

Electromagnetism I

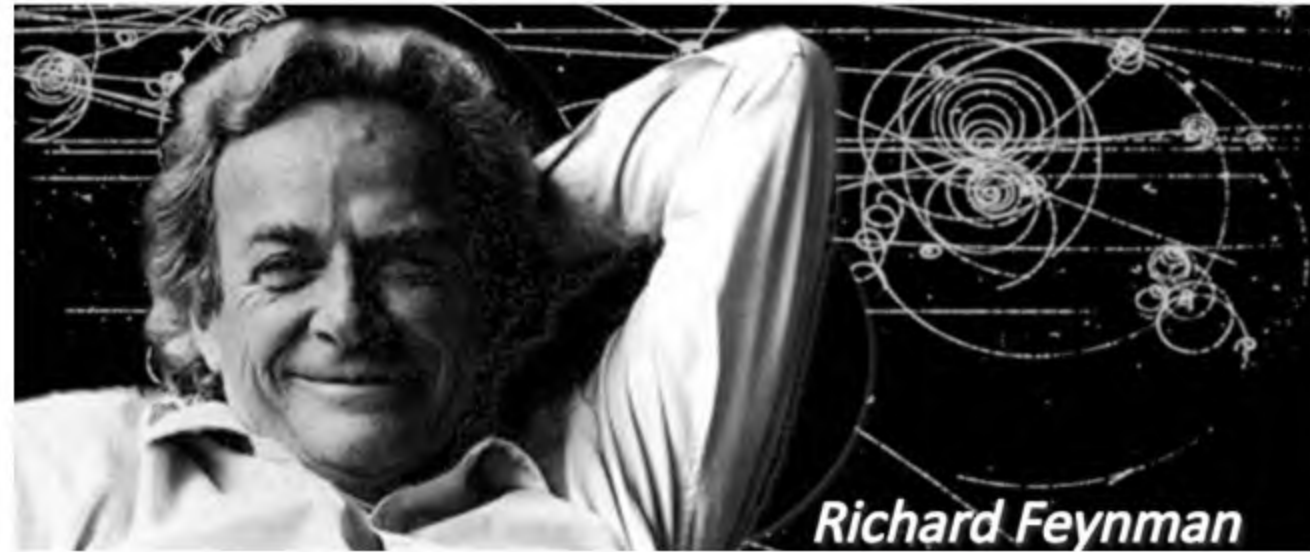
Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2023

دانشگاه خوارزمی





اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را
به دست می آورید که تا کنون کسب کرده اید

فاینمن

درس دوازدهم

روابط انتگرالی برداری

Vector Integral Relations



اتحاد اول گرین

اگر Φ و Ψ دو میدان اسکالر دلخواه باشند، آنگاه

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dv = \oint_A \Psi \nabla \Phi \cdot \hat{n} da = \oint_A \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} da$$

اثبات در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot \hat{n} da$ به جای میدان برداری $\mathbf{F}$ قرار دهیم: $\mathbf{F} = \Psi \nabla \Phi$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \quad \mathbf{F} \cdot \hat{n} da = \Psi \nabla \Phi \cdot \hat{n} da = \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} da$$

آنگاه اتحاد اول گرین به دست می‌آید:

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dv = \oint_A \Psi \nabla \Phi \cdot \hat{n} da = \oint_A \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} da$$



اتحاد دوم گرین اگر Φ و Ψ دو میدان اسکالر دلخواه باشند، آنگاه

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dv = \oint_A \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) da$$

اثبات در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot \hat{n} da$ به جای میدان برداری $\mathbf{F}$ قرار دهیم:

$$\mathbf{F} = \Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi$$

$$\mathbf{F} \cdot \hat{n} = \Psi \nabla \Phi \cdot \hat{n} - \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{n} = \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi - \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = \Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi$$

آنگاه اتحاد دوم (یا قضیه‌ی) گرین به دست می‌آید:

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dv = \oint_A (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \hat{n} da = \oint_A \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) da$$



چند قضیه‌ی انتگرالی

$$(1) \quad \int_V \nabla \Phi dv = \oint_A \Phi \hat{n} da$$

$$(2) \quad \int_A \hat{n} \times \nabla \Phi da = \oint_C \Phi dl$$

$$(3) \quad \int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = \oint_A \hat{n} \times \mathbf{F} da$$

$$(4) \quad \int_V (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} dv = \oint_s \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \hat{n}) da$$



$$\int_V \nabla \Phi dv = \oint_A \Phi \hat{n} da \quad \text{اثبات قضیه‌ی (۱):}$$

اگر در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot \hat{n} da$ به جای میدان برداری قرار دهیم:

که $\mathbf{B}$ برداری ثابت دلخواه است. $\mathbf{F} = \Phi \mathbf{B}$

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{B}) dv = \oint_A \Phi \mathbf{B} \cdot \hat{n} da$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{B}) = \nabla \Phi \cdot \mathbf{B} + \cancel{\Phi \nabla \cdot \mathbf{B}}^0 = \nabla \Phi \cdot \mathbf{B}$$

$$\int_V \nabla \Phi \cdot \mathbf{B} dv = \oint_A \Phi \mathbf{B} \cdot \hat{n} da$$

$$\mathbf{B} \cdot \int_V \nabla \Phi dv = \mathbf{B} \cdot \oint_A \Phi \hat{n} da$$

$$\mathbf{B} \cdot \left(\int_V \nabla \Phi dv - \oint_A \Phi \hat{n} da \right) = 0$$

$$\int_V \nabla \Phi dv = \oint_A \Phi \hat{n} da$$



اثبات قضیه‌ی (۲):
$$\int_A \hat{n} \times \nabla \Phi da = \oint_C \Phi dl$$

در قضیه‌ی استوکس $\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{n} da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ قرار دهیم: $\mathbf{F} = B\Phi$ که در آن B بردار ثابتی است.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (B\Phi) = (\nabla \Phi) \times B + \Phi(\nabla \times B)$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \Phi B \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_A [(\nabla \Phi) \times B] \cdot \hat{n} da = \oint_C \Phi B \cdot d\mathbf{l}$$

اما
$$[(\nabla \Phi) \times B] \cdot \hat{n} = B \cdot [\hat{n} \times (\nabla \Phi)]$$

$$B \cdot \int_A [\hat{n} \times (\nabla \Phi)] da = B \cdot \oint_C \Phi d\mathbf{l}$$

$$\int_A [\hat{n} \times (\nabla \Phi)] da = \oint_C \Phi d\mathbf{l}$$



$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = \oint_A \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} da \quad \text{اثبات قضیه‌ی (۳):}$$

اگر در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ قرار دهیم: $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \times \mathbf{B}$ که $\mathbf{B}$ بردار ثابتی است.

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{B} - \overset{0}{(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{F}} \quad (\mathbf{F} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F})$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{B} dv = \oint_A \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) da$$

$$\mathbf{B} \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{F}) dv = \mathbf{B} \cdot \oint_A (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) da$$

$$\mathbf{B} \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{F}) dv = \mathbf{B} \cdot \oint_A (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) da$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{F}) dv = \oint_A (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) da$$



$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} dv = \oint_s \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \quad \text{اثبات قضیه‌ی (۴):}$$

ابتدا مسئله را برای مؤلفه‌ی x بررسی می‌کنیم $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) F_x dv = ?$

اگر در قضیه‌ی واگرایی $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_A \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ قرار دهیم: $\mathbf{F} \rightarrow F_x \mathbf{G}$

$$\nabla \cdot (F_x \mathbf{G}) = F_x \nabla \cdot \mathbf{G} + (\nabla F_x) \cdot \mathbf{G}$$

$$\int_V \nabla \cdot (F_x \mathbf{G}) dv = \oint_A (F_x \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad \int_V [F_x \nabla \cdot \mathbf{G} + (\nabla F_x) \cdot \mathbf{G}] dv = \oint_A (F_x \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\int_V [\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla] F_x dv = \oint_A F_x \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$



$$\int_V [\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla] F_x dv = \oint_A F_x \mathbf{G} \cdot \hat{n} da$$

$$\int_V [\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla] F_y dv = \oint_A F_y \mathbf{G} \cdot \hat{n} da$$

$$\int_V [\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla] F_z dv = \oint_A F_z \mathbf{G} \cdot \hat{n} da$$

$$\int_V [\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla] \mathbf{F} dv = \oint_A \mathbf{F} \mathbf{G} \cdot \hat{n} da$$



شاد و مهربان باشید

