

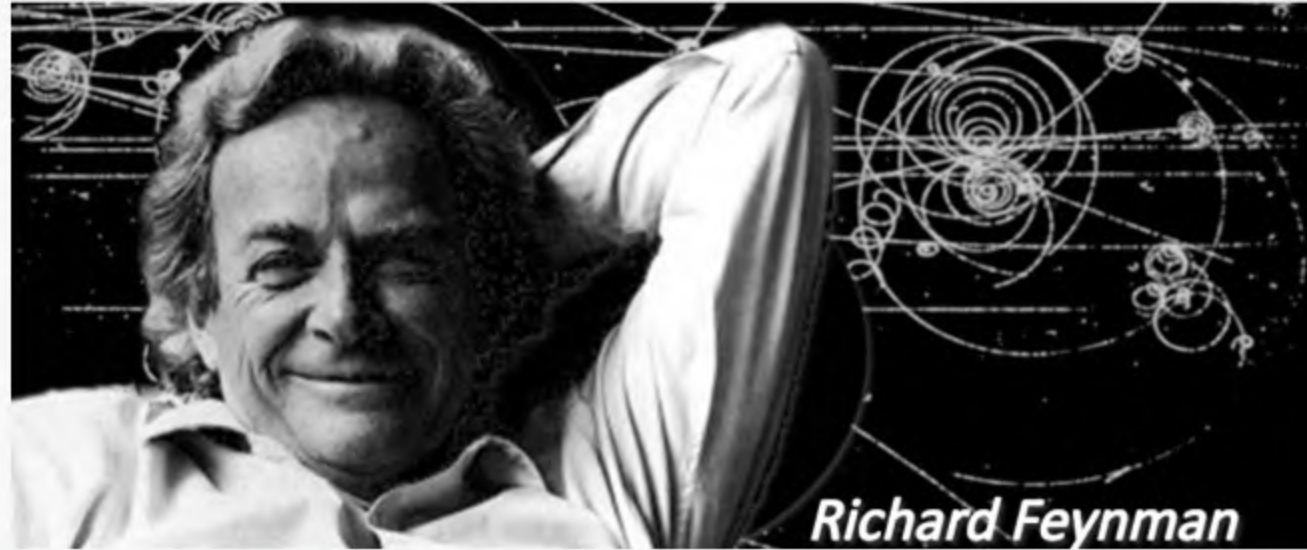
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri



دانشگاه خوارزمی



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن

درس سی و چهارم

جریان الکتریکی

Electric Current



تا این جا در مورد بارهای ساکن و اثرات آنها بحث کرده ایم.

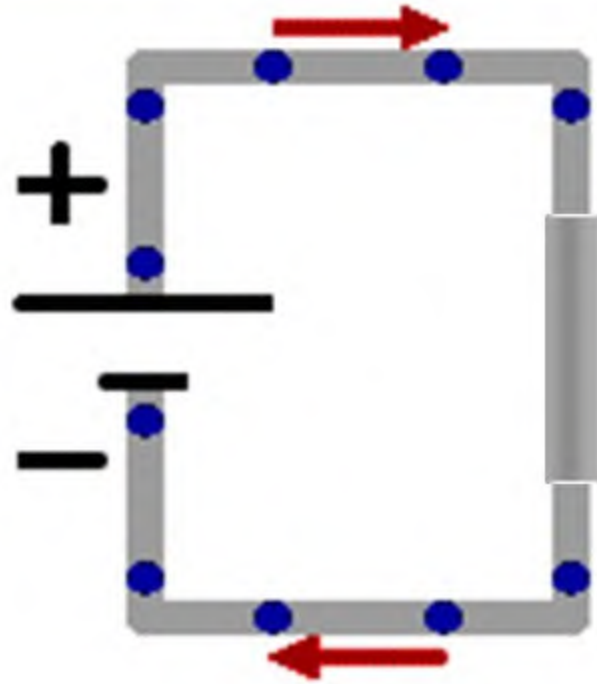
در این درس می خواهیم حرکت بارهای الکتریکی را بررسی کنیم.

رسانا: ماده ای که در آن با اعمال میدان الکتریکی پایا حامل های بار، آزادانه حرکت می کنند.

فلزات، آلیاژها، نیم رساناها، الکترولیت ها، گازهای یونیده، دی الکتریک های ناکامل.

حامل های بار ممکن است الکترون ها یا یون های مثبت یا منفی باشند





الکترون ●

جهت جریان را نشان می دهد

رسانش: فرایندی که در آن بار الکتریکی منتقل می شود.

جریان: آهنگ انتقال بار الکتریکی از سطح معینی در رسانا

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad A = \frac{C}{s}$$

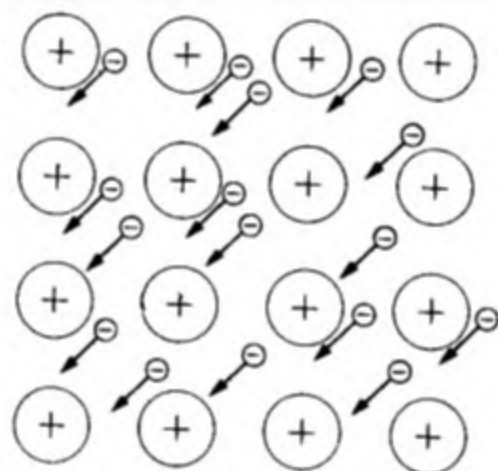
$Q = Q(t)$ بار خالص منتقل شده در زمان t است

در دستگاه SI آمپر یکای اصلی است و کولن از روی آن تعریف می شود:

یک کولن مقدار باری است که در مدت یک ثانیه از مداری با شدت جریان یک آمپر بگذرد

جهت جریان را جهت حرکت بارهای مثبت (خلاف جهت حرکت بار منفی) قرار داد می کنیم

در فلزات الکترون‌ها حامل جریان‌اند (الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها) که آن‌ها را الکترون‌های رسانش می‌نامیم. در حالت پایا می‌توان الکترون را از نقطه‌ای به فلز وارد و از نقطه‌ی دیگر خارج کرد. فلز از لحاظ الکتروستاتیکی خنثی است.



در الکترولیت‌ها، هم یون‌های مثبت و هم یون‌های منفی حامل جریان هستند.

حامل‌های بار هم حرکت گرمایی دارند هم حرکت رانشی (سوقی).

حرکت گرمایی تصادفی (کتره‌ای) است و به انتقال منظم بار و در نتیجه جریان الکتریکی منجر نمی‌شود

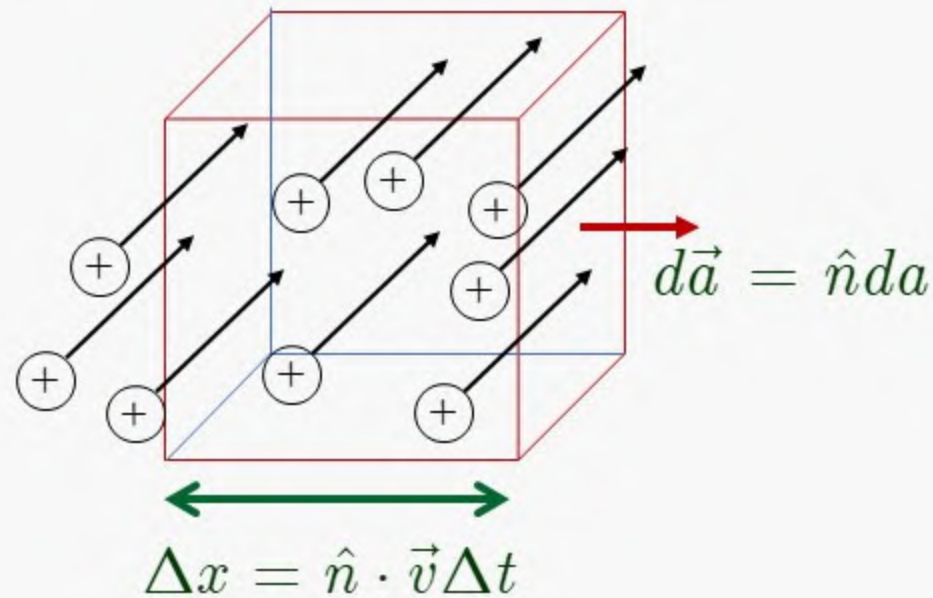
حرکت رانشی تصادفی (کتره‌ای) نیست. بنابر این در بررسی فرایند رسانش، از حرکت گرمایی چشم‌پوشی می‌شود و فقط حرکت رانشی بررسی می‌شود.

جریان‌های رسانی: جریان‌های رانشی (سوقی) حامل‌های بار در یک محیط خنثی

جریان‌های همرفتی: جریان‌هایی که از انتقال جرمی محیط باردار ناشی می‌شود.
جریان‌های همرفت در مطالعه‌ی الکتریسیته‌ی جوی دارای اهمیت بسیارند.

در این فصل ما جریان‌های رسانی را بررسی می‌کنیم





چگالی تعداد حامل های بار

سرعت رانشی حامل های بار

$$\Delta Q = qN \vec{v} \cdot \hat{n} \Delta t da$$

$$dI = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qN \vec{v} \cdot \hat{n} da$$

اگر بیش از یک حامل بار داشته باشیم:

$$dI = \left(\sum_i q_i N_i \vec{v}_i \right) \cdot \hat{n} da$$

$$\vec{J} = \sum_i q_i N_i \vec{v}_i \quad \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$dI = \vec{J} \cdot \hat{n} da$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da$$

بنابر این جریانی که از یک سطح ماکروسکوپی می‌گذرد:

$$I = -\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da$$

برای یک سطح بسته S که حجم V را در بر گرفته:

$\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح به سمت خارج سطح بسته است. علامت منفی برای این وارد شده تا جریانی وارد شده به حجم V مثبت و جریانی خارج شده از این حجم، منفی باشد.

$$I = -\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = -\int_V \nabla \cdot \vec{J} dv$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

معادله‌ی پیوستگی



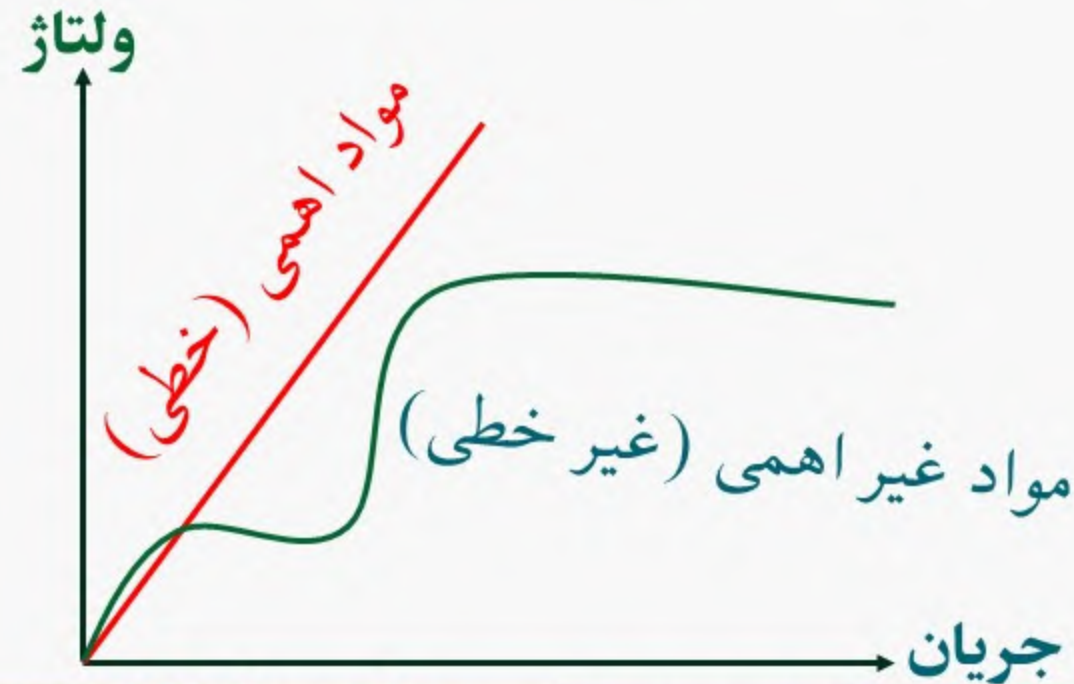


Georg Simon Ohm
(1787-1854)

$$R = \frac{V}{I} \text{ تعريف مقاومـت الکـتریکـی}$$

$$R = \frac{V}{I} = \text{ثابت} \quad \text{قانون اهم}$$

$$1\Omega = 1 \frac{V}{A}$$



چگالی جریان در رساناها به میدان الکتریکی و خواص رسانا بستگی دارد.
در حالت کلی این بستگی بسیار پیچیده است. در برخی مواد (فلزات) در
یک دمای معین چگالی جریان تقریباً با میدان الکتریکی متناسب است.

رسانندگی

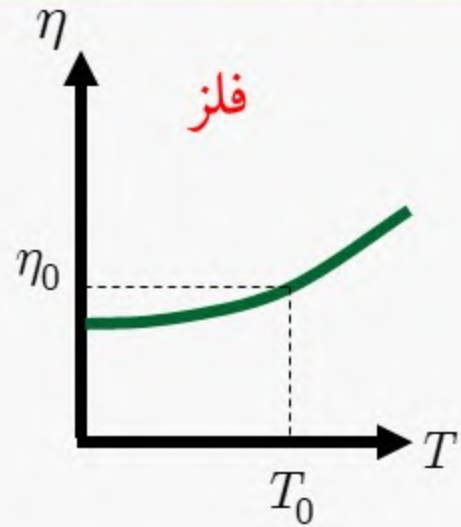
$$\vec{J} = g \vec{E}$$

$$\eta = \frac{1}{g}$$

عکس رسانندگی را مقاومت ویژه می‌نامیم.
یکای مقاومت ویژه اهم - متر است.

$$\vec{J} = g(\vec{E}) \vec{E} \quad \text{در حالت کلی تر}$$

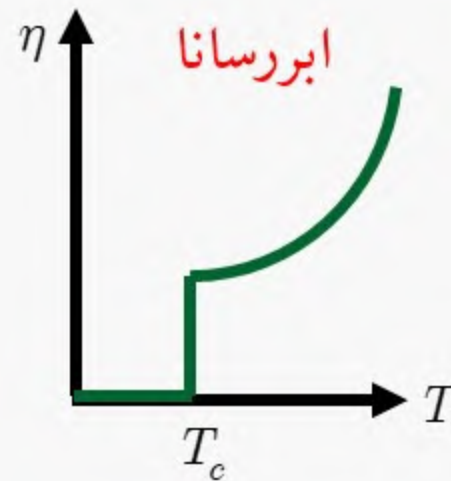
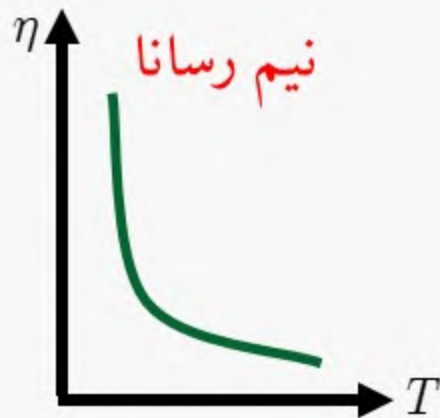




مقاومت ویژه ی فلز را در یک گستره ی دمایی کوچک (حدود ۱۰۰ درجه ی سلسیوس) می توان تقریباً با معادله ی زیر بیان کرد

$$\eta = \eta_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

ضریب حرارتی مقاومت ویژه



Kammerlingh Onnes

جدول ۱۰۷ مقاومت ویژه η و ضریب گرمایی مقاومت α برای برخی از اجسام معمولی در ۲۰ درجه سلسیوس^۱

ماده	η بر حسب Ωm	$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT}, (^\circ C)^{-1}$
آلومینیوم	2.82×10^{-8}	۰.۰۰۰۴۳
مس	1.68×10^{-8}	۰.۰۰۰۶۸
طلا	2.44×10^{-8}	۰.۰۰۰۴
آهن	9.71×10^{-8}	۰.۰۰۰۶۵
نیکل	6.84×10^{-8}	۰.۰۰۰۶۹
نقره	1.59×10^{-8}	۰.۰۰۰۴۱
جیوه	9.58×10^{-8}	۰.۰۰۰۰۹
تنگستن	5.51×10^{-8}	۰.۰۰۰۴۵
کنستانتین (مس ۶۰، نیکل ۴۰)	4.90×10^{-8}	۰.۰۰۰۰۰

1. *Handbook of Chemistry and Physics*, 58th edition, CRC Press. Inc., Cleveland, Ohio.



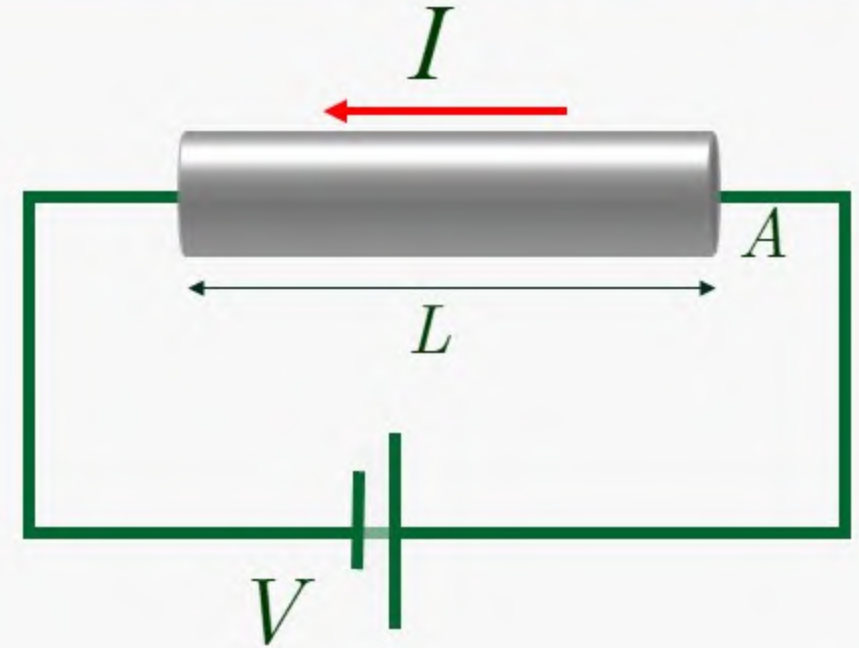
$$|\Delta\Phi| = V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} da = JA$$

$$E = \frac{V}{L}$$

$$J = \frac{I}{A}$$

$$\frac{E}{J} = \frac{V}{I} \frac{A}{L}$$

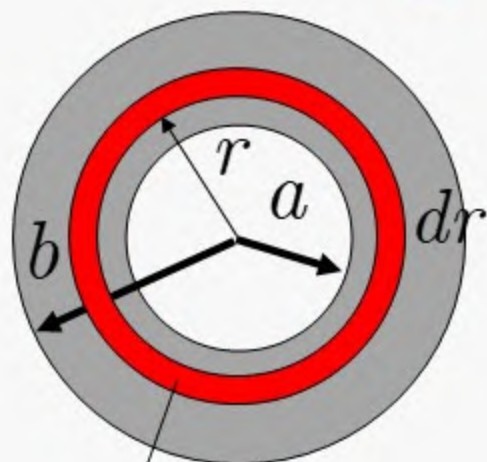


$$\eta = R \frac{A}{L}$$

$$R = \eta \frac{L}{A}$$



لوله‌ی استوانه‌ای شکل، دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و طول L ، از ماده‌ای با مقاومت ویژه‌ی ساخته شده است. مقاومت الکتریکی شعاعی آن را پیدا کنید

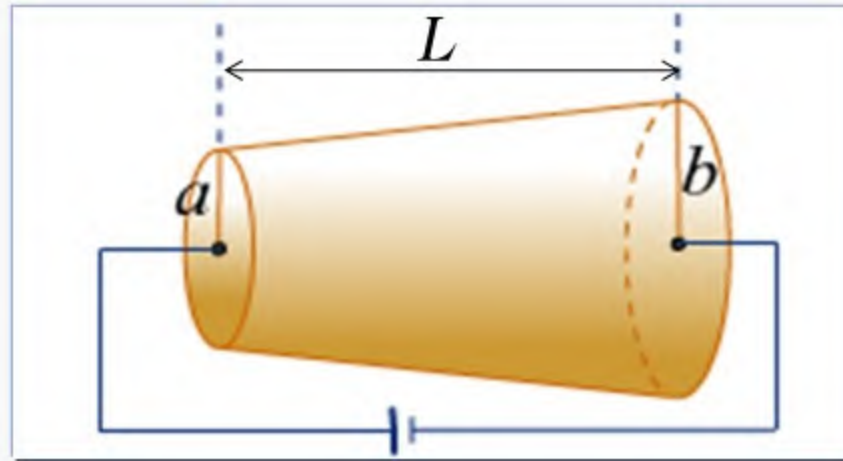


$$dR = \eta \frac{dr}{2\pi r L}$$

$$R = \int_a^b \eta \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\eta}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$$

پوسته‌ی استوانه‌ای به طول L

مخروط ناقصی مطابق شکل با شعاع‌های a و b و طول L از ماده‌ای با مقاومت ویژه η ساخته شده است. مقاومت الکتریکی طولی آن را پیدا کنید



$$R = \frac{\eta L}{\pi ab}$$

جواب

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

معادله‌ی پیوستگی

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

برای جریان‌های پایا: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ بنابراین

$$\nabla \cdot (g \vec{E}) = 0$$

$$g \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

برای محیط‌های همگن:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \Phi$$

از سوی دیگر

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

بنابراین، برای محیط‌های خطی همگن:



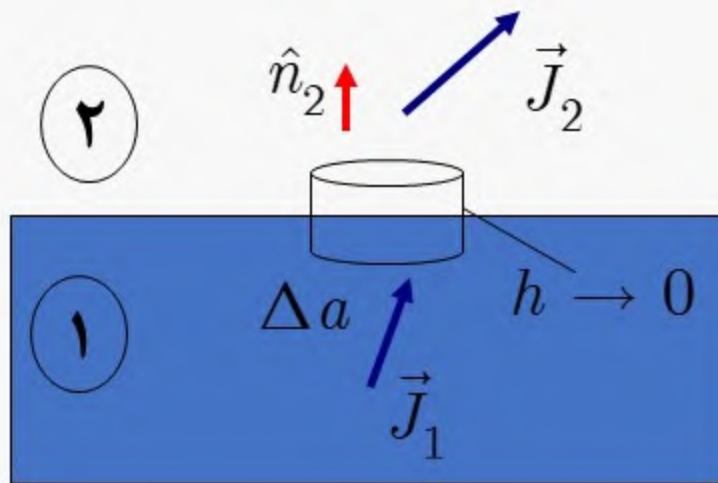
$$\oint \vec{J} \cdot \hat{n} da = 0$$

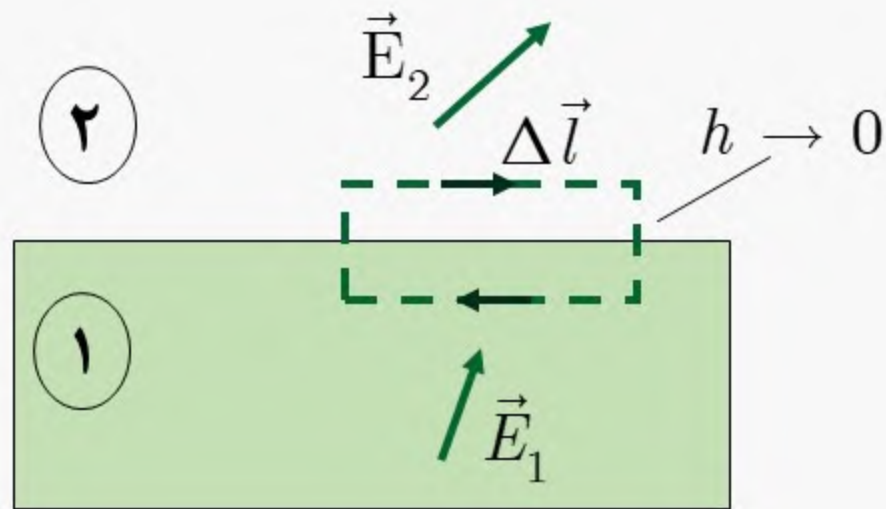
$$\vec{J} \cdot \hat{n}_2 \Delta a + \vec{J} \cdot \hat{n}_1 \Delta a = 0$$

$$\left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1\right) \cdot \hat{n}_2 = 0$$

$$J_{2n} = J_{1n}$$

$$g_2 E_{2n} = g_1 E_{1n}$$





$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l} - \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l} = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

مؤلفه‌ی مماسی میدان الکتریکی بر مرز دو محیط پیوسته است. (مثل الکتروستاتیک)

دو رسانای فلزی در یک محیط خطی، همگن و نامتناهی با رسانندگی g در نظر می‌گیریم.

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad \text{اختلاف پتانسیل رساناها}$$

$$I = \frac{|\Delta\Phi|}{R} \quad \text{اگر مقاومت الکتریکی محیط } R \text{ باشد، جریانی که در محیط بین رساناها برقرار می‌شود}$$

$$\frac{|\Delta\Phi|}{R} = I = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = g \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = g \frac{Q}{\epsilon}$$

$$Q = C |\Delta\Phi|$$

$$RC = \frac{\epsilon}{g}$$



در یک محیط همگن و همسانگرد با رسانندگی g و گذردهی ϵ چگالی بار آزاد اولیه $\rho_0(x, y, z)$ وجود دارد. اگر سیستم به حال خود رها شود، توزیع بار به گونه‌ای تغییر می‌کند که سیستم به حالت تعادل برسد

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$g \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$g \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{g}{\epsilon} \rho$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} = \epsilon \eta$$

ثابت زمانی یا زمان واهلش



$$t_c = \frac{\epsilon}{g} = \epsilon\eta$$

ثابت زمانی معیاری است از سرعت نزدیک شدن محیط رسانا به حالت تعادل الکتروستاتیکی؛ به عبارت دقیقتر، t_c مدت زمانی است که طی آن بار در هر ناحیه مشخصی به $1/e$ مقدار اولیه اش کاهش می یابد.

در یک کاربرد بخصوص، چنانچه ثابت زمانی جسمی از زمان مشخصه لازم برای انجام اندازه گیری مربوط به مراتب کمتر باشد، آن جسم به توزیع بار حالت تعادل خود خواهد رسید. در برخی کاربردها تنها کافی است که ثابت زمانی کمتر از 10^{-5} ثانیه باشد تا اطمینان حاصل شود که رفتار جسم رسانا گونه است. چون گذردهی اکثر اجسام غیر فلزی^۱ در گستره میان 10^9 تا 10^{14} قرار می گیرد، این امر مستلزم ماده ای است که مقاومت ویژه آن کمتر از 10^9 یا 10^{10} اهم - متر باشد. در کاربردهای مربوط به فرکانسهای بالا، برای رفتار رسانا - گونه واقعی ثابت زمانی کوتاهتر و مقاومت ویژه کمتری لازم است، در واقع باید شرط زیر برقرار باشد

$$t_c \ll \frac{1}{f}$$



لطفا این بخش را خودتان مطالعه بفرمایید!

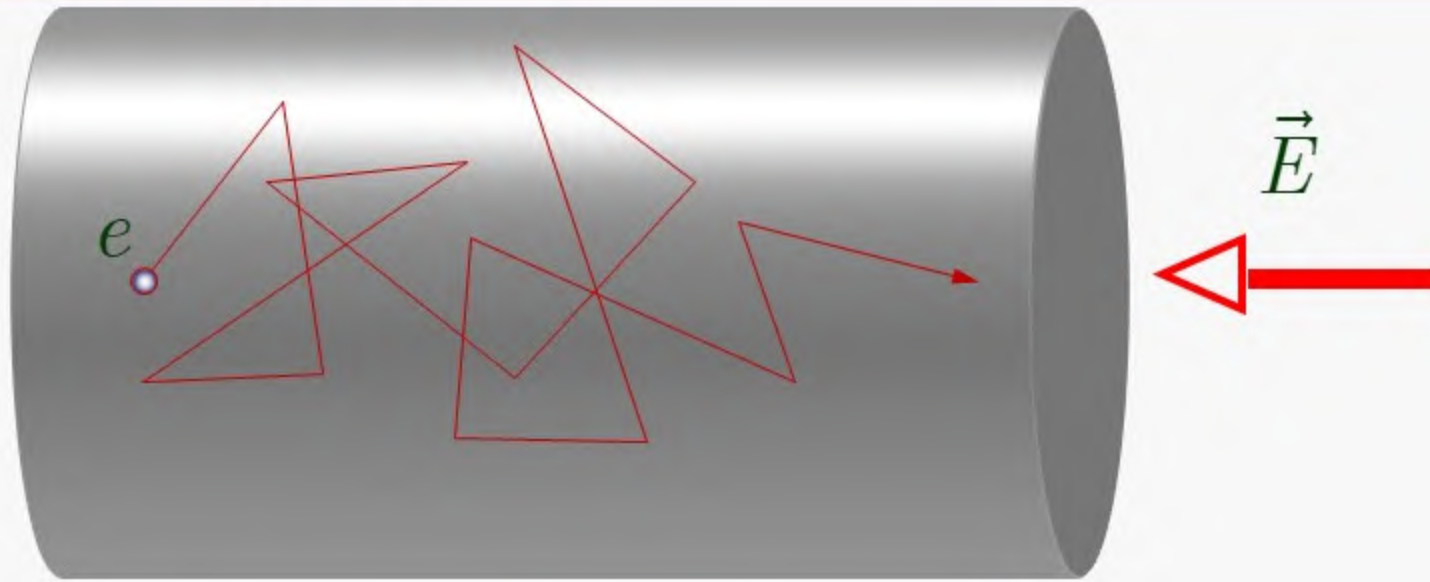
I. جمع جبری جریان‌هایی که به یک نقطه انشعاب وارد می‌شوند صفر است، یعنی

$$\sum I_j = 0 \quad (I)$$

II. جمع جبری اختلاف پتانسیل‌های دور هر حلقه از شبکه برابر است با صفر، یعنی

$$\sum V_j = 0 \quad (II)$$



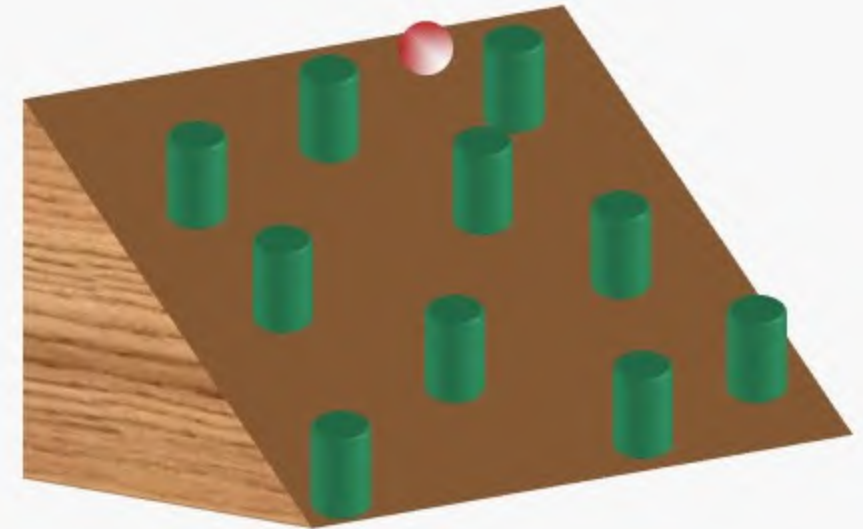


$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} - G\vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

در حالت پایا $\vec{a} = 0$

$$\vec{v} = \frac{q}{G} \vec{E} \equiv \vec{v}_d$$

سرعت رانشی (سوق)
Drift velocity



$$q\vec{E} - G\vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= qE_x - Gv_x \\ m \frac{dv_y}{dt} &= qE_y - Gv_y \\ m \frac{dv_z}{dt} &= qE_z - Gv_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{q}{G} E_x \left(1 - e^{-\frac{G}{m}t} \right) \\ v_y(t) &= \frac{q}{G} E_y \left(1 - e^{-\frac{G}{m}t} \right) \\ v_z(t) &= \frac{q}{G} E_z \left(1 - e^{-\frac{G}{m}t} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{q}{G} \vec{E} \left(1 - e^{-\frac{G}{m}t} \right)$$

$$\vec{F}' = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

$$\tau = \frac{m}{G}$$

زمان آزاد میانگین (زمان واهلش)



$$\vec{v}(t) = \frac{q}{G} \vec{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{m}{G}$$

زمان آزاد میانگین (زمان واهلش)

$$\vec{v}_d = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

$$\vec{J} = Nq\vec{v}_d = \frac{Nq^2\tau}{m} \vec{E}$$

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

$$g = \sum_i \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{m_i}$$

اگر چند نوع حامل بار وجود داشته باشد



برای یک رسانای الکتریکی نسبتاً خوب، نظیر یک نیم رسانا یا فلز (ولی نه الکترولیت)، τ را می‌توان از نظر فیزیکی به عنوان زمان میانگین میان برخوردهای الکترون رسانش تعبیر کرد. در چنین جسمی الکترون برای مدتی کوتاه شتاب می‌گیرد، و پس از آن با یکی از اتمهای جسم برخورد می‌کند. در نتیجه این برخورد الکترون در جهتی کتره‌ای پرتاب می‌شود، به گونه‌ای که اثر میانگین برخورد سرعت سوق الکترون را مجدداً به صفر کاهش می‌دهد. اگر میانگین زمان برخورد τ ، و میانگین سرعت ویژه v باشد، آنگاه بعد از هر مدت زمان τ الکترونها به مقدار mv از اندازه حرکت خود را ازدست می‌دهند. در حالت پایا، آهنگ اتلاف اندازه حرکت mv/τ با آهنگ کسب اندازه حرکت qE برابر قرار داده می‌شود، و نتیجه حاصل با معادله (۳۵.۷) یکی است. زمان میانگین τ با رابطه زیر به مسافت آزاد میانگین الکترون مربوط می‌شود

$$l = v_T \tau$$

v_T سرعت گرمایی الکترون‌هاست



$$\vec{J} = -Ne\vec{v}; \quad g = Ne \frac{v}{E} = \frac{Ne^2 \tau}{m}$$

در فلزات که الکترون‌ها حامل جریان هستند

در اینجا e قدر مطلق بار الکترون است. سرعت سوق الکترون برای واحد میدان الکتریکی (v/E) را g حرکت الکترون می‌گویند. g حرکت زیاد بدان معناست که زمان برخورد، τ ، یا به عبارت دیگر، مسافت آزاد میانگین طولانی است. برای اینکه بتوانیم مسافت آزاد میانگین الکترون‌ها در فلز را بهتر تجسم کنیم باید از دینامیک برخورد الکترون‌ها استفاده کنیم. می‌دانیم که رسانا از حیث الکتروستاتیکی فقط به طور متوسط خنثی است، و اینکه در ابعادی از مرتبه یک آنگستروم تغییرات زیادی در پتانسیل آن وجود دارد. همچنین می‌دانیم که هر ذره باردار مانند الکترون، باید برخورد کند و یا بر اثر تغییرات در پتانسیل پراکنده شود. اما به این نکته نیز واقفیم که در حرکت الکترون در مقیاس اتمی ماهیت موجی آن نقش مهمی ایفا می‌کند. حل کامل مسئله برخورد الکترونی با به کار بردن مفاهیم مکانیک موجی از حدود این کتاب خارج است؛ در اینجا فقط به ذکر یکی از نتایج آن می‌پردازیم. در یک بلور کامل که پتانسیل تناوبی سه بعدی دارد، یک موج الکترونی اصلاً برخوردی نمی‌کند؛ زمان برخورد τ برای آن نامتناهی است. از این رو، متناهی بودن رسانندگی فلزات ناشی از وجود ناکاملیهایی در ساختار کاملاً تناوبی آنهاست. این ناکاملیه‌ها بر دو نوع اند: (۱) ناخالصیها و نقصهای هندسی (نظیر مرزهای دانه‌ای در مواد چند بلوری) و (۲) ناکاملیهای ناشی از حرکت گرمایی اتمها در ساختار ماده. این هر دو نقص مستقل از یکدیگر به مقاومت ویژه کمک می‌کنند (قاعده ماتیسن^۱) به گونه‌ای که

$$\eta = \eta_1 + \eta_2(T)$$



در دماهای معمولی، پراکندگی امواج الکترونی توسط اتم‌هایی که در اثر گرما جابه‌جا شده‌اند سهم اصلی را در مقاومت ویژه فلزات بسیار خالص دارد. بنا بر این، $\eta \approx \eta_r(T)$. مقطع مؤثر پراکندگی در یک اتم جابه‌جا شده متناسب است با مربع دامنه ارتعاش آن (x^2)، به عبارت دیگر متناسب است با بیشینه انرژی پتانسیل آن. با فرض اینکه بر اتم‌های جابه‌جا شده نیروهای بازگرداننده کشسان وارد می‌شود، داریم

$$(\text{انرژی جنبشی})_{\max} = (\text{انرژی پتانسیل})_{\max} \propto kT$$

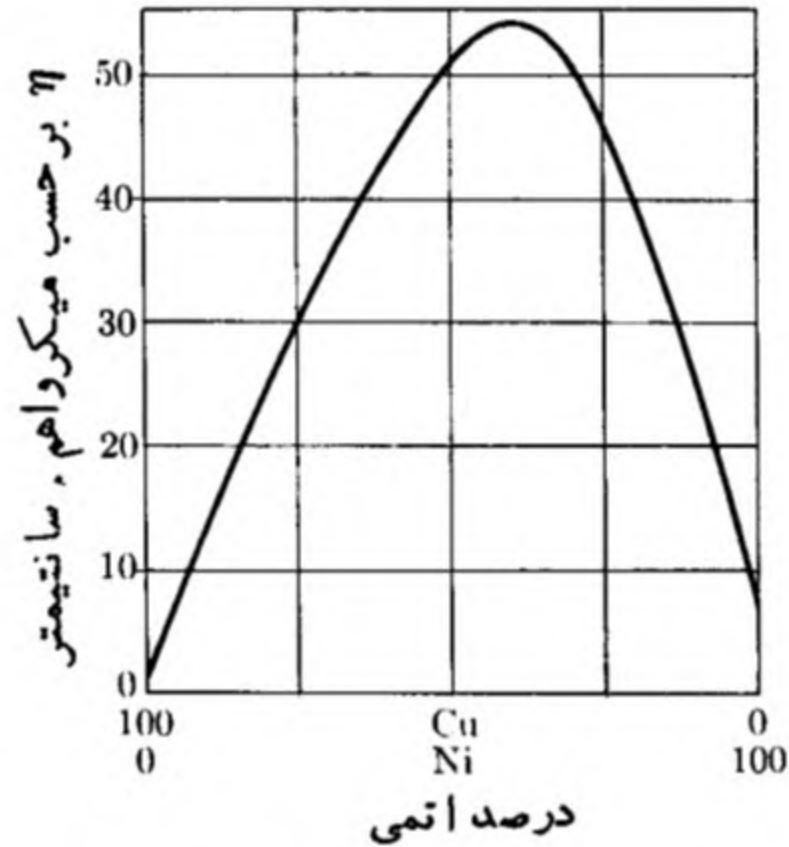
به طوری که

$$\eta \approx \eta_r \propto (\tau_r)^{-1} \propto x^2 \propto T$$

یا اگر این رابطه را با کلمات بیان کنیم، مقاومت ویژه فلز خالص متناسب است با دمای مطلق. بنا بر این ضریب گرمایی مقاومت، $(1/\eta)d\eta/dT$ ، برای فلزهای بسیار خالص، عبارت است از

$$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT} \approx \frac{1}{T}$$





مقاومت ویژه آلیاژهای مس - نیکل بر حسب تابعی از نسبت ترکیب در 20°C .

شاد و مهربان باشید

