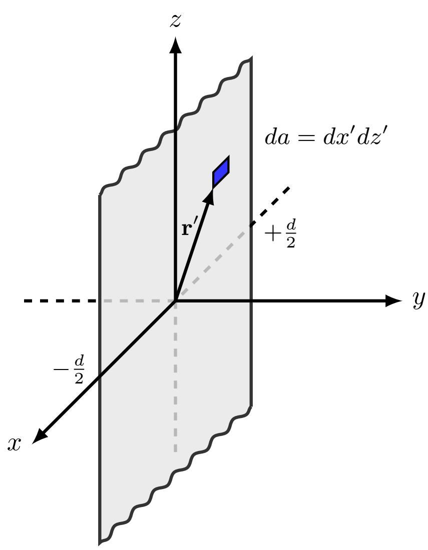
$$(1+\alpha)^m = 1 + \frac{m\alpha}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\alpha^3 + \cdots$$

بدین ترتیب:

$$\mathbf{E}(x,0,0) = -\hat{\mathbf{k}}\frac{\lambda R^2}{8\epsilon_0 x^3}$$

مسئله ۳-۲۸ نواری به پهنای d و طول نامتناهی در صفحه‌ی xy و در امتداد محور z به گونه‌ای قرار گرفته است که یك لبه‌ی آن در $x=\frac{d}{2}$ و لبه‌ی دیگر آن در $x=-\frac{d}{2}$ است. این نوار دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (x,y,z) بیابید.

حل:



عنصر کوچکی با مساحت $da = dx'dz'$ بر روی نوار، در نقطه‌ی $(x',0,z')$ در نظر می‌گیریم. بار الکتریکیِ

این عنصر برابر است با $dq = \sigma dx'dz'$ و بردار مکان آن عبارت است از:

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}} + z'\hat{\mathbf{k}}$$

بردار مکان نقطه میدان نیز $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ می باشد.
بدین ترتیب:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\hat{\mathbf{k}}$$
$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2}$$

بدین ترتیب میدان الکتریکی عبارت است از:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int \frac{\sigma dx'dz'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{(x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\hat{\mathbf{k}}}{[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx'dz'$$

در واقع سه انتگرال داریم:

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{(x - x')}{\left[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} dx'dz'$$
$$E_y = \frac{\sigma y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{1}{\left[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} dx'dz'$$
$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{(z - z')}{\left[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} dx'dz'$$

انتگرال اول و سوم از لحاظ شکل ظاهر یکسان‌اند. در انتگرال اول، تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(x - x') = u \Rightarrow du = -dx', \quad z - z' = w \Rightarrow dw = -dz'$$

بنابراین:

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{w=\infty}^{-\infty}\int_{u=x+\frac{d}{2}}^{u=x-\frac{d}{2}}\frac{ududw}{\left[u^2+y^2+w^2\right]^{3/2}}$$
$$E_x = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{u=x+\frac{d}{2}}^{u=x-\frac{d}{2}}udu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw}{\left[u^2+y^2+w^2\right]^{3/2}}$$

(علامت منفی به سبب تعویض حدود انتگرال $(-\infty$ $,+\infty)$ ظاهر شده است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(A^2+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{A^2}\frac{t}{\sqrt{A^2+t^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{A^2}$$

(این انتگرال با تغیر متغیر $t = A\tan\theta$ قابل محاسبه است، به مسئله ۳-۱۳ مراجعه کنید.)
بنابراین:

$$E_x = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{u=x+\frac{d}{2}}^{u=x-\frac{d}{2}}\frac{2udu}{u^2+y^2}$$

این انتگرال نیز با تغییر متغیر $g = u^2+y^2$ و در نتیجه $dg = 2udu$ قابل محاسبه است.

$$E_x = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dg}{g} = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\ln(g)$$
$$= \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\ln(u^2+y^2)\Big|_{x+\frac{d}{2}}^{x-\frac{d}{2}}$$
$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\ln(\frac{(x+\frac{d}{2})^2+y^2}{(x-\frac{d}{2})^2+y^2}$$

[توجه کنید که $-\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ علت ناپدید شدن علامت منفی پشت σ همین است.] برای محاسبه‌ی مولفه‌ی z میدان الکتریکی،انتگرال را با روش مشابه محاسبه کنید.
نتیجه برابر با صفر است :

$$E_z = 0$$

برای محاسبه انتگرال دوم نیز به شرح زیر عمل می کنیم:

$$u = x - x' \quad , \quad w = z - z'$$
$$E_y = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x-\dfrac{d}{2}}^{x+\dfrac{d}{2}}\frac{dudw}{\left[u^2+y^2+w^2\right]^{3/2}}$$

[به تغییرات حدود انتگرال توجه کنید. هر گاه جای حدود انتگرال را عوض کنیم مقدار انتگرال در منفی ضرب می‌شود. در این جا ما دو بار جای حدود انتگرال را عوض کرده‌ایم.]

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\sigma y}{4\pi\epsilon_0}\int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw}{\left[u^2+y^2+w^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma y}{4\pi\epsilon_0}\int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} du \left\{\frac{2}{u^2+y^2}\right\} \end{aligned}$$

اما می‌دانیم:

$$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)$$

(این انتگرال با تغییر متغیر $t = a\tan\theta$ به سادگی حل می شود.)
بنابراین:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\sigma y}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{u}{y}\right)\right]_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{y}\right)\right] \end{aligned}$$

و در نهایت:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\left\{\hat{\mathbf{i}}\ln\left[\frac{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2}\right] + \hat{\mathbf{j}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{y}\right)\right]\right\}$$

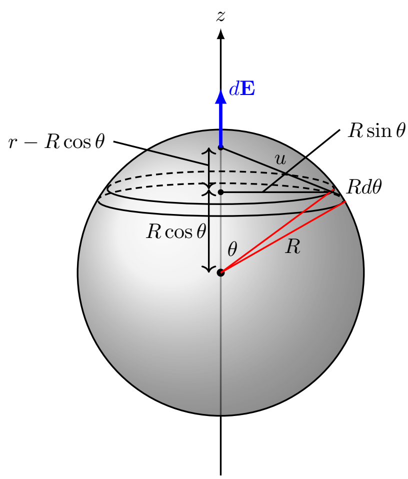
✎

مسئله ۳-۲۹ بر روی سطحِ پوسته‌ی کروی به شعاعِ R بار الکتریکیِ Q به طور یکنواخت پخش شده است.

الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در هر نقطه درون پوسته صفر است.

ب) نشان دهید که میدان الکتریکی در خارج پوسته مانند میدان یک بار نقطه‌ای Q است که در مرکز کره قرار داشته باشد.

حل:



الف) ابتدا میدان را در نقطه‌ای درون پوسته پیدا می‌کنیم. برای حل مسئله از نتیجه‌ی حاصل از مسئله‌ی (۳-۱۵) که میدان الکتریکی یك حلقه را بیان می‌کند، استفاده می‌کنیم. عنصر سطحی به شکل حلقه، مطابق شکل بالا در نظر می‌گیریم. شعاع این حلقه $r' = R\sin\theta$ و ضخامت آن $Rd\theta$ است بنابر این بار الکتریکی روی آن برابر است با:

$$dq = \sigma ds = \sigma(2\pi r')(Rd\theta)$$
$$= \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

با توجه به نتیجه‌ی مسئله‌ی (۳-۱۵) می‌توان نوشت :

$$\mathbf{E} = \hat{k}\int \frac{dq(r - R\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0\left[r'^2 + (r - R\cos\theta)^2\right]^{3/2}}$$
$$= \hat{k}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta(r - R\cos\theta)}{2\epsilon_0\left[r'^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta\right]^{3/2}}$$

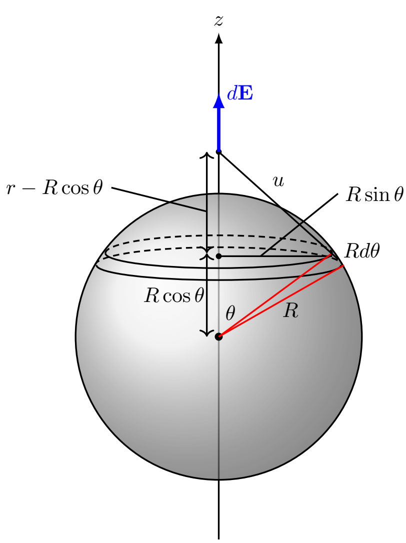
توجه کنید که r فاصله‌ی مرکز کره تا نقطه‌ی مشاهده است. تغیر متغیر $u^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta$ را در نظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$udu = rR\sin\theta d\theta, \quad R\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - u^2}{2r}$$

با جاگذاری این عبارات در انتگرال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
E = |\mathbf{E}| &= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\int_{u=(R-r)}^{R+r} \frac{-u\left(-r^2 + R^2 - u^2\right)du}{u^3} \\
&= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\left\{\int_{R-r}^{R+r} \frac{r^2 - R^2}{u^2}du + \int_{R-r}^{R+r} du\right\} \\
&= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\left\{-\left(r^2 + R^2\right)\left(\frac{1}{u}\right)\Bigg|_{R-r}^{R+r} + u|_{R-r}^{R+r}\right\} \\
&= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\Big\{(r^2 + R^2)\left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{R-r}\right) + (R+r) - (R-r)\Big\} \\
&= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\left\{(-r^2 + R^2)\left(\frac{-2r}{R^2 - r^2} + 2r\right)\right\} = 0
\end{aligned}$$

ب) برای پیدا کردن میدان الکتریکی در خارج از پوسته نیز مانند قسمت الف، از عنصر حلقه‌ای استفاده می‌کنیم. تمام مراحل مسئله شبیه به حالت قبل است و فقط حدود انتگرال برای u از $R - r$ تا $R + r$ تغییر می‌کند.



$$E = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\left\{\int_{r-R}^{r+R} -\frac{(R^2-r^2)}{u^2}du + \int_{r-R}^{r+R} du\right\}$$
$$E = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}\left\{(R^2-r^2)\left(\frac{2R}{r^2-R^2}\right)+2R\right\}$$
$$E = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 r^2}(4R)$$
$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

اما چون بار یکنواخت است پس $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ بنابراین:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

اگر چه ما نقطه‌ی مشاهده را روی محور z در نظر گرفتیم، اما با توجه به تقارن کروی مسئله، واضح است که میدان الکتریکی در هر نقطه در اطراف کره شعاعی است. بدین ترتیب بردار میدان الکتریکی در هر نقطه را، بر حسب فاصله از مرکز کره، می‌توان به شکل زیر نوشت:

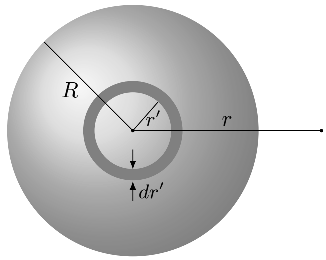
$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$

توجه کنید که میدان الکتریکی در $r = R$ گسسته است. این یک ویژگی کلی است. هنگام عبور از یک توزیع سطحی بار، میدان الکتریکی گسسته است.

مسئله ۳-۳۰ میدان الکتریکی ناشی از یك کره‌ی توپر به شعاع R با چگالی حجمی یکنواخت ρ را در همه نقاط $(r > R, r < R)$ پیدا کنید.

حل: الف) ابتدا مسئله را برای $r > R$ حل می‌کنیم.

برای حل این مسئله، از نتیجه‌ی مسئله‌ی (۳-۲۹) استفاده می‌کنیم. یك پوسته‌ی کروی به شعاع r' و ضخامت dr' در نظر می‌گیریم. بار درون پوسته برابر با $dq = \rho 4\pi r'^2 dr'$ است. دقت کنید که در این حالت نقطه‌ی مشاهده خارج از کره است و از آن‌جا که $r' < R$، واضح است که نقطه‌ی مشاهده، r، همواره خارج از این پوسته است.



در مسئله‌ی قبل دیدیم که میدان ناشی از يك پوسته کروی در خارج از آن، مانند میدان يك بار نقطه‌ای است:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

بنابراین میدان کل ناشی از کره توپر در خارج از آن عبارت است از:

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2}\int_0^R r'^2 dr' = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad , \quad r > R$$

که اگر بار کل کره را با Q نشان دهیم، از آن جا که چگالی یکنواخت است داریم:

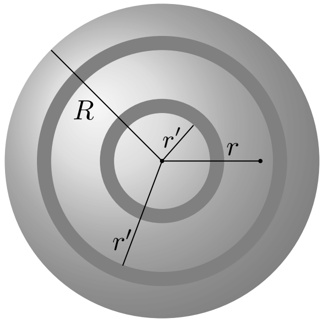
$$Q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

و در نتیجه:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad , \quad r > R$$

دیده می‌شود که میدانِ الکتریکی ناشی از یک کره‌ی باردار با چگالی یکنواخت، در نقاطِ خارج از کره، مشابه با میدانِ ناشی از یک بار نقطه‌ای است.

ب) حال فرض کنید نقطه r درون کره باشد $(r < R)$. درا ین حالت نیز پوسته‌ای کروی به شعاع r' و ضخامت dr' در نظر می‌گیریم. اما باید در این جا دقت کنیم که برای r'های مختلف وضعیت‌های مختلفی داریم. هنگامی که از 0 تا R بر روی r' انتگرال می‌گیریم، در بعضی از حالات، نقطه‌ی r خارج از پوسته قرار می‌گیرد $(r' < r)$ و در حالات دیگر، نقطه‌ی r درون پوسته قرار می‌گیرد. $(r' > r)$ اما طبق مسئله‌ی قبل می‌دانیم که میدان درون يك پوسته‌ی باردار، صفر است. پس:



$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^r \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_r^R 0 \\
&= \int_0^r \frac{\rho 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2}\int_0^r r'^2 dr' \\
&= \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \qquad\qquad\qquad r < R
\end{aligned}
$$

بدین ترتیب می‌توان نوشت:

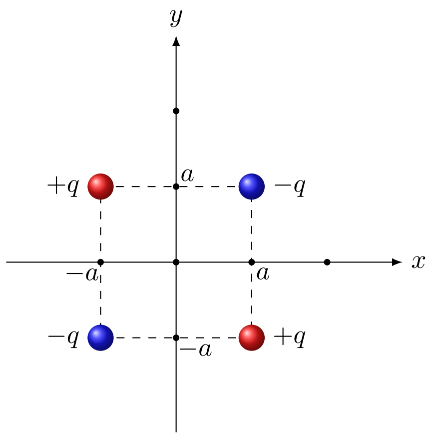
$$
E = \begin{cases} \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0} & r \geq R \end{cases}
$$

✎

مسائل اضافی فصل ۳

مسئله ۳-۳۱ دو بار نقطه‌ای $-q$ در نقاط $(-a,-a,0)$ و $(+a,+a,0)$ قرار دارند. همچنین دو بار نقطه‌ای $+q$ در نقاط $(-a,+a,0)$ و $(+a,-a,0)$ قرار دارند. میدان الکتریکی را در هر یک از نقاط زیر به دست آورید.

- الف) نقطه‌ای روی محور z، با مختصات $(0,0,z)$.
- ب) نقطه‌ای روی محور x، با مختصات $(2a,0,0)$.
- ج) نقطه‌ای روی محور y، با مختصات $(0,2a,0)$.



جواب: الف) صفر ب) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{5\sqrt{10}}\right)\hat{\mathbf{j}}$ ج) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{5\sqrt{10}}\right)\hat{\mathbf{i}}$

مسئله ۳-۳۲ بارهای الکتریکی q، $-q$، $2Q$ و Q به ترتیب، بر روئوس A، B، C و D یک مربع به ضلع $2a$ قرار دارند. نسبت q/Q چقدر باشد، تا میدان الکتریکی در وسط ضلع CD برابر با صفر شود؟

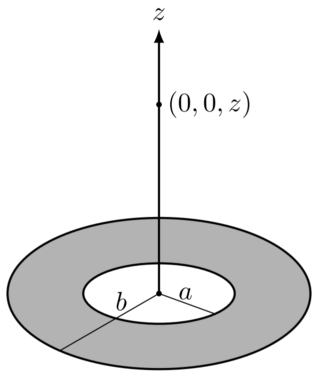
جواب: $\frac{q}{Q}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

مسئله ۳-۳۳ بار نقطه‌ای $-q$ در مبدأ مختصات و بار $q'=\alpha q$ بر روی محور x در نقطه‌ی $x=a$ قرار دارد (αیک عدد مثبت است). در چه نقطه‌ی بر روی محور x میدان الکتریکی صفر است. در باره‌ی مکان این نقطه، وقتی $0<\alpha<1$ و وقتی $\alpha>1$ باشد، بحث کنید.

جواب: $x=\frac{a}{1-\sqrt{\alpha}}$

مسئله ۳-۳۴ يك نوار دايره‌ای (قرص سوراخ‌دار) با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بار الکتریکی با چگالی

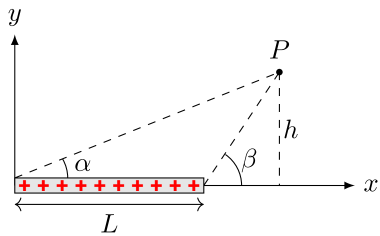
سطحی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \dfrac{b-a}{r}$ است. r فاصله‌ی هر نقطه از نوار تا مرکز آن است. میدان الکتریکی را بر روی محور این نوار به دست آورید.



جواب:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \frac{\sigma_0(b-a)}{2\pi\epsilon_0 z} \left[\frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \right]$$

مسئله ۳-۳۵ شکل زیر یک میله‌ی باردار به طول L را نشان می دهد که بار Q به طور یکنواخت بر آن توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P بر حسب زوایای α و β بنویسید. نتیجه‌ی به دست آمده را با نتایج مسئله‌ی (۳-۱۱) مقایسه کنید.



جواب:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L h}(\sin\beta - \sin\alpha)$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L h}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

مسئله ۳-۳۶ حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع R در صفحه‌ی xy قرار دارد و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق است. بار الکتریکی بر روی این حلقه با چگالی خطی $\lambda = \lambda_0 \cos\phi$ توزیع شده است (ϕ نسبت به محور x سنجیده می‌شود). میدان الکتریکی را در مرکز این حلقه به دست آورید.

جواب: $\mathbf{E} = -\dfrac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}\hat{\mathbf{i}}$

مسئله ۳-۳۷ بر سطح جانبی پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع L، بار الکتریکی با چگالی سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos\phi$ توزیع شده است. ϕ زاویه‌ی سمتی مختصات هر نقطه روی بدنه‌ی استوانه است که نسبت به محور x سنجیده می‌شود. میدان الکتریکی را در مرکز این استوانه به دست آورید.

جواب:

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\sigma_0 RL}{2\epsilon_0\sqrt{4R^2+L^2}}$$

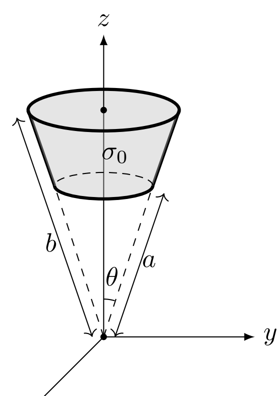
مسئله ۳-۳۸ بر روی نیم‌کره‌ای به شعاع R که با معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=R^2$ و $z>0$ مشخص می‌شود، بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت σ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات (مرکز نیم‌کره) پیدا کنید.

جواب: $\mathbf{E} = -\dfrac{\sigma}{4\epsilon_0}\hat{\mathbf{k}}$

مسئله ۳-۳۹ بر روی نیم‌کره‌ای به شعاع R که با معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=R^2$ و $z>0$ مشخص می‌شود، بار الکتریکی با چگالی سطحی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \sin\phi$ توزیع شده است. ϕ زاویه‌ی سمتی مختصات هر نقطه روی سطح نیم‌کره است که نسبت به محور x سنجیده می‌شود. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات (مرکز نیم‌کره) پیدا کنید.

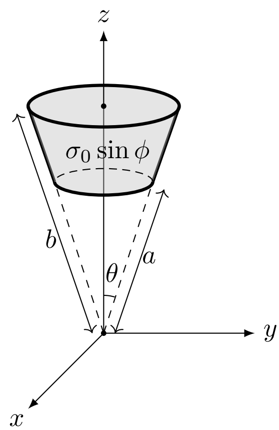
جواب: $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{j}}\dfrac{\sigma_0\pi}{16\epsilon_0}$

مسئله ۳-۴۰ مخروط ناقص توخالی با مشخصاتِ نشان داده شده در شکل زیر در نظر بگیرید. بر سطح جانبی این مخروط بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت σ_0 توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات به دست آورید.



جواب: $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{k}}\dfrac{\sigma_0 \sin 2\theta}{4\epsilon_0}\ln\dfrac{b}{a}$

مسئله ۳-۴۱ مخروط ناقص توخالی با مشخصاتِ نشان داده شده در شکل زیر در نظر بگیرید. بر سطح جانبی این مخروط بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \sin\phi$ توزیع شده است. ϕ زاویه‌ی سمتی مختصات هر نقطه روی سطح مخروط است که نسبت به محور x سنجیده می‌شود. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات به دست آورید.



جواب: $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{j}}\dfrac{\sigma_0 \sin^2\theta}{4\epsilon_0} \ln \dfrac{b}{a}$

مسئله ۳-۴۲ یک دوقطبی الکتریکی از بارهای الکتریکی $+5.0\ \mu\mathrm{C}$ و $-5.0\ \mu\mathrm{C}$ تشکیل شده است که در فاصله‌ی $2.0\ \mathrm{nm}$ از هم قرار گرفته‌اند. این دوقطبی در یک میدان الکتریکی یکنواخت با شدت $E = 3.0 \times 10^5\ \mathrm{N/C}$ تحت زاویه‌ی 30° نسبت به میدان الکتریکی قرار گرفته است.

الف) در این وضعیت، اندازه‌ی گشتاور نیروی وارد بر این دوقطبی چقدر است؟

ب) عامل خارجی چقدر کار انجام دهد تا این دوقطبی عمود بر میدان قرار گیرد؟

جواب: الف) $\tau = 1.5 \times 10^{-9}\ \mathrm{Nm}$ ب) $W = 2.6 \times 10^{-9}\ \mathrm{J}$